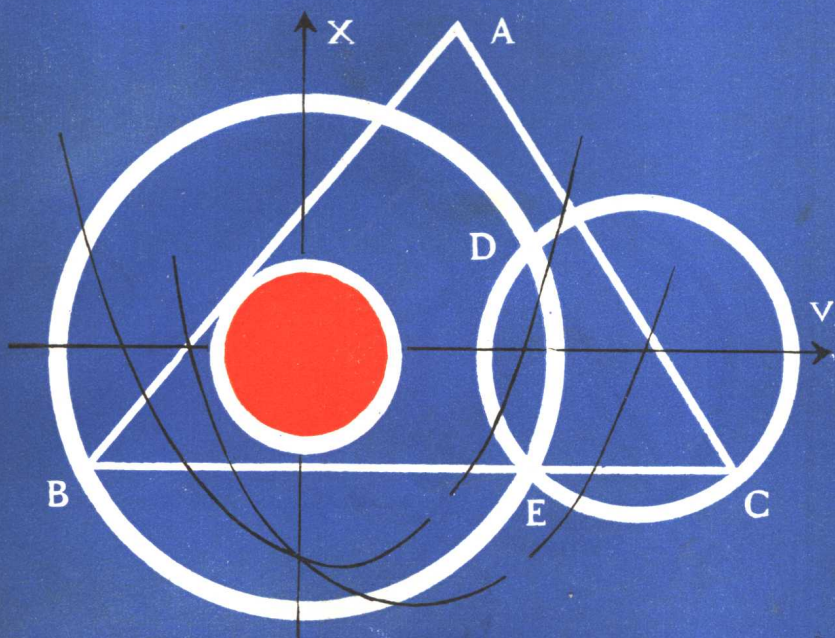


Zhongxue Shuxue Jieti Fangfa Yanjiu



中学数学 解题方法研究

江西人民出版社

中学数学解题方法研究

吴 深 德

中学数学解题方法研究

吴 溪 德

江西人民出版社出版

（南昌市第四交通路铁道东路口）

江西省新华书店发行 江西新华印刷厂印刷

开本：(87×1002) 1/32 印张：(1.875) 字数：(20,000)

1984年3月第1次 [1984年3月] 第1次印刷

印 数：1-20,000

统一书号：7110·1434

定价：1.02元

前 言

定义、公理、定理和公式都是数学的必要组成部分；没有这些，数学就不存在了。然而它们当中的任何一个都不能成为数学的“心脏”，它们只是为提出数学问题和解数学问题服务的，因此，数学的“心脏”就是数学的问题和解。数学家们就是为解（从实践和理论当中提出的）数学问题而存在的，否则的话，也就没有数学家了。有些著名的数学问题（例如：哥德巴赫猜想），数学家们花了好几百年时间，至今还没有彻底解决。当然，在中学数学里这样的问题是没有的，因为任何一个中学数学问题都是可以解的。遗憾的是，有些学生虽然能滚瓜烂熟地背诵中学数学课本中的定义、公理和定理，能记住大量的数学公式，但是当遇到一个灵活性大、综合性强、难度较大的问题时，却不知从何下手。尤其在高考时，这些学生遇到这样的问题就更束手无策，盲目地用这个公式套套，那个定理试试，还是解不出来，有时虽然侥幸地想出来了，但时间又不够了，……。总之，这些学生在解题时没有显示出足够的能力。这是什么原因呢？

第一、在教学过程中，教师在课堂上解题时，缺乏必要的分析，基本的解题方法和技巧讲得不深不透，因而学生的基本知识和解题的基本技能就掌握得不好，他们只能模仿课堂上讲的例题来做家庭作业，当他们遇到一个形式不同而实际上是以以前学过的类似问题时，他们就会嚷起来：“老师没有教过这道题呀！”，“我们没有学过这道题呀！”

第二、尽管老师在课堂上解题时注意了问题的必要的分析，也注意了有关的解题方法和技巧，但是由于种种原因，未能引起学生的重视，这些学生只想尽快地解题，以便有时间去解更多的数学习题，以为这样就可以“熟能生巧”，但他们却对解题的一般规律和方法不予重视，因而效果就不那么良好。

