

大學叢書

實用微積分

棟同生 著
本會龍 編
薩鄭楊

商務印書館發行

◆(53724·4)

叢大
書學
實用微積分

編著者

鄭曾棟
薩本棟
楊龍生

發行者

商務印書館
上海河南中路二一號

印刷者

商務印書館

發行所

商務印書館
上海及各地

★版權所有★

1948年9月初版
1950年11月4版
基價24元

廣

序

編微積分學者大都分之爲微分學及積分學兩部；如是分授，讀者必須將微分學之基礎觀念及一般應用全行學習完畢，方及積分之淺顯部分。惟微分與積分原爲同一問題之正反兩面，其算式實可同時學習，勿庸等待將微分之應用全行學習完畢之後再論積分。常見初學者因微分之應用太廣，而其計算技術與公式復繁，以致於學完微分學後即忘卻基本觀念。爲矯正此弊起見，本書先討論較簡單之代數函數之微分與積分，及其尋常應用如極大極小與面積等，以使讀者之注意力得集中於基本觀念，而不爲繁雜之超越函數之微分公式所分散。至於偏微分與級數等問題，則留於讀者對於微積分已有相當之運用能力後方爲述及。此爲本書編輯次序與他書不同之一點。

近年來高中學生之數學訓練頗差，以致初入大學之學生對於三角及對數之算法往往不甚明瞭，本書在未討論三角函數及指數與對數函數之微積分之前，對此等函數之基本問題亦略加申述，以便學生之複習。用本書爲教本者，對於此等段節可酌量學生程度以定去取。說明弧度及自然對數之底數 e 之時，特別利用過原點各有關曲線之斜度爲 1 一事，以說明弧度與 e 之定義，其用意實同爲採用適當單位以謀公式之簡單化而已。

純粹數學家多少希望其學生能了解數學證明之必須嚴格，且能欣賞嚴格證明；但在初等教本中，各證明應嚴格到何等程度，以及初學微積分之學生對於嚴格證明能否欣賞各事，均係教學上可以辯論之問題。世有認教授初等數學之目標，在於顯示其實用之力量(vigor)而不應苛求證述之嚴格(rigor)者，亦非毫無見地。本書以實用兩字冠書名，原以討論之方法及問題偏於實用，但遇證明不嚴格之處亦時常指出，以使讀者多得思考之材料。此種折衷辦法或亦為純粹數學家所能諒解歟？

國立廈門大學於抗戰後內遷長汀，時感課本缺乏。本書之編輯，原以應是校一二年學生初習微積分之需要。初稿僅印三百份，使用三年，業已告罄，而校外索購者復繁有徒，故為訂正付梓。若能有助於其他大學之教者與學者，則大幸焉！

編者 卅一年四月於長汀廈大

新 版 附 言

本書曾於三十三年由青年圖書出版社再版。時仍在抗戰期中，插圖製版不易，故所有附圖均用石印列於每章之後。勝利後經國立編譯館審定為大學教本，並由商務印書館承印發行，插圖遂得附於有關節次以便參較；前此誤字亦均悉心校正，惟數學書籍非經課室中多次使用絕難完全無誤字，尚望用者隨時賜教，俾成完璧。

三十七年六月，編者於中央研究院。

實用微積分

目次

第一章	變數, 極限, 函數	1
第二章	代數函數之記數	23
第三章	幾何學上之應用	47
第四章	事理上之極大與極小及變化率	67
第五章	微分	86
第六章	不定積分	101
第七章	定積分	119
第八章	三角函數	136
第九章	指數函數及對數函數	178
第十章	極坐標與參變方程	202
第十一章	曲線弧及曲率	222
第十二章	積分方法	239
第十三章	體積面積及質量	276
第十四章	力學上之應用	296
第十五章	均值定理與不定式	330
第十六章	級數	348

