数学机械化丛书

实域论

曾广兴　著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书旨在比较系统地介绍实域理论中的内容、方法和结论. 对于进一步学习实代数几何的人来说，本书应是一本必读物.

全书共分 9 章. 前两章围绕著名的 Artin-Schreier 理论，介绍与实域、序域和实闭域相关的概念和结论. 第三章讨论了域的实赋值和实位以及它们与序之间的相容性. 第四章介绍 E. Artin 对 Hilbert 第十七问题的解答，同时研究了 Hilbert 第十七问题的逆问题. 第五章讨论了实域上的二次型及其密切相关的半序，由此建立了一些重要的结果，其中包括 Hilbert 第十七问题在定量方面的结论. 在第六章中，几类特殊的实域和序域被研究，这些域包括 SAP 域、欧氏域、遗传欧氏域、Pythagoras 域和遗传 Pythagoras 域等. 第七章介绍了适合实闭域的 Tarski-Seidenberg 原理与转移原理，并应用于实零点定理的建立. 第八章涉及域的高层序理论， Artin-Schreier 理论在此获得推广. 在第九章中，一些与实域理论有关的构造性结论被介绍，其中包括柱形代数分解和半正定多项式的判定等.

本书可作为代数专业的研究生教材，也可供专业研究人员参考.

图书在版编目 (CIP) 数据

实域论 / 曾广兴著. —北京：科学出版社， 2003
(数学机械化丛书 / 吴文俊主编)
ISBN 7-03-012089-2

Ⅰ. 实… Ⅱ. 曾… Ⅲ. 实数域 Ⅳ. O156.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 074135 号

责任编辑：吕　虹 / 责任校对：陈丽珠
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：黄华斌　陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社编务公司制作
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年12月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2003年12月第一次印刷　印张：23 1/4
印数：1－2 500　字数：420 000

定价：50.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉)

《数学机械化丛书》获国家基础研究发展规划项目“数学机械化与自动推理平台”与“数学机械化应用推广专项经费”资助

《数学机械化丛书》前言[①]

16,17 世纪以来，人类历史上经历了一场史无前例的技术革命，出现了各种类型的机器，取代各种形式的体力劳动，使人类进入一个新时代. 几百年后的今天，电子计算机已开始有条件地代替一部分特定的脑力劳动，因而人类已面临另一场更宏伟的技术革命，处在又一个新时代的前夕. 数学是一种典型的脑力劳动，它在这一场新的技术革命中，无疑将扮演一个重要的角色. 为了了解数学在当前这场革命中所扮演的角色，就应对机器的作用，以及作为数学的脑力劳动的方式，进行一定的分析.

1. 什么是数学的机械化

不论是机器代替体力劳动，或是计算机代替某种脑力劳动，其所以成为可能，关键在于所需代替的劳动已经"机械化"，也就是说已实现了刻板化或规格化. 正因为割麦、刈草、纺纱织布的动作已经是机械化刻板化了的，因而可据此造出割麦机、刈草机、纺纱机、织布机来. 也正因为加减乘除开方等运算这一类脑力劳动，几千年来就已经是机械刻板地进行，才有可能使得 17 世纪的法国数学家帕斯卡利用齿轮传动造出了第一台机械计算机 —— 加法机，并由莱布尼茨改进成为也能进行乘法的机器. 数学问题的机械化，就要求在运算或证明过程中，每前进一步之后，都有一个确定的、必须选择的下一步，这样沿着一条有规律的、刻板的道路，一直达到结论.

在中小学数学的范围里，就有着不少已经机械化了的课题. 除了四则、开方等运算外，解线性联立方程组就是一个很好的例子. 在中学用的数学课本中，往往介绍解线性方程组的各种"消去法"，其求解过程是一个按一定程序进行的计算过程，也就是一种机械的、刻板的过程. 根据这一过程编成程序，由电子计算机付诸实施，就可以不仅机器化而且达到自动化，在几分钟甚至几秒钟之内求出一个未知数多至上百个的线性方程组的解答来，这在手工计算几乎是不可能的. 如果用手工计算，即使是解只有三、四个未知数的方程组，也将是繁琐而令人厌烦的. 现代化的国防、经济建设中，大量出现的例如网络一类的问题，往往可归结为求解很多未

---

① 20 世纪 70,80 年代之交，我尝试用计算机证明几何定理取得成功，并由此提出了数学机械化的设想. 先后在一些通俗报告与写作中，解释数学机械化的意义与前景，例如 1978 年发表于《自然辩证法通讯》的《数学机械化问题》以及 1980 年发表于《百科知识》的《数学的机械化》. 两文都重载于 1995 年由山东教育出版社出版的《吴文俊论数学机械化》一书. 经过 20 多年众多学者的努力，数学机械化在各个方面都取得了丰富多彩的成就，并已出版了多种专著，汇集成现在的数学机械化丛书. 现据 1980 年的《百科知识》的"数学的机械化"一文，稍加修改并作增补，以代丛书前言.