第三、各种中等的数学教科书（或者高考的数学复习资料）都比较侧重于各种详细的数学知识的系统叙述，而解题方法和技巧则“融化”在这一庞大的系统之中，因此，教师就必须从这个庞大的系统中“提炼”出各种解题方法和技巧，以便贯穿到教学过程当中。倘若由于某种原因，教师没有这样做，让学生自己去“提炼”的话，那就困难了。

第四、论证方法对数学来说是多么重要呀！可惜的是，在数学教科书中没有专门的系统叙述（当然零星的、分散的叙述是有的），因为它是属于逻辑学范畴的内容，而在那里，数学的“味道”又似乎不足，因此，在一定程度上就影响到教师（或学生）对论证方法的了解。

鉴于上述原因，为了使读者对解题的一般规律和方法有一个比较系统的了解，作者尝试地撰写了这本书。如果读者能耐心地、仔细地读完这本书，并且有所帮助的话，那么作者将非常感激。但限于作者的水平，不妥之处在所难免，因此，希望能得到读者的批评和指导。

作者于1982年国庆节

目 录

前 言	(1)
1. 综合法	(1)
2. 分析法	(12)
3. 间接证法	(24)
4. 猜想——归纳	(38)
5. 联思——类比	(57)
6. 代数换元法	(76)
7. 三角法(一)	(88)
8. 待定系数法	(103)
9. 比较法	(123)
10. 缩放代换法	(133)
11. 三角法(二)	(144)
12. 解析法	(172)
13. 递推法	(188)
14. 试探法	(205)
15. 直观化	(225)
16. 模拟法	(246)
17. 抽屉原则	(276)
附录1 G·Polya教授的“怎样解题”表	(285)
附录2 答案·提示·解答	(288)

1. 综 合 法

推理是反映从已知的判断得出新的判断的思维形式。

我们解一道数学题的过程就是由一个或者几个推理过程所组成的。

二十世纪的科学巨人爱因斯坦(A·Einstein, 1879—1955)在少年时代就听他的一个当工程师的叔叔说过：“代数嘛，就象打猎一样有趣。那头藏在树林里的野兽，你把它叫做 x ，然后一步一步逼近它，直到把它逮住！”这就很风趣地说明了我们解一道数学题的过程，就象打猎时追捕一头东逃西串的野兽一样，从已知条件出发，一步一步地逼近所求的结论，直至得到所求的结论。这种从已知条件推导出所求结论的方法叫做综合法。

请看下面的问题：

研究题 1 — 1 —

已知 n 为自然数，求证： 2^{n+1} 与 2^n 的个位数相同。

【思路分析】如果两个数的个位数相同，那么这两个数的差的个位数就必然等于零。因此，证这道题时，只须把 2^{n+1} 与 2^n 相减。

【证】因为

$2^{n+1} - 2^n = 2^n(2^1 - 1) = 2^n \cdot 1 = 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 1 = 2^{n-1} \cdot 2$ ，所以这两个数的差的个位数是零。因此， 2^{n+1} 与 2^n 的个位数相同。

【方法研究】此题的证法是从问题的结论分析出来的，再

用综合法把这个证法写出来。因此，解题时除了充分地了解问题的条件外，还必须仔细地分析问题的结论。这个结论也许会告诉你“做什么”以及“怎样做”。

研究题 1 — 2

试求双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的切线的斜率的存在范围。

【思路分析】双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的切线方程有两种形式：

1) 已知切点 (x_0, y_0) ，则切线方程为

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1;$$

2) 已知切线的斜率为 k ，则切线方程为

$$y = kx \pm \sqrt{a^2 k^2 - b^2}.$$

前者与切点有关，后者则与斜率有关。因此，后者对此题来说，就可以直接用上。

【解】设双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

的切线的斜率为 k ，则切线方程为

$$y = kx \pm \sqrt{a^2 k^2 - b^2}. \quad (2)$$

若切线存在的话，则

$$a^2 k^2 - b^2 \geq 0,$$

解得

$$|k| \geq \frac{b}{a}.$$

但是，当 $|k| = \frac{b}{a}$ ，即 $k = \pm \frac{b}{a}$ 时，(2) 变成

再，即来得得代斜率的值同是双曲线的渐近线。

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

这就不是切线方程，而是双曲线(1)的渐近线方程了。所以，双曲线(1)的切线的斜率的存在范围是

$$|k| > \frac{b}{a}.$$

【方法研究】i. 对于某一数学问题来说，与这个问题有关的公式（或定理）往往不止一个，但并不是个个都用得上。这时你必须一眼就看出来，哪些公式（或定理）对解这道题是能直接用上的，哪些公式（或定理）对解这道题是不能直接用上的，甚至是无效的。

