查理斯密

小代數學

陳文譯

商務印書館

改　訂

查理斯密

小代數學

陳文譯

商務印書館

Charles Smith

Elementary Algebra

查 理 斯 密

小 代 數 學

陳 文 譯

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 印 刷 廠 印 刷

上海天通菴路一九〇號

㊅(59250)

1905年3月初版 1955年4月20版

印數81,501—86,000 定價一元六角七分

本書備用公式

(加　法)

$a+(+b)=a+b$

$a+(-b)=a-b$

(減　法)

$a-(+b)=a-b$

$a-(-b)=a+b$

(乘法及除法之符號定則)

同號二數之積或商為正，異號二數之積或商為負。

(乘法及除法之定理)

$ab=ba$

$a\div b\div c=a\div c\div b$

$a\times b\div c=a\div c\times b$

$a\times b\times c=a\times(bc)$

$a\div b\div c=a\div(bc)$

$(a+b)c=ac+bc$

$(a+b)\div d=a\div d+b\div d$

(緊要公式)

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$x^3\pm a^3=(x\pm a)(x^2\mp ax+a^2)$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$，$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$，$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots\cdots+a^{n-1}$，$\frac{x^n\pm a^n}{x+a}=x^{n-1}-x^{n-2}a+x^{n-3}a^2-\cdots\cdots\pm a^{n-1}$.

(最高公因數與最低公倍數之關係)

A=Ha，B=Hb，則 L=H.a.b.

L×H=A×B

(二次方程式)

二次之普通方程式為

$ax^2+bx+c=0$

此普通方程式之根為

$-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}$

$b^2-4ac=0$ 則此普通方程式之二根相等

$b^2-4ac=0$ 則 ax^2+bx+c 為關於 x 之完全平方

b^2-4ac 非完全之平方，則此普通方程式之二根為根數。

此普通方程式之二根為 α，β 則

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

(指　數)

$a^m\times a^n=a^{m+n}$

$a^m\div a^n=a^{m-n}$

$(a^m)^n=a^{mn}$

$(a^xb^yc^z\cdots\cdots)^m=a^{xm}b^{ym}c^{zm}\cdots\cdots$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(a^m)}=(\sqrt[n]{a})^m$

$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$

$a^0=1$

（比 例）

$a:b=c:d$ 則

$ad=bc$

又反之 $ad=bc$ 則

$a:b=c:d$

而 $a:b=c:d$

$a:c=b:d$

$b:a=d:c$

$b:d=a:c$

其一比例合理則他比例

都能合理

$a:b=c:d$ 則

$a+b:a-b$

$=c+d:c-d$

$a:b=b:c$ 則

$b^2=ac$

（級 數）

等差 $\begin{cases} l=a+(n-1)d \\ S=\frac{n}{2}(a+l) \end{cases}$

等比 $\begin{cases} l=ar^{n-1} \\ S=(a-rl)/(1-r) \end{cases}$

故 a,l,n,d（或 r）

S 五者中知其三者，則他

二者自能求得，故由是所

生之公式，其數爲

$5!/3!=20$

（無窮等比級數之和）

$$S=\frac{a}{1-r}$$

等差級數

$a-b:b-c=a:a$

等比級數

$a-b:b-c=a:b$

調和級數

$a-b:b-c=a:c$

等差中項 $A=\frac{a+b}{2}$

等比中項 $G=\sqrt{ab}$

調和中項 $H=\frac{2ab}{a+b}$

$\therefore\ A.H.=G^2$

（排 列）

${}_nP_r=n!/(n-r)!$

${}_nP_n=n!$

$$P=\frac{n!}{p!q!r!\cdots}$$

（組 合）

${}_nC_r=n!/r!(n-r)!$

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$

（二項式定理之公項）

${}_nC_ra^{n-r}b^r$

（多項式定理之公項）

$\frac{n!}{r!s!t!}a^rb^sc^t\cdots\cdots$

但 $r+s+t+\cdots\cdots=n$

（指數式定理）

$a^x=1+x\lambda+\frac{x^2\lambda^2}{2!}$

$+\frac{x^3\lambda^3}{3!}+\cdots\cdots$

但 $a=e^{\lambda}$

$\therefore\ e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}$

$+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$

$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots$

$=2.71828\cdots\cdots$

（對 數）

$log_a(xy)=log_ax+log_ay$

$log_a\frac{x}{y}=log_ax-log_ay$

$log_ax^m=mlog_ax$

$log_bx=log_ax\times log_ba$

（對數級數）

$log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}$

$+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\cdots\cdots$

（複利及年金）

$A=P(1+r)^n$

$P=A(1+r)^{-n}$

年金 $=\frac{A}{r}\{1-(1+r)^{-n}\}$

目　次

第一編

定義

1. 代數學 代數學者論數理之學科也.

