2002版

高等学校数学学习辅导教材

复变函数

全程学习指导与解题能力训练

（西安交通大学·复变函数第四版）

谭欣欣 张 莉/编著

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

复变函数
全程学习指导与解题能力训练

（第二版）

（西安交通大学·复变函数第四版）

谭欣欣　张　莉　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数全程学习指导与解题能力训练/谭欣欣,张莉编著.
2 版.—大连:大连理工大学出版社,2002.8
(高等学校数学学习辅导教材)
ISBN 7-5611-1674-8

Ⅰ.复… Ⅱ.①谭…②张… Ⅲ.复变函数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 041974 号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn
URL:http://www.dutp.com.cn
大连理工印刷有限公司印刷

开本:850 毫米×1168 毫米 1/32 字数:356 千字 印张:11.25
印数:16001—24000 册
2001 年 9 月第 1 版 2002 年 8 月第 2 版
2002 年 8 月第 3 次印刷

责任编辑:刘 杰 责任校对:杜 娟
封面设计:王福刚

定价:15.00 元

前　言

本书是《高等学校数学学习辅导教材》系列之一。根据原国家教委审定的高等学校"复变函数课程教学基本要求"编写而成，融学习指导与考研为一体。可供自动控制、电类以及物理各专业本科生使用，也可供数学专业、高职和成人教育相关专业选用。

《复变函数》是物理、数学及电类各专业必修的一门基础课，也是相关专业硕士研究生入学考试的一门必考科目。本书旨在使在校大学生能用较少的学时掌握好所学知识，扩大课堂信息量，提高应试能力。为此，本书按照目前高校普遍采用的国家级优秀教材、西安交通大学高等数学教研室主编的《复变函数》(第四版，高等教育出版社)的章节顺序，分为六章，每章均设计了四个板块，即

知识点考点精要　列出基本概念，重要定理和主要内容，突出必须掌握或考试出现频率高的核心知识。

典型题真题精解　精选历年研究生入学考试试题中具有代表性的例题进行详尽的分析和解析。这些例题涉及内容广、类型多、技巧性强，旨在提高同学的分析能力，掌握基础概念和理论，开拓解题思路，熟练掌握解题技巧。

教材习题同步解析　针对《复变函数》(第四版，高等教育出版社)教材中的习题，几乎给出了全部的解，它无非方便于读者对照和分析。值得提醒的是，解题能力需要亲自动手，通过本身的实践，才能逐步锻炼出来，从而不断提高水平。

模拟试题自测　自测旨在进一步强化解题训练，反映考试的重点、难点，培养综合能力和应变能力，巩固和提高复习效果。

书末附录选编了全国部分院校的期末试卷以及重点院校相关专业近三年的研究生入学试卷。它基本上反映了目前本科生考试和研究生考试的要求。可对学生起到自测达标、考前热身的作用。

本书几经教学试点、修改而成。我们特别感谢大连理工大学出版社的刘杰编审及主审人、大连理工大学姜乃斌教授，他们对书稿进行了认真的审阅，对教材体系及内容改进提出了一系列的具体建议，对本书的形成及保证教材的质量起到了十分重要的作用。

本书综合测试及附录的内容，承蒙北京航空航天大学李心灿教授，浙江大学杨启帆教授，吉林大学张魁元教授，重庆大学陈义华教授，兰州大学王海明教授，西安交通大学赫孝良教授，沈阳工业大学王金铭副教授，沈阳师范学院薛春燕副教授，锦州师专刘铁成副教授，大连理工大学贺明锋副教授、庞丽萍、张学胜老师以及复旦大学、东北大学等有关院校及老师的热情帮助，在此向他们表示衷心感谢！

在本书编写过程中，还得到大连大学教务处徐晓鹏同志以及信息工程学院的支持和鼓励，得到大连海事大学杜祖缔教授，辽宁师范大学郝金彪教授、司成斌教授的热情帮助，大连大学的张乃敏、刘学生、王丽燕、张成同志也给予了极大的帮助，借此机会一并向他们表示诚挚的谢意！