知数的线性方程组. 这使得已经机械化了的线性方程解法在四个现代化中起着一种重要作用.

即使是不专门研究数学的人们, 也大都知道, 数学的脑力劳动有两种主要形式: 数值计算与定理证明 (或许还应包括公式推导, 但这终究是次要的). 著名的数理逻辑学家美国洛克菲勒大学教授王浩先生在一篇有名的《向机械化数学前进》的文章中, 曾列举了这两种数学脑力劳动的若干不同之点. 我们可以简略而概括地把它们对比一下:

计算	证明
易	难
繁	简
刻板	灵活
枯燥	美妙

计算, 如已经提到过的加减乘除开方与解线性方程组, 其所以虽繁而易, 根本原因正在于它已经机械化. 而证明的巧而难, 是大家都深有体会的, 其根本原因也正在于它并没有机械化. 例如, 我们在中学初等几何定理的证明中, 就经常要依靠诸如直观、洞察、经验, 以及其他一些模糊不清的原则, 去寻找捷径.

2. 从证明的机械化到机器证明

一个值得提出的问题是: 定理的证明是不是也能像计算那样机械化, 因而把巧而难的证明, 化为计算那样虽繁而易的劳动呢? 事实上, 这一证明机械化的设想, 并不始自今日, 它早就为 17 世纪时的大哲学家、大思想家和大数学家笛卡儿和莱布尼茨所具有, 只是直到 19 世纪末, 希尔伯特 (德国数学家, 1862~1943) 等创立并发展了数理逻辑, 这一设想才有了明确的数学形式, 又由于 20 世纪 40 年代电子计算机的出现, 才使这一设想的实现有了现实可能性.

从 20 世纪 20 、 30 年代以来, 数理逻辑学家们对于定理证明机械化的可能性, 进行了大量的理论探讨, 他们的结果大都是否定的. 例如哥德尔 (Gödel) 等的一条著名定理就说, 即使看来最简单的初等数论这一范围, 它的定理证明的机械化也是不可能的. 另一方面, 1950 年波兰数学家塔斯基 (Tarski) 则证明了初等几何 (以及初等代数) 这一范围的定理证明, 却是可以机械化的. 只是塔斯基的结果近于例外, 在初等几何及初等代数以外的大量结果都是反面的, 即机械化是不可能的. 1956 年以来美国开始了利用电子计算机做证明定理的尝试. 1959 年王浩先生设计了一个机械化方法, 用计算机证明了罗素等著的《数学原理》这一经典著作中的几百条定理, 只用了 9 分钟, 在数学与数理逻辑学界引起了轰动. 一时间, 机器证明的前景似乎非常乐观. 例如 1958 年时就有人曾经预测: 在 10 年之内计算机将

发现并证明一个重要的数学新定理. 还有人认为, 如果这样, 则不仅许多著名哲学家与数学家, 如皮亚诺、怀特海、罗素、希尔伯特以及图灵等人的梦想得以实现, 而且计算将成为科学的皇后, 人类的主人!

然而, 事情的发展却并不如预期那样美好. 尽管在 1976 年, 美国的哈肯等人, 在高速计算机上用了 1200 小时的计算时间, 解决了数学家们 100 多年来所未能解决的一个著名难题 —— 四色问题, 因此而轰动一时, 但是, 这只能说明计算机作为定理证明的辅助工具有着巨大潜力, 还不能认为这样的证明就是一种真正的机器证明. 用王浩先生的说法, 哈肯等关于四色定理的证明是一种使用计算机的特例机证, 它只适用于四色这一特殊的定理, 这与所谓基础机器证明之能适用于一类定理者有别. 后者才真正体现了机械化定理证明, 进而实现机器证明的实质. 另一面, 在真正的机械化证明方面, 虽然塔斯基在理论上早已证明了初等几何的定理证明是能机械化的, 还提出了据以造判定机也即是证明机的设想, 但实际上他的机械化方法非常繁, 繁到不可收拾, 因而远远不是切实可行的. 1976 年, 美国做了许多在计算机上证明定理的实验, 在塔斯基的初等几何范围内, 用计算机所能证明的只是一些近于同义反复的 "儿戏式" 的 "定理". 因此, 有些专家曾经发出过这样悲观的论调: 如果专依靠机器, 则再过 100 年也未必能证明出多少有意义的新定理来.

