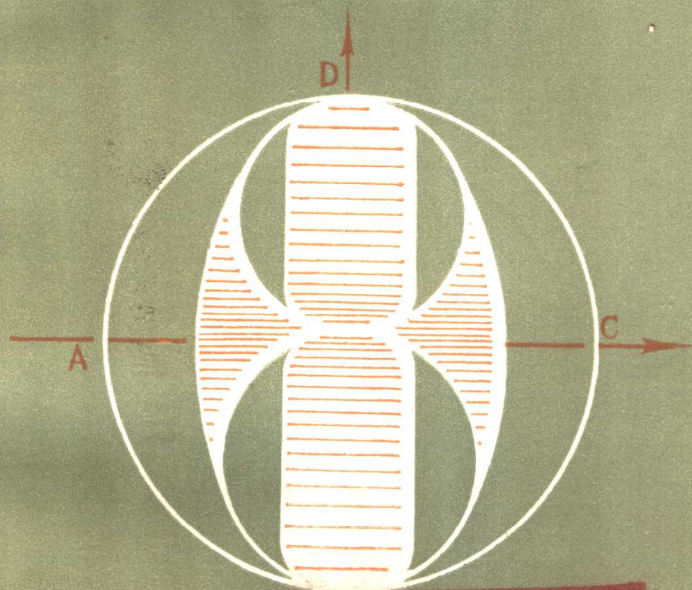


中学教学参考丛书

13.1-16 / 127

高中数学教学 八十讲



库存书

北京师范大学出版社

高中数学 教学八十讲

明知白 侯文超 编

北京师范大学出版社

1982年12月

高中数学教学八十讲

明知白 侯文超 编

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
交通部出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：17.5 字数：398 千

1982年12月第一版 1982年12月第一次印刷

印数：1—70,000

统一书号：7243·52 定价：1.45元

内 容 简 介

本书以教学大纲为准绳,以高中课本为主线,按照知识的系统性、连贯性,对高中数学的重要内容作了全面地、系统地阐述。本书注重基本知识的教学,注重处理各类数学问题的思路与方法。

全书分七大部分,共八十讲。每一讲有教学目的与要求,内容要点。通过典型范例,讲解基础知识与解题方法。并配有相应的习题与解答。可作中学数学教师教学参考书,也可作高中学生、知识青年巩固高中数学知识的参考书。

前 言

数学是具有高度的抽象性、严谨的逻辑性的一门科学，同时它又具有广泛的应用性。高中数学是数学体系中承上启下的重要一环，是参加工农业生产与进一步学习高等数学的重要基础。为了给数学教师提供一套讲授与复习高中数学的选择方案，为了帮助广大高中学生与知识青年学好高中数学，我们以多年的教学实践为基础，编写了这本书，以为学好中学数学贡献一点微薄的力量。

编写这本书时，我们努力遵循的基本原则是：紧扣课本，狠抓双基，加强综合，注重方法。学好数学一要掌握基本知识，二要学会处理各种数学问题的思路与方法。如果读者通过这本书的学习与使用，能够在这方面有所收益，我们将感到欣慰。

本书得到北京师范大学数学系刘来福副教授的 热 心 支持。东城区教研室魏仲和、贺信淳两同志在百忙中看过全书的原稿，并提出了不少有益的建议。同时，在编写中，我们也参阅了其他一些有经验的教师发表的有关资料，在此对他们一并表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，时间仓促，定有不少错误与不妥之处，敬请读者批评指正。

编 者

1982年3月于北京

目 录

第一讲 两条直线的位置关系	(1)
习题一	(6)
第二讲 直线与平面的位置关系	(6)
习题二	(10)
第三讲 两个平面的位置关系	(11)
习题三	(15)
第四讲 各种距离和各种角	(16)
习题四	(21)
第五讲 柱、锥、台、球	(22)
习题五	(26)
第六讲 侧面积和体积	(27)
习题六	(32)
第七讲 立体几何综合练习(一)	(33)
习题七	(37)
第八讲 立体几何综合练习(二)	(37)
习题八	(41)
第九讲 集合与对应	(42)
习题九	(45)
第十讲 函数概念	(46)
习题十	(50)
第十一讲 函数的定义域与值域、反函数	(50)
习题十一	(56)
第十二讲 初等代数函数(一)	(57)