由于编者水平有限，不妥与错误之处在所难免，恳请读者与同行批评指正。

编者

2002 年 5 月于大连

目　录

第一章　复数与复变函数

一　知识点考点精要

复数，复数的各种表示方法及其运算；区域、单连通域、多连通域、简单曲线；复球面与无穷远点；复变函数，复变函数的极限和连续。

(一)复数及其代数运算和几何表示

1. 复数的概念

定义　设 x,y 都是实数，我们把形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的表达式称为复数。其中 i 称为虚数单位，且具有性质 $\mathrm{i}^2=-1$，x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记为

$$x=\mathrm{Re}(z),\ y=\mathrm{Im}(z)$$

(1) 当 $x=0, y\neq 0$ 时，$z=y\mathrm{i}$ 称为纯虚数；

(2) 当 $y=0$ 时，$z=x+0\cdot\mathrm{i}$ 视为实数 x；

(3) 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则 $z_1=z_2$ 当且仅当 $x_1=x_2, y_1=y_2$；

(4) 当 $x=y=0$ 时，称 $z=0$。

2. 复数的运算

(1) 加(减)法：两个复数的加(减)法，定义为实部与实部相加(减)及虚部与虚部相加(减)，即

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2) \tag{1.1}$$

(2) 乘法：两个复数相乘按多项式法则相乘并注意 $\mathrm{i}^2=-1$，即

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) \tag{1.2}$$

(3) 除法：若 $z_2\neq 0$，将满足 $z_2\cdot z=z_1$ 的复数 z 定义为 z_1 除以 z_2 的商，

记为 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$，即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.3}$$

(4) 共轭复数

定义　对复数 $z=x+\mathrm{i}y$，称 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 为 z 的共轭复数。

对共轭复数，有以下性质：

$$\begin{cases}\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2,\ \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,\ \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};\\ \bar{\bar{z}}=z;\\ z\bar{z}=x^2+y^2=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2;\\ z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z),\ z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)。\end{cases} \tag{1.4}$$

3. 复数的其它表示法

(1) 几何表示法。复数 $x+\mathrm{i}y$ 与有序实数对 (x,y) 成一一对应。因此，一个建立了直角坐标系的平面可以用来表示复数，通常把横轴叫实轴或 x 轴，纵轴叫虚轴或 y 轴。这种用来表示复数的平面叫复平面。这样，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 就可以用复平面上的点 (x,y) 来表示(如图 1-1)。

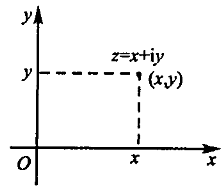


图 1-1

(2) 向量表示法。在复平面上，复数 z 还与从原点指向点 $z=x+\mathrm{i}y$ 的平面向量成一一对应，因此，复数 z 也可用向量 OP 来表示(如图 1-2)。

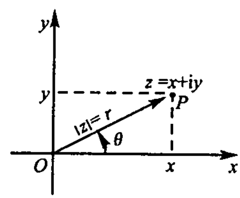


图 1-2

向量的长度称为复数 z 的模或绝对值，记做

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.5}$$

利用复数的向量表示及定义，易知

$$|z|=|\bar{z}| \tag{1.6}$$

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|z^2| \tag{1.7}$$

再据复数的运算法则可知，两个复数的加减法运算和相应向量的加减法运算一致，即符合平行四边形法则和三角形法则，故有三角不等式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1.8}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big| \tag{1.9}$$

当 $z \neq 0$ 时，实轴的正向与向量 z 之间的夹角称为复数 z 的幅角，记为 $\mathrm{Arg}z = \theta$。$\mathrm{Arg}z$ 有无穷多个值，它们彼此相差 2π 的整数倍，其中仅有一个满足关系：$-\pi < \theta \leqslant \pi$，我们称之为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，记做 $\arg z$，即

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi,\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1.10}$$

当 $z = 0$ 时，$|z| = 0$，而幅角不定。

$\mathrm{Arg}z$ 的主值 $\arg z (z \neq 0)$ 可由 $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 来确定：

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0, y \gtreqless 0 \\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y \gtrless 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} \pm \pi, & x < 0, y \gtrless 0 \\ \pi, & x < 0, y = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