3. 一条切实可行的道路

1976 年冬, 我们开始了定理证明机械化的研究. 1977 年春取得了初步成果, 证明初等几何主要一类定理的证明可以机械化. 在理论上说来, 我们的结果已包括在塔斯基的定理之中. 但与塔斯基的结果不同, 我们的机械化方法是切实可行的, 即使用手算, 依据机械化的方法逐步进行, 虽然繁复, 也可以证明一些艰深的定理.

我们的方法主要分两步, 第一步是引进坐标, 然后把需证定理中的假设与终结部分都用坐标间的代数关系来表示. 我们所考虑的定理局限于这些代数关系都是多项式等式关系的范围, 例如平行、垂直、相交、距离等关系都是如此. 这一步可以叫做几何的代数化. 第二步是通过代表假设的多项式关系把终结多项式中的坐标逐个消去, 如果消去的结果为零, 即表明定理正确, 否则再作进一步检查. 这一步完全是代数的, 即用多项式的消元法来验证.

上述两步都可以机械与刻板地进行. 根据我们的机械化方法编成程序, 以在计算机上实现机器证明, 并无实质上的困难. 事实上中国科学院数学研究所的某些同志以及国外的王浩先生都曾在计算机上试行过. 我们自己也曾在国产的长城 *203* 台式机上证明了像西摩松线那样不算简单的定理. 1978 年初我们又证明了初等微

分几何中主要的一类定理证明也可以机械化. 而且这种机械化方法也是切实可行的, 并据此用手算证明了不算简单的一些定理.

从我们的工作中可以看出, 定理的机械化证明, 往往极度繁复, 与通常既简且妙的证明形成对照, 这种以量的复杂来换取质的困难, 正是利用计算机所需要的.

在电子计算机如此发展的今天, 把我们的机械化方法在计算机上实现不仅不难, 而且有一台微型的台式机也就够了. 就像我们曾经使用过的长城 203, 它的存数最多只能到 234 个 10 进位的 12 位数, 就已能用以证明西摩松线那样的定理. 随着超大规模集成电路与其他技术的出现与改进, 微型机将愈来愈小型化而内存却愈来愈大, 功能愈来愈多, 自动化的程度也愈来愈高. 进入 21 世纪以后, 这一类方便的小型机器将为广大群众普遍使用. 它们不仅将成为证明一些不很简单的定理的武器, 而且还可用以发现并证明一些艰深的定理, 而这种定理的发现与证明, 在数学研究手工业式的过去, 将是不可想象的. 这里我们应该着重指出, 我们并不鼓励以后人们将使用计算机来证明甚至发现一些有趣的几何定理. 恰恰相反, 我们希望人们不再从事这种虽然有趣却即便是对数学甚至几何学本身也已意义不大的工作, 而把自己从这种工作中解放出来, 把自己的聪明才智与创造能力贯注到更有意义的脑力劳动上去.

还应该指出, 目前我们所能证明的定理, 局限于已经发现的机械化方法的范围, 例如初等几何与初等微分几何之内. 而如何超出与扩大这些机械化的范围, 则是今后需要长期探索的理论性工作.

4. 历史的启示与中国古代数学

我们发现几何定理证明的机械化方法是在 1976 至 1977 年之间. 约在两年之后, 我们发现早在 1899 年出版的希尔伯特的经典名著《几何基础》中, 就有着一条真正的正面的机械化定理: 初等几何中只涉及从属与平行关系的定理证明可以机械化. 当然, 原来的叙述并不是以机械化的语言来表达的, 也许就连希尔伯特本人也并没有对这一定理的机械化意义有明确的认识, 自然更不见得有其他人提到过这一定理的机械化内容. 希尔伯特是以公理化的典范而著称于世的, 但我认为, 该书更重要之处, 是在于提供了一条从公理化出发, 通过代数化以到达机械化的道路. 自然, 处于希尔伯特以及其后数学的一张纸一支笔的手工作业时代里, 公理化的思想与方法得到足够的重视与充分的发展, 而机械化的方向与意义受到数学家的忽视是完全可以理解的. 但在电子计算机已日益普及, 因而繁琐而重复的计算已成为不足道的现代, 机械化的思想应比公理化思想受到更大重视, 似乎是合乎实际的.

其次应该着重指出, 我们在从事机械化定理证明工作获得成果之前, 对塔斯基

的已有工作并无接触，更没有想到希尔伯特的《几何基础》会与机械化有任何关系. 我们是在中国古代数学的启发之下提出问题并想出解决办法来的.