ii. 解题时必须把不符合问题结论（或条件）的情况剔除（如本题的 $|k| = \frac{b}{a}$ ）。

上面两道题的推理过程都是比较简单的，因而也就很快地“逮住”了所求的结果。但是，有时候要“逮住”所求的结果，并不是一件很容易的事，它往往要考虑到问题中所有可能出现的情况，经过仔细的分析和推敲，才能把所求的结果“逮住”。请看下面的问题：

—研究题 1—3—

已知凸 n 边形中没有平行的对角线，试求凸 n 边形的对角线有多少个交点。

【思路分析】必须先求出凸 n 边形有多少条对角线，才能求出这些对角线交点的个数。另外，还要注意，凸 n 边形有 n 个顶点，而每一个顶点又是 $n-3$ 条对角线的交点。

【解】凸 n 边形对角线的条数为

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2!} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

下面分三种情况来求凸 n 边形对角线的条数以及对角线交点的个数:

1) 当 $n=3$ 时, 即三角形, 它没有对角线, 也就谈不上有对角线的交点;

2) 当 $n=4$ 时, 即凸四边形, 它有两条对角线, 所以凸四边形对角线的交点只有一个;

3) 当 $n \geq 5$ 时, 因为凸 n 边形的对角线都互不平行, 而每一个顶点又是 $n-3$ 条对角线的交点, 所以凸 n 边形对角线交点的个数是:

$$\begin{aligned} & C_{\frac{n(n-3)}{2}}^2 - n(C_{n-3}^2 - 1) \\ &= \frac{\frac{n(n-3)}{2} \left[\frac{n(n-3)}{2} - 1 \right]}{2!} - n \left[\frac{(n-3)(n-4)}{2!} - 1 \right] \\ &= \frac{n}{8} \{ (n-3)[n(n-3)-2] - 4[(n-3)(n-4)-2] \} \\ &= \frac{n}{8} (n^3 - 10n^2 + 35n - 34). \end{aligned}$$

答: 三角形没有对角线, 也没有对角线的交点; 凸四边形对角线交点的个数只有一个; 凸 $n(n \geq 5)$ 边形对角线交点的个数是 $\frac{n}{8}(n^3 - 10n^2 + 35n - 34)$.

【方法研究】 i. 此题的解法的特点是步骤分明. 步骤分明对解题来说是很重要的, 尤其是比较复杂的问题必须明确: 第一步做什么? 第二步、第三步、……, 又做什么?

ii. 此题解法中的前二个特殊情况是解题者比较容易忽视

的。因此，解题时必须注意到特殊情况，并将特殊情况分开，另作处理。

iii. 解组合问题时，必须特别注意重复（或者遗漏）现象，否则就会弄错。

研究题 1 — 4 —

已知 S_i 为满足命题：“若 $x \in S_i$ ，则 $10 - x \in S_i$ ” 的自然数的集合，且 i 表示集合 S_i 中所含元素的个数，

(1) 试求 S_1 ；

(2) 试求 S_2 ；

(3) 试求符合已知条件的集合 S_i 总共多少个？

【思路分析】此题的关键在于求出集合 S_i 的元素可以是哪些自然数，而这不难从命题：“若 $x \in S_i$ ，则 $10 - x \in S_i$ ” 得出来。

【解】因为集合 S_i 是由自然数所组成的，所以它的元素 x 和 $10 - x$ 必须满足不等式组

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ 10 - x \geq 1. \end{cases}$$