(3) 三角表示法

由 z 的模 r 及幅角 θ 的含义，还可把复数 z 表示成

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.12}$$

称为复数 z 的三角表示式。

(4) 指数表示法

在三角表式示中，再利用欧拉公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 可得

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.13}$$

称为复数 z 的指数表示式。

以上复数的不同表示法仅是形式上的差异，它们各有其特点：复数及其运算的几何解释可以从向量表示法得到；复数运算中模与幅角的变化规律可以由三角或指数表示法得到。

4. 复数的乘幂与方根

(1) 乘积与商

若 $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1 r_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)},\ (r_2 \neq 0)$$

即

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \tag{1.14}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2,\ (z_1 \cdot z_2 \neq 0) \tag{1.15}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{1.16}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2 \tag{1.17}$$

这就是说，两个复数乘积(或商)的模等于它们的模的乘积(或商)，两个复数乘积(或商)的幅角等于它们的幅角的和(或差)。

若限定幅角的主值，则公式(1.15)及(1.17)不一定成立。如 $z_1 = -1$，$z_2 = \mathrm{i}$，当限定主值时，公式(1.15)不成立。应这样理解式(1.15)及(1.17)：任意给定一个等式右端两个多值函数一对可能取的值，左端多值函数也必有一个值使这个等式成立，反过来说也对。

积与商的几何意义：

两个复数 z_1 与 z_2 的乘积 $z_1 \cdot z_2$ 是这样一个向量：从表示 z_1 的向量逆时针旋转一个角度 $\arg z_2$，并伸长(或压缩)到 $|z_1|$ 的 $|z_2|$ 倍得到的，如图 1-3。这一结果在学习第六章共形映射时十分有用。

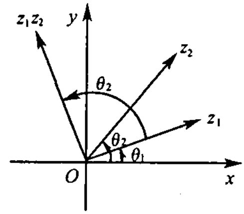


图 1-3

特别，$\mathrm{i}z_1$ 相当于对 z_1 实行了一次旋转变换，旋转角为 90°。而 rz_1 相当于对 z_1 实行了一次伸缩变换，伸缩率为 r，如图 1-4。图中取 $r = 2$。

由此可见，当把复数当作向量看待时，复数的乘法既不同于向量的点积(数量积)，也不同于向量的叉积(矢量积)。

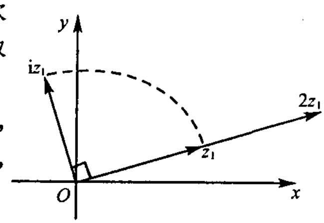


图 1-4

两个复数的商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 也是一个向量，即是将 z_1 伸(缩) $\dfrac{1}{r_2}$ 倍，再按顺时针方向旋转一个角度 $\arg z_2$ 而成。

(2) 幂与根

1° 由(1.14)与(1.15)可推得　$|z^n| = |z|^n$，$\mathrm{Arg}z^n = n\mathrm{Arg}z$，或者

$$z^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) \tag{1.18}$$

当 $|z|=1$ 时，有

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta \tag{1.19}$$

(1.19) 即是棣美弗公式。

2° 若 $w^n=z$，则 w 叫复数 z 的 n 次方根，记做 $\sqrt[n]{z}$，即 $w=\sqrt[n]{z}$，令 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则

$$w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$k=0,1,2,\cdots,n-1 \tag{1.20}$$

在几何上，$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

1 的 n 次方根也叫 n 次单位根。

（二）复变函数及其极限与连续

1. 平面点集

(1) z_0 的 δ- 邻域：满足关系 $|z-z_0|<\delta$ 的点 z 的全体称为点 z_0 的一个 δ- 邻域，而满足 $0<|z-z_0|<\delta$ 的点 z 的全体称为点 z_0 的一个去心 δ- 邻域。