算術以數字顯數.故一數字祇有一值.其意義以一種爲限.如1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. 其意義祇爲一,二,三,四,五,六,七,八,九.

代數學以數字及文字顯數.數字之值.與算術同.文字之值.可爲無論如何之數.

代數學所用之文字.爲小羅馬文字.卽

a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z 二十六字母. 然因便利起見.恆書其草體.卽

$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i\ j\ k\ l\ m\ n\ o\ p\ q\ r\ s\ t\ u\ v\ w\ x\ y\ z$

又有時兼用大羅馬文字及小希臘字.

大羅馬文字.如 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

小希臘文字.如 $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta\ \eta\ \theta\ \iota\ \kappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \xi\ o\ \pi\ \rho\ \sigma\ \tau\ \upsilon\ \phi\ \chi\ \psi\ \omega$(此等字之發音.載於附錄).然常用者不過三十餘字.卽

$a,\ b,\ c\cdots\cdots\cdots l,\ m,\ n\cdots\cdots\cdots p,\ q,\ r\cdots\cdots\cdots x,\ y,\ z.$

A, B, C………L, M, N……… P, Q, R………X, Y, Z.

α, β, γ………θ, ι, μ………π, ρ, σ………χ, ψ, ω.

據算術理.凡二數相乘.無論用如何之次第.其結果恆等.然此二數.若以二文字代之.則上所述之性質.其式爲 $a\times b=b\times a$. 理尤易曉.故代數學較算術簡.

代數學之文字.雖爲任意之値.然在一演式中.其所代之數恆等. 如 a 加 a. 無論 a 爲如何之數.其數恆爲 a 之二倍.

2. 符號 代數學所用之符號.與算術所用之符號同.惟有時宜將算術之符號擴張其義者.則臨時說明.茲不先及.

3. 加號 卽 +〔讀爲「不拉式」(plus) 或讀爲加〕置於數字或文字所代之數左.示加此數於左邊之數內.

如 $6+3$, 加號在 3 左.故示將 3 加入左邊之 6 內.約言之.卽加 3 於 6. 又 $6+3+2$,卽以 3 加於 6. 其結果爲 $3+6$, 再以 2 加於 $3+6$. 約言之.卽加 2 於其結果.

同理. $a+b$, 卽以 a 所顯之數.加於 b 所顯之數.約言之.卽加 b 於 a.

4. 減號 卽 −〔讀爲「買那式」(minus) 或讀爲減〕置於某數左.示由左邊之數內減去某數.

如 $6-3$, 示由 6 內減去 3, 同理, $a-b$, 示由 a 內減去 b. 又 $a-b+c$. 示由 a 內減去 b. 更加 c 於其結果.

凡加減之運算.皆始於左而次及於右.

5. 乘號 卽 ×〔讀爲「因都」(into) 或讀爲乘〕置於兩數之間.示以右數乘左數.

如 6×3, 示以 3 乘 6. 同理. $a\times b$, 示以 b 乘 a. 又 $a\times b\times c$,

示以b乘a,更以c乘其結果.

乘法之符號.其在二文字間或數字與文字間者.往往省其號而並記之.又有以點代之者.

如ab或$a\cdot b$.其意義與$a\times b$同.又$2abc$或$2\cdot a\cdot b\cdot c$.其意義與$2\times a\times b\times c$同.

6. 除號　卽÷〔讀爲「稗」(by)或讀被……除〕置於兩數之間.示左數被右數除.

如$6\div 3$,示6被3除.同理.$a\div b$,示a被b除.又$a\div b\times c$,示a被b除.更以c乘其結果.

除法之演算.恆在被除數下畫一橫線.更書除數於其下.以顯之.