习题十二	(62)
第十三讲 初等代数函数(二)	(63)
习题十三	(66)
第十四讲 初等函数的性质	(67)
习题十四	(71)
第十五讲 对数	(72)
习题十五	(76)
第十六讲 指数方程与对数方程	(77)
习题十六	(80)
第十七讲 三角函数的定义和基本公式	(81)
习题十七	(83)
第十八讲 三角函数的求值问题	(86)
习题十八	(91)
第十九讲 三角恒等式的证明(一)	(92)
习题十九	(96)
第二十讲 三角恒等式的证明(二)	(96)
习题二十	(101)
第二十一讲 三角函数的图象和性质	(101)
习题二十一	(106)
第二十二讲 反三角函数	(107)
习题二十二	(111)
第二十三讲 三角方程	(112)
习题二十三	(117)
第二十四讲 三角形中的边角关系	(117)
习题二十四	(121)
第二十五讲 三角形中的三角函数式	(122)
习题二十五	(126)
第二十六讲 三角综合练习	(127)

习题二十六	(131)
第二十七讲 行列式的计算	(131)
习题二十七	(135)
第二十八讲 线性方程组的求解与讨论	(136)
习题二十八	(141)
第二十九讲 不等式的性质和证明(一)	(142)
习题二十九	(146)
第三十讲 不等式的性质和证明(二)	(147)
习题三十	(150)
第三十一讲 极值问题的初等解法	(151)
习题三十一	(155)
第三十二讲 含有绝对值符号的等式与不等式	(156)
习题三十二	(160)
第三十三讲 复数的概念	(161)
习题三十三	(164)
第三十四讲 复数的运算	(165)
习题三十四	(169)
第三十五讲 复数集上的代数方程	(169)
习题三十五	(173)
第三十六讲 数列(一)	(173)
习题三十六	(177)
第三十七讲 数列(二)	(178)
习题三十七	(183)
第三十八讲 数列应用问题	(184)
习题三十八	(187)
第三十九讲 排列组合的意义与计算	(188)
习题三十九	(191)
第四十讲 排列组合应用问题	(192)

习题四十	(196)
第四十一讲 二项式定理	(196)
习题四十一	(199)
第四十二讲 概率与统计初步(一)	(200)
习题四十二	(205)
第四十三讲 概率与统计初步(二)	(206)
习题四十三	(210)
第四十四讲 直线	(210)
习题四十四	(215)
第四十五讲 圆	(217)
习题四十五	(221)
第四十六讲 圆锥曲线(一)	(222)
习题四十六	(230)
第四十七讲 圆锥曲线(二)	(230)
习题四十七	(236)
第四十八讲 参数方程	(236)
习题四十八	(242)
第四十九讲 曲线与方程	(243)
习题四十九	(246)
第五十讲 轨迹	(247)
习题五十	(254)
第五十一讲 极坐标	(254)
习题五十一	(262)
第五十二讲 解析几何综合练习(一)	(263)
习题五十二	(267)
第五十三讲 解析几何综合练习(二)	(268)
习题五十三	(271)
第五十四讲 命题	(272)

习题五十四	(277)
第五十五讲 充要条件	(278)
习题五十五	(282)
第五十六讲 反证法	(283)
习题五十六	(288)
第五十七讲 换元法	(289)
习题五十七	(293)
第五十八讲 数学归纳法	(294)
习题五十八	(299)
第五十九讲 条件等式(一)	(299)
习题五十九	(306)
第六十讲 条件等式(二)	(307)
习题六十	(312)
第六十一讲 二元不等式所表示的平面区域	(313)
习题六十一	(319)
第六十二讲 几何图形的综合处理(一)	(320)
习题六十二	(325)
第六十三讲 几何图形的综合处理(二)	(326)
习题六十三	(332)
第六十四讲 初等数学综合练习(一)	(333)
习题六十四	(337)
第六十五讲 初等数学综合练习(二)	(338)
习题六十五	(343)
第六十六讲 数列极限的概念	(344)
习题六十六	(347)
第六十七讲 极限的计算(一)	(348)
习题六十七	(352)
第六十八讲 极限的计算(二)	(353)

习题六十八	(357)
第六十九讲 导数的概念	(358)
习题六十九	(362)
第七十讲 导数的计算	(363)
习题七十	(367)
第七十一讲 导数在几何学上的应用	(368)
习题七十一	(371)
第七十二讲 导数在运动学和其它方面的应用	(372)
习题七十二	(375)
第七十三讲 函数的增减性与极值	(376)
习题七十三	(380)
第七十四讲 函数的最大值与最小值	(381)
习题七十四	(385)
第七十五讲 微分及其应用	(386)
习题七十五	(389)
第七十六讲 积分的概念与计算(一)	(389)
习题七十六	(393)
第七十七讲 积分的概念与计算(二)	(394)
习题七十七	(397)
第七十八讲 定积分的应用	(398)
习题七十八	(402)
第七十九讲 微积分综合练习(一)	(402)
习题七十九	(406)
第八十讲 微积分综合练习(二)	(407)
习题八十	(410)
习题答案或提示	(411)