(2) 内点：设 G 是一平面点集，$z_0\in G$，若存在 z_0 的某个邻域也属于 G，则称 z_0 为 G 的内点。

(3) 开集：若 G 的每个点都是内点，则称 G 为开集。

(4) 连通集：若连接 G 内任意两点的折线也属于 G，则称 G 为连通集。

(5) 区域：连通的开集叫区域。

(6) 边界：若 z_0 点的任意一个邻域内既有区域 G 中的点，又有不属于 G 中的点，则 z_0 称为区域 G 的一个边界点。由 G 的全体边界点组成的集合称为 G 的边界。

(7) 闭区域：区域 G 及其边界一起构成闭区域，记为 $\overline{G}$。

(8) 简单闭曲线：设曲线 C：$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$。当 $x(t)$ 与 $y(t)$ 连续时，称 C 为连续曲线。对介于 a，b 间的 t_1 与 t_2，当 $t_1\neq t_2$ 而有 $z(t_1)=z(t_2)$ 时，点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的重点。没有重点的连续曲线 C，称为简单（或 Jordan）曲线。如果简单曲线 C 的两个端点重合，则 C 称为简单闭曲线。

由以上定义知，简单曲线自身不相交，简单闭曲线则只有起点与终点重

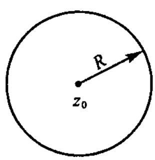
合。

(9) 光滑曲线：曲线 $z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t), a\leqslant t\leqslant b$，当 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 连续且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$ 时，称为光滑曲线，由几条光滑曲线依次连接而成的曲线，称为按段光滑曲线。

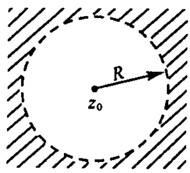
(10) 单连通域：若属于区域 G 的任何简单闭曲线 C 的内部也属于 G，则称 G 为单连通域。否则称为多连通域。

从几何上看，单连通域即是无洞、无割痕的域。

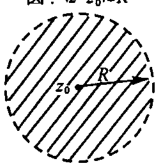
复平面内的曲线与区域在以后的学习中极为重要(特别是在第三章和第六章)。要熟悉几种常遇到的曲线、区域及表示，现汇列如下，见图 1-5。