第十七章	立體解析幾何·····	377
第十八章	偏微分及其應用·····	397
第十九章	重積分·····	429
第二十章	近似的及機械的積分法·····	458
英漢名詞對照表及索引·····		471

實用微積分

第一章 變數,極限,函數

1-1. 實數 在日常生活中,吾人常論及各事物之數量的關係,例如購買物品時計較其輕重,長短及價值;入學時考慮學費之數目,上課時數與學分數之多寡等等。人類智慧愈高,文明程度愈進,則所用之數(number)其範圍亦愈廣。在啓蒙時代,人們僅知用正整數。由減法之應用,乃有零及負整數;由除法復有分數。正負整數,分數及零,遂名為有理數(rational number)。是後,因有時所用之數量不能以整數互相加減乘除而得之(例如討論邊長為一單位之正方形之對角線,或直徑為一單位之圓周時),乃有無理數(irrational number)之概念。簡言之,凡非有理數之實數(real number)均名為無理數。嚴格言之,無理數不能化為整數或分數;但在多數實用問題中,因量測之時,其準確程度均為有限,故遇無理數時,吾人亦常用其近似(approximate)之有理數以作計算;例如圓周長與直徑之比,其數名為 π ,在需要五位之準確值時,吾人可逕寫 3.1416 (此值可視為 31416 與 10000 兩整數之商),或如僅需要三位可靠之值,則以 $\frac{22}{7}$ 代 π 亦無不可。

無理數一名實不甚妥,因其在實用日常問題中極為常見,絕非無

理。今若推廣算術中開方一概念，又可得一種數，驟視之似更無理，然又非前此所述之無理數。此等數係由求負數之平方根而起，例如 $\sqrt{-1}$ ， $\sqrt{-2}$ ， $\sqrt{-9}$ 等等。因所有實數之平方不能為負（即不能小於零），故此等數常名為純虛數（pure imaginary）或簡稱虛數（imaginary）。虛數較諸實數，其理論自為更難。本書所討論者將以實數為限。至若遇及無理數時，常將利用其近似之有理數，以避免嚴格的討論之困難。

討論實數各問題時，常用絕對值（absolute value）一詞，其意係不計該數之符號，只計其數量。例如 -3 及 3 之絕對值均為 3 。表示絕對值時，常用兩直線左右夾之，例如 $|-3|$ 。

1-2. 變數 討論一問題時，不善於引用數學方法者，多願以語文表示之。其實，數學即為語文之一，在善於運用者手中，其便利且非任何其他語文所能望及。以數學方法討論一問題時，其中各數常用記號或字母代表之（阿刺伯數碼即為一種較普遍之記號而已）。在問題中，有些數，其值於某範圍內可任意變化，亦有些數，其值係固定不變。茲名前者為變數（variable），後者為常數（constant）。例如有固定之款項共 a 元，今以之購買物品。若物品之單價為 x 元，而所購之數量為 y ，則有下列關係：

$$a = xy \quad (1)$$

在此中 a 為常數， x 及 y 則均為變數，因物之單價及所能購得之數量均將隨時隨地改變也。表示變數之記號常為羅馬字之末後數字母，如 $x, X, y, Y, z, Z, t, T, v, V$ 等；表示常數之記號則常用羅馬字之前數個字母，如 a, A, b, B, c, C 等。多數人雖係如是取用各字母，但因

羅馬字母爲數不多, 且問題性質絕非固定, 故此處所說之用法只可作爲參考。至於某字母所代表者果爲變數, 抑爲常數, 均應由題意決定之, 不應受此處之說明所限制。

變數之值可認爲係循一定之法則而變化。例如方程(1)中之 x 可依序爲 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$, 亦可經歷 A 與 B 間所有之數(有理數及無理數)而由 A 增至 B 或由 B 減至 A 。在所述情形下, 其變化爲間斷的(discontinuous), 在後述情形下則稱 x 連續(continuous)變於 A 至 B 間隔(interval)內。