如$a\div b$.可代以$\frac{a}{b}$.

乘除之運算.亦始於左而次及於右.

7. 積及因數　諸數相乘.其結果謂之連乘積.或單稱爲積.此諸數謂之積之因數.

如$2abc$爲積.$2, a, b, c$,各爲積之因數.

8. 係數　分積之因數爲二項.其中之一項.各爲他一項之係數.

如$3abx$,3爲abx之係數.又$3x$爲bx之係數.又$3ab$爲x之係數.

又積之因數中之數字.稱爲他諸因數之數字係數.如$3abx$,3乃abx之數字係數.

問題 I.

求以下各式之數值:

1. $7+6+4$. 2. $5-3+4$. 3. $11+7-12-6$.

4. $7\times6\times4$. 5. $5\div3\times4$. 6 $11\times7\div12\div6$.

設 $a=1, b=2, c=3, d=4$. 求次之各式之數值.

7. $c-b$. 8. $d-a$.

9. $7a-3b$. 10. $10b-6c$.

11. $5a-2b+6c-4d$. 12. $13a-6b+7c-5d$.

13. $18b-3c-4d+9a$. 14. $20ab-3cd$.

15. $4da-2bc$. 16. $abc+bcd+cda+dab$.

設 $a=6, b=2, c=5, d=0$. 求以下各式之數值.

17. $3ac+2bc+ca$. 18. $7ad+9bc-3ca$.

19. $a\times c\div b$. 20. $a\div c\times b$.

21. $2c\div a\div b$. 22. $ad\div bc$.

23. 有 $3x, 4bx, 5bcx, 16abcx$. 問 x 之係數如何.

24. 有 $4xy, 5axy, 7abxy, 19abcxy$. 問 xy 之係數如何.又數字係數如何.

9. 乘方 凡積由一因數幾次自乘而成者.不拘其次數如何.均謂之此數之乘方.或單謂之方.

如 aa 爲 a 之2乘方.aaa 爲 a 之3乘方.$aaaa$ 爲 a 之4乘方.餘倣此.

又 aa 及 aaa 附以特名.卽 aa 爲 a 之平方.aaa 爲 a 之立方.

10. 指數 aa, aaa 等.更有簡略之記法如次.卽 aa 記爲 a^2, aaa 記爲 a^3, $aaaa$ 記爲 a^4, $aaaa\cdots\cdots$ 記爲 a (但 $aaaa\cdots\cdots$ 爲因數 a 自乘 n 次之乘方). a 之右肩上所記之小數字或小文字.卽示 a 之自乘之次數.

如 $aaabb$ 記爲 a^3b^2. 他準此.

小數字及小文字.乃指出因數次數之記號.故謂之指數.

如a^n乃指出因數a自乘n次（即a之n乘方）.故n為指數.

因數a為1次者.不必記為a^1.但記為a.

11. 方根　某數之平方等於a.則某數謂之a之平方根.用記號$\sqrt[2]{a}$記之.然$\sqrt[2]{a}$常略為$\sqrt{a}$而^{2}字從省.

如2之平方等於4.故2為$\sqrt{4}$.

某數之立方等於a.則某數謂之a之立方根.用記號$\sqrt[3]{a}$記之.

如$3=\sqrt[3]{27}$因$3^3=27$故.

括而言之.某數之n方（但n為任意之整數）等於任意之數a.則某數謂之a之n乘根.用$\sqrt[n]{a}$顯之.

符號$\sqrt{\ }$原由臘丁文Radix之首字r變化而成故謂之根號.

不能詳求之根.謂之根數.或謂之無理數.

如$\sqrt{7}$及$\sqrt[3]{4}$.即根數.或無理數.

如根數$\sqrt{7}$.依算術求平方之法.雖能求其略近值.然在代數學內.則無庸求其略近值.何則.因以$\sqrt{7}$自乘即為7故也.

12. 等號及不等號　符號＝〔讀為「伊苛勒」(equal)或讀為等於〕置於兩數之間.示兩數相等.

如$5+7=12$,即5加7等於12.

符號＞置於兩數之間.示左數較右數大.

如$a>b$即a較b大.

符號＜置於兩數之間.示左數較右數小.

如 $a<b$ 卽 a 較 b 小.

又符號 ∵ 爲何則或因字之略號.