解得

$$1 \leq x \leq 9.$$

于是

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

1) 在这九个自然数中，5 是唯一满足命题“若 $x \in S_i$ ，则 $10 - x \in S_i$ ”的单独一个数，所以

$$S_1 = \{5\}.$$

2) 在这九个自然数中，满足命题“若 $x \in S_i$ ，则 $10 - x \in S_i$ ”的数对有四组：1, 9；2, 8；3, 7；4, 6。所以

$$S_2 = \{1, 9\}; \{2, 8\}; \\ \{3, 7\}; \{4, 6\}.$$

3) 同理

$$S_3 = \{1, 5, 9\}; \{2, 5, 8\}; \\ \{3, 5, 7\}; \{4, 5, 6\}.$$

$$S_4 = \{1, 2, 8, 9\}; \\ \{1, 3, 7, 9\}; \\ \{1, 4, 6, 9\}; \\ \{2, 3, 7, 8\}; \\ \{2, 4, 6, 8\}; \\ \{3, 4, 6, 7\}.$$

$$S_5 = \{1, 2, 5, 8, 9\}; \\ \{1, 3, 5, 7, 9\}; \\ \{1, 4, 5, 6, 9\}; \\ \{2, 3, 5, 7, 8\}; \\ \{2, 4, 5, 6, 8\}; \\ \{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

$$S_6 = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}; \\ \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}; \\ \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}; \\ \{2, 3, 4, 6, 7, 8\};$$

$$S_7 = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}; \\ \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}; \\ \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}; \\ \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\};$$

$$S_8 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}.$$

$$S_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

因此, 集合 S_i 总共有

$$1 + 4 + 4 + 6 + 6 + 4 + 4 + 1 + 1 = 31 \text{ (个)}.$$

【方法研究】 不论用什么方法解题, 都必须深刻地理解题意, 必须明了已知条件是什么? 所求量是什么? 为了求出所求量, 已知条件应该怎样用法? 对于比较复杂的已知条件, 还要注意与之有关的一些数学事实(定义、公式、定理等). 就此题来说, 命题“若 $x \in S_i$, 则 $10 - x \in S_i$ ”是问题中比较复杂的条件, 要了解它, 就必须联系到集合的有关知识, 考虑到集合的元素是自然数, 再利用不等式组求出该集合的元素, 并且还要既不能重复也不能遗漏地将集合 S_i 都表示出来, 否则的话, 就不能得到正确的结果.

研究题 1 — 5

已知 p, q 均为素数, 试求方程

$$x^2 + p^2x + q^3 = 0$$

的整数根.

【思路分析】 若方程

$$x^2 + p^2x + q^3 = 0$$

有整数根, 则这两个根可以将方程的左边进行因式分解来求出. 但是, 由于原方程中的素数 p, q 还未求出来, 这样就不能进行因式分解, 整数根也就求不出来. 因此, 解决这个问题的关键在于求 p, q . 这时, 可以通过韦达定理以及素数 p, q 的性质将 p, q 求出来. ●

【解】 设方程的两根为 x_1 和 x_2 , 则

$$x_1 + x_2 = -p^2, \quad (1)$$

$$x_1x_2 = q^3. \quad (2)$$

因为原方程的系数都是正数, 所以没有正整数根. 因此, 由

(2), 得

$$x_1 = -q, \quad x_2 = -q^2 \quad (3)$$

或

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -q^3. \quad (4)$$

将(3)、(4)两组值分别代入(1), 得

$$q + q^2 = p^2, \quad (5)$$

$$1 + q^3 = p^2. \quad (6)$$

先研究(5).

1) 若 q 为奇数, 则 q^2 也为奇数. 于是

$$q + q^2 = \text{奇数} + \text{奇数} = \text{偶数}.$$

但素数中唯一的偶数就是 2, 由(5), 得

$$q + q^2 = 4.$$

因为 3 是素数中的最小奇数, 而

$$3 + 3^2 = 12 > 4,$$

所以, 当 q 为奇数时, (5) 不成立.

2) 若 q 为偶数, 则 $q = 2$. 这时(5)变成

$$2 + 2^2 = p^2.$$

$$p^2 = 6.$$

很明显, p 不可能为素数. 所以, 当 q 为偶数时, (5) 也不成立.