1-3. 極限 設令變數 x 依一定法則變更其值; 若在 x 之變化過程中, x 取 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ 各值, 而自某值始, 如 x_n , 其後各 x 與 c 相差之絕對值(即 $|x-c|$)係比任意指定之甚小正數之值均較小, 則稱 c 爲 x 之極限(limit), 或 x 趨於極限 c , 其記號爲:

$$\lim x = c \text{ 或 } x \rightarrow c \quad (2)$$

例 1. x 依 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$, 法則而變, 則其極限爲 1, 因 $|x-1|$ 依次序將爲 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$, 其最後之值可小於任何正數也。

例 2. x 依 $\frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}$ 法則而變, 則其極限爲 0。

例 3. 設 x 之變更法則爲 $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \dots$ 其極限亦係 1。

例 4. 設 x 之變化法則爲 $2, \frac{2^2}{2}, \frac{2^3}{3}, \frac{2^4}{4}, \dots$ 則其值將無限增大, 而不達一極限。

例 5. 設 x 遵 $(\frac{1}{2}), (1+\frac{2}{3}), (\frac{3}{4}), (1+\frac{4}{5}), (\frac{5}{6}) \dots\dots$ 而變化,

則 x 無極限, 因有時 x 係與 1 接近, 而有時則與 2 接近也。

自第三例觀之, 變數變化之法則, 可不必係恆增或恆減, 其極限仍可為確定之值。又變數之變化可為間斷的如本節各例, 亦可遵甚繁複之連續的法則。

1-4. 無窮小 極限一觀念在微積分中極為重要。設只藉方程(2)以作應用, 有時殊感不便, 因吾人雖知如何運用加減乘除各基本算法, 而此等算法遇及極限記號 $\lim$ 時應如何引用方不至誤, 實須另行推證。茲為便於計算起見, 另用無窮小一觀念。凡極限為零之變數名為無窮小 (infinitesimal)。在此定義中, 讀者須注意無窮小係一變數, 其極限為 0, 並非甚小之常數, 如兆分之一或 0 本身。例如當 x 變化時其值依次為 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots\dots$, 則 x 為一無窮小; 反之, 若 $x-c$ 為無窮小, 則 x 之極限必為 c 。表示無窮小有時用 h 或 k 字。

引用無窮小, 方程(2)可改寫作

$$x-c=h \quad (3)$$

在此中已無 $\lim$ 一記號, 其運用自較易, 惟吾人仍須記得 h 係一無窮小, 即極限為 0 之變數也。

無窮小之基本定理有四。此等定理之意義甚為明顯, 其證明須用及絕對值三個重要公式, 即 $|a \pm b| \leq |a| + |b|$, $|ab| = |a| |b|$ 及 $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ 。茲先述各定理如下:

(A) 兩無窮小 h 及 k 之和或差 (即 $h \pm k$) 仍為無窮小; 但如 h 與 k

恆等, 則其差爲零而非無窮小!

(B) 一異於 0 之常數 c 與無窮小 h 之積仍爲無窮小。

(C) 兩無窮小之積仍爲無窮小。

(D) 設 h 爲無窮小, u 爲另一變數, 其極限爲異於 0 之常數 a (即 u 非無窮小), 則 $\frac{h}{u}$ 仍爲無窮小。

欲證某變數係無窮小, 只須證明其絕對值可較任何小正數爲更小。故如 $|h \pm k|$ 可小於任何小正數 m , 則 $|h \pm k|$ 即爲無窮小。今知 $|h \pm k|$ 不能較 $|h| + |k|$ 爲更大, 即

$$|h \pm k| \leq |h| + |k|$$

故欲 $|h \pm k|$ 小於某正值 m , 只須 $|h|$ 及 $|k|$ 各小於 $\frac{m}{2}$ 即可。惟 h 及 k 均爲無窮小, 其絕對值可小於任何正數 $\frac{m}{2}$, 是以 $|h \pm k|$ 亦可小於任何正數而爲無窮小。