第一讲 两条直线的位置关系

教学目的 复习平面的基本性质及空间两条直线的位置关系。

教学要求

- (1) 掌握有关平面的公理及确定平面的条件;
- (2) 了解空间二直线的各种位置关系, 并会判定;
- (3) 理解关于二异面直线所成的角的概念并会计算。

了解二异面直线的公垂线及二异面直线间的距离。

教学内容

要点:

(1) 平面是不能定义的基本数学概念之一, 它只能用一些公理描述. 下列公理就是描述平面的性质的:

1° 若一条直线上的两个点在一个平面内, 则这条直线上的所有点都在这个平面内;

2° 若二平面有一个公共点, 则它们相交于过该点的一条直线;

3° 不在同一直线上的三点确定一个平面, 即过这样的三点能作且只能作一个平面。

由这些公理, 容易证明: 下列诸条件之一都能确定一个平面:

- 1° 不在同一直线上的三点;
- 2° 一条直线及直线外一点;
- 3° 二相交直线;
- 4° 二平行直线。

(2) 不重合的两条直线的位置关系有三种可能：1°相交；2°平行；3°是异面直线。

(3) 设在空间中给出两条异面直线，在空间中任取一点，过该点分别作它们的平行线，这两条平行线之间的夹角称为这两条异面直线所成的角。

说明：1°这个角的大小与空间中点的选取无关。为简便起见，经常把这点选在二异面直线中的某一条上。

2° 这个定义的实质是：把二异面直线或其中的一条平行移动，使它们相交。这时的交角就是二异面直线所成的角。这个概念正好反映我们这种直观印象：二直线所成的角只与二直线的方向有关，从而平行移动不改变二直线所成角的大小。

(4) 与二异面直线都垂直相交的直线称为它们的公垂线。公垂线在此二异面直线之间的线段的长叫做该二异面直线间的距离。

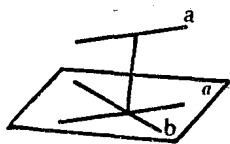


图1-1

设 a 、 b 为二异面直线(图1-1). 过直线 b 作直线 a 的平行平面 α , 直线 a 与平面 α 的距离就是二异面直线 a 与 b 间的距离(习题二第7题). 这种把异面直线间的距离转化为平行的直线与平面间的距离的

方法，在处理有关二异面直线间的距离的问题时经常用到。

(5) 平面几何中那些不涉及到图形的位置，只涉及到其形状和大小的定理(比如关于全等三角形、相似三角形的判定和性质定理)，在空间中仍然成立；那些涉及图形位置关系的定理中有些定理(比如“平行于同一直线的二直线平

行”），经证明后知它在空间中也成立^{*}；而另有些定理（如“垂直于同一直线的二直线平行”）在空间中则不成立。

例1 空间四条直线，每两条都相交，每三条不共点。
求证：这四条直线共面。

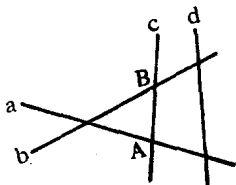


图1-2

证：用 a, b, c, d 表示这四条直线(图1-2). 由于直线 a, b 相交，故它们确定一个平面 α . 设直线 c 分别与直线 a, b 相交于点 A, B . 显然，点 A 与点 B 不重合（否则，直线 a, b, c 将共点，与已知条件矛盾）。由于点 A, B 都在平面 α 上，故直线 c 也在平面 α 上。同理，直线 d 也在平面 α 上。所以这四条直线共面。

例2 设空间四边形 $ABCD$ 不是平面图形（即它的四条边不都在同一平面内）， E, F, G, H 分别为线段 AB, BC, CD, DA 的中点。求证：

- (1) $EF \parallel HG$;
- (2) AC 与 BD 是异面直线。

证：(1) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中应用中位线定理，有 $EF \parallel AC, HG \parallel AC$ ，

因此， $EF \parallel HG$ 。

(2) 用反证法。如图 1-3，假设 AC 与 BD 共面，则可设它们都在平面 α 上。那么，它们的端点 A, B, C, D 都在平面 α 上。这样各边 AB, BC, CD, DA 也都在平面 α 上了，这与四边形 $ABCD$ 不是平面图形矛盾。因此， AC 与 BD 是异面直线。

^{*}统编教材中把它当成公理。

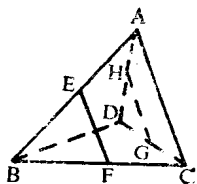


图1-3

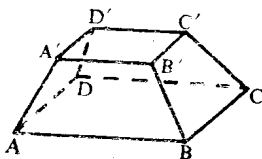


图1-4

例3 在正四棱台 $ABCD-A'B'C'D'$ 中 (图 1-4), 下列每两条直线的位置关系如何?

