数学手册

科学出版社

数学手册

科学出版社

原

书

缺

页

原书缺页

原

书

缺

页

原

书

缺

页

原

书

缺

页

1) $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，　　$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，

一般地　　$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

2) $\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^r\leqslant\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}$ $(r\geqq1)$.

(3) 绝对值与不等式

绝对值定义 $|A|=\begin{cases}A & (A\geqslant0),\\ -A & (A<0).\end{cases}$

1) $|A+B|\leqslant|A|+|B|$.

2) $|A-B|\leqslant|A|+|B|$.

3) $|A-B|\geqslant|A|-|B|$.

4) $-|A|\leqslant A\leqslant|A|$.

5) $\sqrt{A^2}=|A|$.

6) $|AB|=|A||B|$.

7) $\left|\frac{A}{B}\right|=\frac{|A|}{|B|}$.

8) 若$|A|\leqslant B$，　则　$-B\leqslant A\leqslant B$.

9) 若$|A|>B$　$(B\geqslant O)$，　则　$A>B$或$A<-B$.

7. 行 列 式

(1) 二阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

(2) 三阶行列式

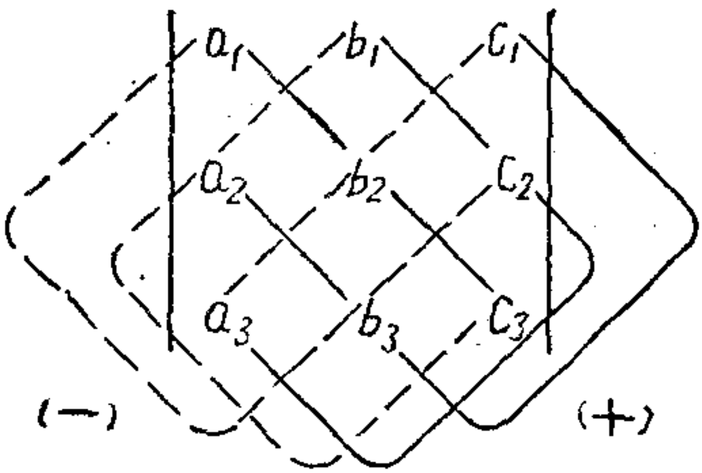
1) 定　义

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - $$

$$- a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

2) 展开法

① 对角线展开法



实线上三数的积取正号　$+a_1b_2c_3$

$+a_2b_3c_1$

$+a_3b_1c_2$

虚线上三数的积取负号　$-a_1b_3c_2$

$-a_2b_1c_3$

+)　$-a_3b_2c_1$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

② 按某一行（或列）展开法

三阶行列式展开式有六种，例如按第二行展开

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

等式右端各项前取正号还是取负号，要根据这个元素在行列式中所处的位置决定，其规律如下图：

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

3) 性　质

① 行、列依次序对调，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

② 两行(或两列)对调，行列式的值变号，例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

③ 某行(或列)所有元素乘以数 k，所得行列式的值等于原行列式值的 k 倍，例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

④ 某两行（或两列）的元素对应成比例，行列式的值为零，例如

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

⑤ 某行（或列）的元素都是二项式，该行列式可分解为两个行列式的和，例如

$$\begin{vmatrix} a_1+d & b_1+e & c_1+f \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} d & e & f \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

⑥ 某行（或列）所有的元素乘以同一个数，加到另行（或列）的对应元素上，行列式的值不变，例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+kc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+kc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+kc_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

（3）高阶行列式

四阶和四阶以上的行列式，叫做高阶行列式。高阶行列式无对角线展开法。三阶行列式按某一行（或列）展开法仍适用于高阶行列式，例如 n 阶行列式按第一行展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}\cdots a_{3n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{33}\cdots a_{3n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n3}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}+$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\cdots a_{2(n-1)} \\ a_{31} & a_{32}\cdots a_{3(n-1)} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{n(n-1)} \end{vmatrix}.$$

三阶行列式的性质都适用于高阶行列式，这里不再重复。

8．一次方程组的解

(1) $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad (\Delta\neq 0)$$

式中 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$； $\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$； $\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases}$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta},\quad (\Delta\neq 0)$$

式中 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$； $\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix};\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

当 $d_1=d_2=d_3=0$ 时，

$\Delta\neq0$，方程组只有零解；

$\Delta=0$，方程组有无穷多组解。

(3) $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0. \end{cases}$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=t.$$

〔注〕 三元以上一次方程组也有类似解的公式和结论。

9. 一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0.$$

(1) 根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(2) 根与系数的关系

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

(3) 判别式

$$b^2-4ac\begin{cases} >0 & \text{不等二实根,} \\ =0 & \text{相等二实根,} \\ <0 & \text{共轭复数根。} \end{cases}$$

10. 一元三次方程与四次方程

(1) 三次方程

1) $x^3-1=0$.

$$x_1=1,\ x_2=\omega_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\quad x_3=\omega_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

2) $x^3+ax^2+bx+c=0$.

命 $x=y-\frac{a}{3}$代入，则得

$$y^3+py+q=0,$$

设其根为 y_1、y_2、y_3，则

$$y_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

$$y_2=\omega_1\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+$$

$$+\omega_2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

$$y_3=\omega_2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+$$

$$+\omega_1\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

(2) 四次方程

$$x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0.$$

先求出

$$y^3-cy^2+(bd-4e)y-b^2e+4ce-d^2=0$$

的任一实根y，再分别解出下列两个方程

$$x^2+\frac{1}{2}(b\pm\sqrt{b^2-4c+4y})x+\frac{1}{2}(y\pm\sqrt{y^2-4e})=0.$$

〔注〕四次以上方程没有一般公式解法。

11. 数　　列

依照某种法则排列着的一列数

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,a_n,\ \cdots$$

叫做数列，一般记作$\{a_n\}$.

(1) 等差数列

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ \cdots\ (\text{公差为}d).$$

1) 通项(第n项)　$a_n=a_1+(n-1)d$.

2) 前n项和

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

3) 等差中项　若a、b、c成等差数列，

则
$$b=\frac{1}{2}(a+c).$$

(2) 等比数列

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \cdots\ (\text{公比为}q).$$

1) 通项　$a_n=a_1q^{n-1}$.

2) 前n项和

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}.$$

3）等比中项　若 a、b、c 成等比数列，

则
$$b=\pm\sqrt{ac}.$$

4）无穷递减等比数列的和

$$S=\frac{a_1}{1-q}\quad(|q|<1).$$

（3）某些数列的前 n 项和

1） $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(1+n).$

2） $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$

3） $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1).$

4） $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

5） $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1).$

6） $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$

7） $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1).$

8） $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

9） $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)=$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

10） $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$

11) $$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

12. 指　　数

(1) 定　义

1) $a^n=\underbrace{aa\cdots a}_{n个}$；　　$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$　$(a\neq0)$.

2) $a^0=1$　$(a\neq0)$.

3) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$　$(a\geqslant0)$；　　$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$　$(a>0)$.

式中　m、n 均为正整数。

4) 无理指数幂可用有理指数幂近似表示，例如

$a^\pi\approx a^3$，$a^{3.1}$，$a^{3.14}$，$a^{3.142}$，$a^{3.1416}$，… $(a>0)$.

(2) 指数律

1) $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$.

2) $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}=a^{x_1-x_2}$.

3) $(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}$.

4) $(ab)^x=a^x\cdot b^x$.

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$.

式中　$a>0$，$b>0$；x_1、x_2、x 为任意实数。