欲證 ch 爲無窮小時, 可將 $|ch|$ 寫作 $|c| |h|$ 。設已與之小正數爲 m , 則只須 $|h|$ 較 $\frac{m}{|c|}$ 爲小, 即可使 $|ch|$ 較 m 爲小。

欲證 hk 係無窮小時, 可引用 $|hk| = |h| |k|$ 。如是欲 $|hk|$ 較任何小正數 m 爲小, 只須 $|h|$ 及 $|k|$ 各較 $\sqrt{m}$ 爲小即可。

證第四定理時令 c 爲一小於 $|a|$ 之正數。 u 既以 a 爲極限, 故最後必變至與 a 無限接近, 因此 $|u| > c$ 。今 $\left| \frac{h}{u} \right| = \frac{|h|}{|u|}$, 故 $\left| \frac{h}{u} \right| < \frac{|h|}{c}$ 。是以若已與之小正數爲 m , 則只須 $|h| < cm$ 即可令 $\left| \frac{h}{u} \right| < m$ 矣。

1-5. 關於極限之定理 自上述之無窮小四定理即可推得下列有

關於極限之各定理：

(A) 兩變數之和或差之極限，等於其極限之和或差，即

$$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y.$$

(B) 兩變數之積之極限等於其極限之積，即

$$\lim(xy) = (\lim x)(\lim y).$$

(C) 若分母之極限異於零，則兩變數之商之極限，等於其極限之商，即如 $\lim y \neq 0$,

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

推證上列各定理之方法均係先利用方程 (3) 而照尋常之演算法進行。茲因 (C) 定理之證較難，特逐步推演之如下，至於 (A) 與 (B) 兩定理，可由讀者自證之。

令 $\lim x = a$, $\lim y = b \neq 0$ 。吾人所欲證者為 $\lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ ，或按方程 (3)，吾人只須證

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = m$$

係一無窮小。 x 與 y 之極限既分別為 a 與 b ，故按方程 (3)，令 h 與 k 為兩無窮小，則可寫 $x = a + h$, $y = b + k$ 。故

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+h}{b+k} - \frac{a}{b} = \frac{bh - ak}{b(b+k)}.$$

今 a 與 b 均為常數，而 $b \neq 0$ ，故按 (1-4) 節 (A) 與 (B) 兩定理，分子 $bh - ak$ 仍為無窮小，又按同節 (D) 定理，最後分數實為無窮小，因分母 $b(b+k)$ 之極限為異於 0 之常數 b^2 也。

推廣上列各定理，即可得下列各系：

[系 1] 若 c 爲一常數, 則

$$\lim(x+c) = (\lim x) + c$$

$$\lim(cx) = c \lim x;$$

$$\lim \frac{c}{x} = \frac{c}{\lim x} \quad (\text{但 } \lim x \neq 0).$$

[系 2] 設若干變數 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 之極限分別爲 $a_1, a_2, a_3, \dots$,

則

$$\begin{aligned} \lim(x_1 \pm x_2 \pm x_3 \dots) &= \lim x_1 \pm \lim x_2 \pm \lim x_3 \pm \dots \\ &= a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots; \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \lim(x_1 x_2 x_3 \dots) &= (\lim x_1)(\lim x_2)(\lim x_3) \dots \\ &= a_1 a_2 a_3 \dots. \end{aligned}$$