符號 ∴ 爲故字或所以之略號.

13. 代數式及項 以代數記號（卽文字,數字及符號）集合者謂之代數式.或單謂之式.

代數式中以 + 或 − 連結之各部分,謂之項.

如 $2a-3bx+5cy^2$ 爲 $2a, -3bx,$ 及 $5cy^2$ 三項結合之代數式.

14. 同類項 兩項中所含之文字彼此相同,且各文字之乘方相等.此二項謂之同類項.

如 $3ab^2x^3$ 與 $5ab^2x^3$ 爲同類項.

又 $2a^2bx^3$ 與 $7a^2b^2x^3$,其二項中所含之文字.雖彼此相同.然非同類項.何則.因二項中各文字之乘方.彼此不相同故也.

15. 單項式及多項式 僅含一項之式.謂之單項式.含二項以上之式.謂之多項式.

如 $5ab^3cx$ 爲單項式. $a+b$ 爲多項式.

由二項成之式.每謂之二項式.由三項成之式.每謂之三項式.

單項式及多項式.有時稱爲單式及複式.

16. 括弧 取一代數式爲一項則以括弧括之.而演算時.須先計括弧內諸項.然後計括弧外諸項.

括弧有 ( ), { }, [ ] 三種.

如 $(a+b)c$ 爲加 b 於 a, 更以 c 乘其結果.又 $(a+b)^3$ 爲加 b 於 a. 而作其結果之立方.

又 $(a+2b)(c+3d)$ 爲加 $2b$ 於 a, 並加 $3d$ 於 c, 而以第二

之結果.乘第一之結果.

有時在所括之數上.畫一線以代括弧.此線名爲括線.

如 $a+\overline{b-c}$ 與 $a+(b-c)$ 同.又 $\sqrt{a+b}$ 與 $\surd(a+b)$ 同.若無括弧及括線.則根號單屬於緊接其號之第一數.

如 $\surd 2a$ 爲 a, 乘 2 之平方根而 $\sqrt{2a}$ 則爲 $2a$ 之平方根.

又 $\surd a+x$ 爲加 x 於 a 之平方根.而 $\sqrt{a+x}$ 則爲 a 與 x 之和之平方根.

分數中在分子與分母間之線.其用與括線同何則.因 $\frac{a+b}{12}$ 與 $\frac{1}{12}(a+b)$ 同故.

〔注意〕一代數式之各項.與在一括弧內之各項同.故以全體相加減.爲學者所當注意.

如 $a+bc-d\div e+f$ 式.在加法前當先以 c 乘 b. 在減法前,當先以 e 除 d. 故此式恰如 $a+(bc)=(d\div e)+f$

設 $a=4, b=3, c=1, d=0$, 求次之四式之數值.

(1) $2a-bc+cd-6b\div a+\frac{2c}{a}$, (2) $(a+b)^3(2b-3c)^2$,

(3) $a^b+b^c+c^a$, (4) $\sqrt[3]{\{7a^3+(b+c)^3+d^3\}}$.

此演算如次.

$$(1)\quad 2a-bc+cd-6b\div a+\frac{2c}{a}$$

$$=2\times4-3\times1+1\times0-6\times3\div4+\frac{2\times1}{4}$$

$$=8-3+0-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

$$(2)\quad (a+b)^3(2b-3c)^2=(4+3)^3(2\times3-3\times1)^2=7^3\times3^2$$

$$=343\times9=3087.$$

(3) $a^b+b^c+c^a=4^3+3^1+1^4=64+3+1=68.$

(4) $\sqrt[3]{\{7a^3+(b+c)^3+d^3\}}=\sqrt[3]{\{7\times4^3+4^3+0^3\}}$

$=\sqrt[3]{\{7\times64+64+0\}}=\sqrt[3]{(448+64)}$

$=\sqrt[3]{512}=8$

問題 II.

1. 書 2^4, 3^3, 4^3, 4^4, $\sqrt{64}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[4]{625}$, $\sqrt[5]{32}$ 之數值.

若 $a=2, b=3, c=4, d=5$. 求次之六式之數量.

2. a^2+b^2.　**3.** c^2+d^2.　**4.** $6a^2-2b^2$.