再研究(6).

1) 若 p, q 皆为奇数, 则 p^2, q^3 也皆为奇数, 这时

$$1 + q^3 = \text{奇数} + \text{奇数} = \text{偶数} \neq p^2, \text{ (6) 不成立.}$$

2) 若 p, q 中只有一个偶数, 设 $p = 2$, 则(6)变成

$$1 + q^3 = 2^2,$$

$$q^3 = 3.$$

很明显, q 不可能为素数, 所以(6)不成立. 设 $q = 2$, 则

(6) 变成

$$1 + 2^3 = p^2,$$

$$p = 3.$$

所以满足(6)的素数 $p = 3, q = 2$ 。

3) 若 p, q 皆为偶数, 则 $p = q = 2$ 。这时

$$1 + 2^3 \neq 2^2,$$

所以(6)不成立。

综合上述各种情况, 得, $p = 3, q = 2$ 。将 p, q 之值代入原方程, 得

$$x^2 + 9x + 8 = 0,$$

$$(x+1)(x+8) = 0,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -8.$$

这就是所求的整数根。

【方法研究】i. 此题的推理过程比较长, 也比较复杂。其主要原因是所讨论的情况较多。对此, 我们解题时应该注意, 绝对不能遗漏一种情况, 否则的话, 解题就不完整, 甚至会产生错误的结果。例如, 研究(6)时, 其中“2) 若 p, q 中只有一个偶数”, 只讨论 $p = 2$, 而没有讨论 $q = 2$, 就会把这个问题的唯一的一组解遗漏掉, 从而得到原方程没有整数解的错误结果。

ii. 解此题时, 多次运用了“2是素数中唯一的偶数”这一数学事实。这个数学事实不是明摆在已知条件上的, 而是“隐藏”在已知条件中的。象这种“隐藏”在已知条件中的数学事实, 就需要解题者仔细地分析、耐心地推敲, 否则的话就不容易发现。

思考题 1

1·1. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-2} \right)^{2x-1}$.

1·2. 已知 $a > b > 1$, 且 $\log_a b + 3 \log_b a = \frac{13}{2}$, 试求 $\frac{a+b^4}{a^2+b^2}$ 的值.

1·3. 已知 a, b 为常数, 且 $f(x) = \frac{x}{ax+b}$ 满足下列条件:

1) $f(2) = 1$;

2) 使 $f(x) = x$ 的 x 值只有一个,

试求 $f(x)$.

1·4. 已知 AD, BE, CF 为 $\triangle ABC$ 的三条高, O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心, 求证: OA, OB, OC 分别与 EF, DF, DE 垂直.

1·5. 平地上某点看塔上的旗杆的最大视角为 α , 此点到塔的距离为 d , 试求塔和旗杆的高度.

1·6. 解不等式 $6 \operatorname{ctg}^2 x \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \cos^2 x + 3 \operatorname{ctg}^2 x$.

1·7. 甲、乙、丙三人参加一次田径比赛, 在每项比赛中, 第一名得 5 分, 第二名得 2 分, 第三名得 1 分. 开始时, 他们参加跳高比赛, 甲得第一名. 乙、丙二人不甘示弱, 在其余各项比赛中奋起直追, 比赛结束后, 各项名次都是甲、乙、丙三人, 乙得的总分最高, 有 22 分, 甲、丙二人的总分相等, 各得 9 分. 如果乙在跳高比赛中得第二名, 试问甲、乙、丙三人在其余各项比赛中的名次是怎样的?

1·8. 两个时钟在正午同时鸣响, 如果一个时钟每天快 8 分钟, 另一个时钟每天慢 4 分钟, 试问经过多少天后, 这两个时钟又同时鸣响十二下?

1·9. 已知两个自然数集合:

$$A = \{1, 2, 3, \dots, m\},$$

$$B = \{1, 2, 3, \dots, n\},$$

1) 试求 A 的子集一共有多少个?

2) 满足条件 $B \cap C \neq \emptyset$ 的 A 的子集 C 总共有多少个?

1·10. 已知 p, q 为奇数, 求证: 方程

$$x^2 + 2px + 2q = 0$$

不可能有有理根。