[系 3] 若 n 表一正整數, 而 $\lim x = a$,

則

$$\lim(x^n) = (\lim x)^n = a^n.$$

1-6. 函數 各問題中常遇二個或較多之變數互有關係。如是當某變數或若干變數之值確定之後, 另一變數之值亦因之而確定。今名後一變數爲前者之函數 (function)。例如 x 及 y 爲二變數, 今若在某一定範圍內指定 x 之值後, y 皆有一確定之值與之相應, 則在此範圍內 y 爲 x 之函數。據此以言, 則於方程 (1) 中 y 爲 x 之函數, x 亦可視爲 y 之函數。他例如

$$(A) \quad y = x^2 \text{ 或 } y - 2x^2 - x + 1 = 0,$$

$$(B) \quad y = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ 或 } y = \sin^{-1} x,$$

$$(C) \quad u = \frac{x^2}{x+y}, u = \frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ 或 } u - \tan^{-1} \frac{y}{x} = 0,$$

$$(D) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

皆是。在(A)中， y 顯然為 x 之函數；在(B)中，於適當範圍內， y 亦為 x 之函數（試言此範圍！）。在(C)中， u 為 x 及 y 兩變數之函數，而在(D)中則 r 為 x, y, z 三變數之函數矣。（本書所討論者，除最後數章或有特別聲明者外，均為一個變數之函數。）

在一函數關係中，可由吾人任意給與價值之變數常名為自變數 (independent variable)；隨自變數之值而變之變數則名為應變數 (dependent variable)。某變數之函數，均可視作應變數。由此言之，某問題中之各變數何者係自變數，何者為應變數，實無嚴格之分界，多少均隨計算者之觀點而定。

1-7. 函數之表顯法 為便利起見，上節所舉各函數之例均用方程表之。其實各種函數未必均能用方程表之。例如變數 x 之最大整數（所謂某數 a 之最大整數，即指不超過 a 之整數中之最大者，例如2.3之最大整數為2，-5之最大整數為-5）顯為變數 x 之函數，然甚難以一方程表之。有時在某範圍內，須用幾個方程方能表示一函數；例如有一函數 y ，在 $x=-1$ 與 $x=0$ 之間（-1在內，0除外），其與 x 之關係可以

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad (-1 \leq x < 0)$$

表之；惟當 $x=0$ 時，此函數等於0，即

$$y=0, \quad (x=0)$$

且當 x 為正惟較2為小時，此函數則由

$$y = \log_{10}(2-x), \quad (0 < x < 2)$$

定之,如是,此三方程亦可確定 y 爲 x 於 -1 至 2 間隔內之函數。

能用方程表顯之函數,其討論法多可取所謂解析(analytic)方法。至若不能用方程表顯之函數,有時常用圖解(graphic)方式,或逕將各變數與其函數相應各值列爲一表以資參考。在純粹數學家眼中,後兩式實不及前者雅緻,然在實用方面,後二式常反較重要,此實因解析方法有時甚難使用也。

圖解方法,其準確程度常爲繪圖者之技術所限制,然能將全題之關係活躍的表於一有限之圖紙上,使人一目了然,係其優點。至如圖解之外,復佐以準確之表,則其應用將爲更廣。惟圖表所佔之篇幅終比一方程或數方程所佔者較大,是其弱點耳。

1-8. 直角坐標圖示法 常見之圖示法係用直角坐標(rectangular co-ordinates)。令 y 表 a 至 b 間隔內之函數。在紙上取兩正交直線如 OX 及 OY 爲坐標軸線。以適當之距離爲單位;在所規定之間隔內,於 OX 軸上自 O 點量起,劃出 x 單位之長度以作 x 之某任意值(正值自 O 向右量,負值則自 O 向左量),如圖(1-1)中之 x 點。在此點豎立一平行於 OY (即正交於 OX)之直線。於其上用同大小之單位求得 P 點,使 xP 之距離等於 y 單位之長度(正值向上量,負值向下量)。自前此函數定義言之,此等 P 點之分佈,實無限