5. $4b^2-c^2+5d^2$.　**6.** $a^2b^2+c^2d^2$.　**7.** $ab^2c^2-a^2bc$.

若 $a=2, b=3, c=4, d=5$. 求次之五式之數值.

8. $\frac{d^3}{5}-\frac{c^3}{3}+\frac{a^2b^2}{27}$.　**9.** $\frac{1}{9}bc+\frac{1}{8}ca+\frac{1}{7}ab$.

10. $10c^3d^3-16a^2b^2$.　**11.** $\frac{1}{3}a^2b^2c^3-\frac{1}{9}ab^2c^2d$.

12. $\frac{ab^3c^4}{16}-\frac{a^4bc^2d}{20}$.

若 $a=5, b=3, c=1, d=0$. 求次之五式之數值.

13. $(2a+5b)(3b-6c)$.　**14.** $(a+2b)(c+2d)$.

15. $(3a-4b)^3-2(3b-6c)^2+2(ad+bc)^2$.

16. $4a^3+4b^3+4c^3-3(b+c)(c+a)(a+b)$.

17. $5(a+c)^3(b-c)^2-\frac{1}{25}(a-2d)^3(b+3c)^2$.

18. 若 $x=2$ 又 $x=3$. 證 x^2-5x+6 等於零.

19. 若 $x=2$ 又 $x=3$ 又 $x=\frac{1}{2}$. 證 $2x^3-11x^2+17x-6$ 等於 0.

若 $a=5, b=4, c=\frac{1}{2}$. 求次之七式之數值.

20. $\sqrt{a^2-b^2}$.　　**21.** $\sqrt{5a}$.

22. $\sqrt{2bc+3a}$.　　**23.** $\sqrt[3]{bc+a^2}$.

24. $\sqrt[3]{(2a^2+b^2-8c^2)}$.　　**25.** $\sqrt[3]{\left(4a^2-\frac{1}{2}b^3+\frac{1}{2}c^2-1\right)}$.

26. $\sqrt{(a+b)}\sqrt[3]{(3ab+2bc)}$.

27. 若 $x=5, y=8, a=6, b=4$.

求 $(a+b)^2(x+y)^2-4(ax+by)(bx+ay)$ 之數值.

28. 若 $a=9, b=12, c=15, s=18$. 問次式之數值幾何.

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

29. 若 $a=9, b=12, c=15$. 及 $2s=a+b+c$.

求 $\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$ 之數值.

30. 若 $a=8, b=5, c=3$. 問次式之數值幾何.

$$\sqrt{\{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4\}}.$$

31. (1) $a=6, b=3$, (2) $a=9, b=4$, (3) $a=12, b=7$.

證 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

32. (1) $a=3, b=2$, (2) $a=6, b=3$, (3) $a=5, b=2$.

證 a^3-b^3, $(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $(a-b)^3+3ab(a-b)$, 及 $(a+b)^3-3ab(a+b)-2b^3$ 皆互相等.

第二編

正量及負量

17. 名數量 無論如何之量.皆以同類單位之倍數計算.其計算時.恆有種種區別.如計算金額有收入,支出.又有利益,損失.如計算運動.一直線上.有相反對之二向.又如計算時刻.有過去未來.又有特別之時前或時後.諸如此類.不遑枚舉.故凡量必有相反對之二種類.

18. 數之性質 凡名數量.無論爲如何種類.+4,俱顯其量增四單位.又 −4,俱顯其量減四單位.

如計算人之財產.則 +4,爲其財產增四圓.卽顯其人之所有金四圓,或貸金四圓.又 −4,爲其財產減四圓.卽顯其人之負債金四圓.反之.如計算人之負債.則 +4,爲增其負債.卽顯其人之借債金四圓.又 −4,爲減其負債.卽顯其人之所有金四圓.或貸金四圓.

又計算人之利益.則 +4,爲增其全利益.卽顯四單位之利益.又 −4,爲減其全利益.卽顯四單位之損失.反之.計算人之損失.則 +4,顯四單位之損失.又 −4,顯四單位之利益.

又由特別之點測方向之距離.則 +4,爲顯正方向四單位之距離.又 −4,顯反對方向四單位之距離.

19. 反對之種類 依以上諸例.+及一號.原用以區別量之正反對之種類者.卽 +4,無論顯如何之量.而