- (1) AA' 和 CC' ;
- (2) AA' 和 BC ;
- (3) AD 和 $B'C'$.

解: 用 S 表示截得这个棱台的棱锥的顶点。

(1) 由于侧棱 AA' 和 CC' 延长后相交于 S , 故直线 AA' 和 CC' 是相交直线。

(2) AA' 和 BC 是异面直线。事实上, 若不然, 由于点 S 在 AA' 上, S, A, B, C 四点将共面, 即锥的顶点在底面上, 这是不可能的。

(3) 由于 $AD \parallel BC$, $B'C' \parallel BC$, $\therefore AD \parallel B'C'$. 即 AD 和 $B'C'$ 是平行直线。

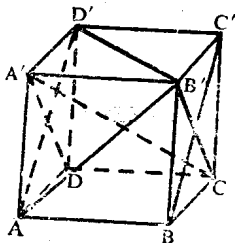


图1-5

例4 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中 (图 1-5), 求下列每两条异面直线所成的角:

- (1) $A'D$ 和 BC ;
- (2) AB' 和 BC' ;
- (3) $A'C$ 和 BC' .

解: (1) 由于 $A'D \parallel B'C$, 故 $\angle BCB'$ 就是异面直线 $A'D$ 和 BC 所成之角, 它等于 45° .

(2) 由于 $AD' \parallel BC'$, 故 $\angle B'AD'$ 就是异面直线 AB' 和 BC' 所成之角. 注意到 $\triangle AB'D'$ 是正三角形, 便知它等于 60° .

(3) 由于 $A'C$ 在平面 $ECC'B'$ 上的射影 $B'C \perp BC'$, 由三垂线定理, $A'C \perp BC'$. 故异面直线 $A'C$ 和 BC' 成 90° 角.

说明: 在(1)与(2)中, 在其中一条直线上都有这样一点, 过这点所作的另一直线的平行线都在正方体的某个侧面上. 求此二异面直线所成的角时可利用这一点; 但在(3)中, 却不然, 如果勉强平行移动其中一条直线与另一条相交, 移动后直线与正方体的位置关系不明显, 使得问题的难度大大地增加了.

例5 设正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 的棱长为 a , 求异面直线 AB 与 $A'C$ 间的距离(图1-6).

解: $\because AB \parallel A'B'$,

$\therefore AB \parallel$ 平面 $A'B'C$.

因此, 异面直线 AB 和 $A'C$ 间的距离等于平行的直线 AB 和平面 $A'B'C$ 间的距离.

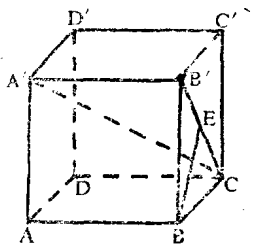


图1-6

取线段 $B'C$ 的中点 E . 由于 $A'B' \perp$ 平面 $BCC'B'$, $\therefore A'B' \perp BE$, 或写成 $BE \perp A'B'$, 又显然 $BE \perp B'C$, $\therefore BE \perp$ 平面 $A'B'C$. 所以 BE 的长就是平行的直线 AB 和平面 $A'B'C$ 间的距离, 从而也就是二异面直线 AB 和 $A'C$ 间的距离了. 显然, 它等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

习 题 一

1. 求证：如果一个四边形的两条对角线相交，那么，它一定是平面图形。
2. 求证：和两条异面直线 AB , CD 都相交的直线 AC , BD 必定是异面直线。
3. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，求异面直线 AB 和 $A'C$ 所成的角。
4. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中， E , F , G , H 分别为棱 AB , BC , $C'D'$, CC' 的中点。直线 EF 和 GH 的位置关系如何？
5. 设正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a 。二异面直线 AA' 和 BC 间距离是多少？

第二讲 直线与平面的位置关系

教学目的 复习直线与平面的位置关系。

教学要求

- (1) 了解直线与平面的各种位置关系；
- (2) 掌握直线与平面垂直、平行的定义、判定定理及性质定理；
- (3) 理解与平面斜交的直线在平面内的射影及它和平面所成角的概念；
- (4) 三垂线定理及其逆定理，要会证明，并熟练运用。

教学内容

要点：

- (1) 直线与平面的位置关系有三种可能：1° 直线在平面上；2° 平行；3° 相交（垂直或斜交）。
- (2) 直线与平面垂直、平行的定义、判定定理及性质