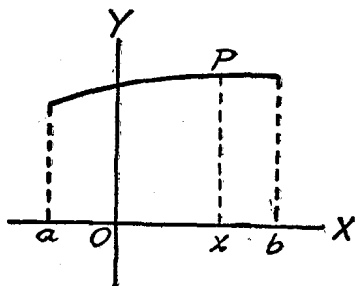


圖 1-1

制,惟若函數係單值的(見後 1-14 節),則在規定間隔內,每條與 OY

平行之 x 直線上只能有一個 F 點。由是求得之各 P 點所密佈之曲線即為表 y 為 x 之函數之圖線。微積分學中所討論之函數除為無限大 (1-11 節)，或有間斷 (1-12 節) 者外，其圖線多可以一連續曲線表之，如圖 (1-1)。茲舉兩例如次：

例 1. 試畫出曲線之圖：

$$y = x^2 + 2x - 1.$$

此圖為一拋物線，頂點位於 $(-1, -2)$ ，如圖 (1-2) 所示。

例 2. 試畫出表示一變數之最大整數之圖。

此函數之形狀有如圖 (1-3) 所示。在圖 (1-3) 中，小圈係用以表示不屬於圖線之點，此蓋因在本題中，某整數之最大整數即為 x 而不等於 $x-1$ 故也。例如 $x=2$ 時，函數之值亦為 2，而不等於 1，故 ab 線上 b 端之點不屬於本圖線而用小圈以圈去之。

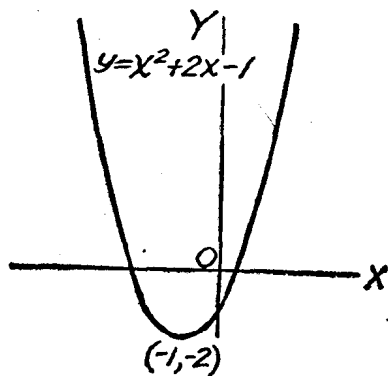


圖 1-2

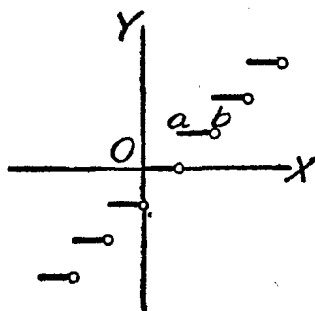


圖 1-3

1-9. 函數之普通記號及其運用 設吾人所討論之函數，其形式不受何種特別拘束，通常多用

$$f(x), \phi(x), F(x)$$

等等記號表之。此等記號之意義乃以示 x 之各種函數, 切不可視為 f 乘 x , 或 ϕ 乘 x , 或 F 乘 x 。在有些問題中, 自變數 x 可勿須寫出, 而表示其函數時, 將之略去不寫亦無不可, 例如 f, ϕ, F 等。

設 $f(x), \phi(x), F(x)$ ……係指某特別形式之函數, 吾人常可將之列作方程, 例如

$$f(x) = x^2 + 2x - 1,$$

$$F(x) = 4x,$$

$$\phi(x) = \log_{10} x,$$

等等。若照此規定, 則 $f(3), F(3)$ 及 $\phi(3)$ 之值, 係指以 3 代方程右方 x 後所計得之各值, 即

$$f(3) = 3^2 + 2 \times 3 - 1 = 14; \quad f(a) = a^2 + 2a - 1;$$

$$F(3) = 3 \times 4 = 12; \quad F(a+b) = 4(a+b);$$

$$\phi(3) = \log_{10} 3 = 0.477; \quad \phi(ab) = \log_{10}(ab);$$

又 $F[f(x)] = 4[f(x)] = 4x^2 + 8x - 4,$

而 $F[f(3)] = F(3^2 + 2 \times 3 - 1) = F(14) = 4 \times 14 = 56.$

1-10. 函數之極限 設當 x 可由任何情形趨於 c 時 (但其所取之值均不等於 c), 其函數 $F(x)$ 亦趨於一極限 A , 則此極限常以

$$\lim_{x \rightarrow c} F(x) = A$$

表之。例如 $F(x) = x + 1$, 則 $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 2$ 。有時 x 僅可由較大於 c 或較

小於 c 之數趨近 c , 則其記號常分別寫為