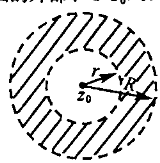
圆：$|z-z_0|=R$



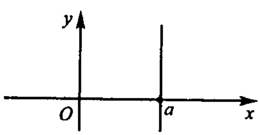
圆的外部：$|z-z_0|>R$



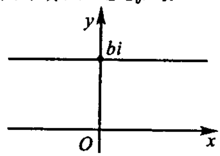
圆的内部：$|z-z_0|<R$



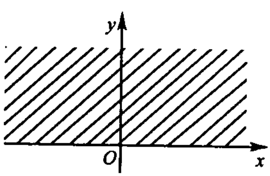
圆环域：$r<|z-z_0|<R$



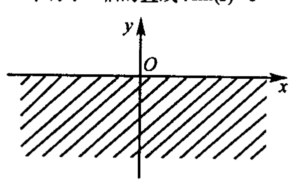
平行于 y 轴直线：$\mathrm{Re}(z)=a$



平行于 x 轴的直线：$\mathrm{Im}(z)=b$



上半平面：$\mathrm{Im}(z)>0$



下半平面：$\mathrm{Im}(z)<0$

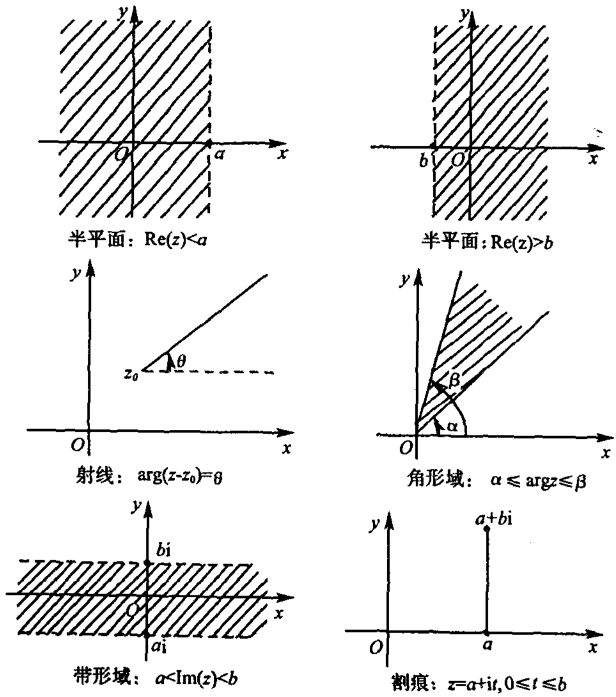


图 1-5

2. 复变函数的定义

(1) 定义：设 G 是复平面上一个点集，若对 G 中每一点 $z=x+\mathrm{i}y$，按照一定的法则，都有复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 与之对应，则称 w 是 z 的复变函数，记为

$$w=f(z)$$

(2) 由于 $w=f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=u+\mathrm{i}v$

所以一个复变复值函数相当于两个二元实变函数

$$u=u(x,y),\ v=v(x,y)$$

故对复变函数 $w=f(z)$ 的研究可以转化为对一对二元实函数的研究。并可利用《高等数学》中相应结论。

(3) 因为复变函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v=f(x+\mathrm{i}y)$ 涉及四个实变数 $x,y,u,$

v。故不能用一个平面，也不能用一个三维空间中的几何图形表示了。可利用两张复平面：z 平面及 w 平面间的点集间的对应关系，我们称之为映射或变换。

3. 复变函数的极限与连续

(1) 定义：设函数 $w = f(z)$ 在 z_0 点的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内有定义，若任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0 (0 < \delta \leqslant \rho)$，当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，有 $|f(z) - A| < \varepsilon$ 成立。则称常数 A 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记为：

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

若 $f(z)$ 在 z_0 点有定义，且 $f(z_0) = A$，则称 $f(z)$ 在点 z_0 连续。若 $f(z)$ 在区域 G 内每一点都连续，我们称 $f(z)$ 在 G 内连续。

(2) 设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，$A = u_0 + \mathrm{i}v_0$，$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$
那么

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0 \end{cases} \tag{1.21}$$

由此可见，复变函数极限的定义虽在形式上与一元实函数的极限定义相似，但实质上却相当于二元实函数的极限。这导致了第二章用极限定义的复变函数的导数的概念，较之一元实函数的导数概念，其要求要苛刻得多。

(3) 如果 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$，$\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$，那么

$$\begin{aligned} &\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B \\ &\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = AB \\ &\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0) \end{aligned} \tag{1.22}$$

(4) 由定义及(1.21)易得连续的充要条件：

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u(x_0,y_0) \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v(x_0,y_0) \end{cases} \tag{1.23}$$

两个连续函数 $h = g(z)$，$w = f(h)$ 复合所得的函数 $w = f[g(z)]$ 仍是连续函数。

二 典型题真题精解

【例 1】将下列复数表示成 $x+\mathrm{i}y$ 的形式。

(1) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^7$；　(2) $\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$

解　(1) 因为 $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$

$$=\frac{(1-\mathrm{i})^2}{2}=-\mathrm{i}$$

所以
$$\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^7=(-\mathrm{i})^7=-\mathrm{i}$$

(2) $\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}^2+(1-\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}=\dfrac{-1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

$$=\frac{(-1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}$$

【例 2】　把复数 $z=1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha,0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ 化为三角表示式与指数表示式，并求 z 的幅角的主值。

解　利用公式(1.11)～(1.13)

解法一

$$r=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=2\sin\frac{\alpha}{2}$$

因为当 $0<\alpha<\pi$ 时，$\sin\alpha>0$，$1-\cos\alpha>0$，据公式(1.11)有

$$\arg z=\arctan\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\arctan\left(\operatorname{ctan}\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\arctan\left(\tan\frac{\pi-\alpha}{2}\right)=\frac{\pi-\alpha}{2}\qquad\text{幅角的主值}$$

所以
$$1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)\qquad\text{三角表示式}$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi-\alpha}{2}}\qquad\text{指数表示式}$$

即
$$1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi-\alpha}{2}}$$

上式对于 $\alpha=0$ 及 $\alpha=\pi$ 时也成立。

解法二　利用三角公式，不难看出：