说起来道理也很简单：中国的古代数学基本上是一种机械化的数学. 四则运算与开方的机械化算法由来已久. 汉初完成的《九章算术》中，对开平方、开立方与解线性联立方程组的机械化过程，都有详细说明. 宋代更发展到高次代数方程求数值解的机械化算法.

总之各个数学领域都有定理证明的问题，并不限于初等几何或微分几何. 这种定理证明肇始于古希腊的欧几里得传统，现已成为近代纯粹数学或核心数学的主流. 与之相异，中国的古代学者重视的是各种问题特别是来自实际要求的具体问题的解决. 各种问题的已知数据与要求的数据之间，很自然地往往以多项式方程的形式出现. 因之，多项式方程的求解问题，也就自然成为中国古代数学家研究的中心问题. 从秦汉以来，所研究的方程由简到繁，不断有所前进，有所创新. 到宋元时期，更出现了一个思想与方法的飞跃：天元术的创立.

“天元术”到元代朱世杰时又发展成四元术，所引入的天元、地元、人元、物元实际上相当于近代的未知元或未知数. 将这些未知元作为通常的已知数那样加减乘除，就可得到与近代多项式和有理函数相当的概念与相应的表达形式和运算法则. 一些几何性质与关系很容易转化成这种多项式或有理函数的形式及其关系. 这使得过去依题意列方程这种无法可循需要高度技巧的工作从此变得轻而易举. 朱世杰 1303 年的《四元玉鉴》又给出了解任意多至四个未知元的多项式方程组的方法. 这里限于 4 个未知元只是由于所使用的计算工具（算筹和算板）的限制. 实质上他解方程的思想路线与方法完全可以适用于任意多的未知元.

不问可知，在当时的具体条件下，朱世杰的方法有许多缺陷. 首先，当时还没有复数的概念，因此朱世杰往往限于求出（正）实值. 这无可厚非，甚至在 17 世纪 Descartes 的时代也还往往如此. 但此外朱世杰在方法上也未臻完善. 尽管如此，朱世杰的思想路线与方法步骤是完全正确的，我们在上世纪 70 年代之末，遵循朱世杰的思想与方法的基本实质，采用美国数学家 J.F.Ritt 在 1935, 1950 年关于微分方程代数研究书中所提供的某些技术，得出了解任意复多项式方程组的一般算法，并给出了全部复数解的具体表达形式. 此后又得出了实系数时求实解的方法，为重要的优化问题提供了一个具体的方法.

由于多种问题往往自然导致多项式方程组的求解，因而我们解方程的一般方法可被应用于形形色色的问题. 这些问题可以来自数学自身，也可以来自其他自然科学或工程技术. 在本丛书的第一本吴文俊的《数学机械化》一书中，可以看到这些应用的实例. 工程技术方面的应用，在本丛书中有高小山的《几何自动作图与智能 CAD 》与陈发来和冯玉瑜的《代数曲面造型》两本专著. 上述解多项

式方程组的一般方法已推广至代微分方程的情形. 许多应用以及相应论著正在酝酿之中.

5. 未来的技术革命与时代的使命

宋元时代天元术与四元术的创造, 把许多问题特别是几何问题转化成代数方程与方程组的求解问题. 这一方法用于几何可称为几何的代数化. 12 世纪的刘益将新法与“古法”比较, 称“省功数倍”. 这可以说是减轻脑力劳动使数学走上机械化道路的一项伟大的成就.

与天元术的创造相伴, 宋元时代的数学又引进了相当于现代多项式的概念, 建立了多项式的运算法则和消元法的有关代数工具, 使几何代数化的方法得到了系统的发展, 这些可见于宋元时代幸以保存至今的杨辉、李冶、朱世杰的许多著作之中. 几何的代数化是解析几何的前身, 这些创造使我国古代数学达到了又一个高峰. 可以说, 当时我国已到达了解析几何与微积分的大门, 具备了创立这些数学关键领域的条件, 但是各种原因使我们数学的雄伟步伐就在这些大门之前停顿下来. 几百年的停顿, 使我们这个古代的数学大国在近代变成了数学上的纯粹入超国家. 然而, 我国古代机械化与代数化的光辉思想和伟大成就是无法磨灭的. 本人关于数学机械化的研究工作, 就是在这些思想与成就启发之下的产物, 它是我国自《九章算术》以迄宋元时期数学的直接继承.

恩格斯曾经指出, 枪炮的出现消除了体力上的差别, 使中世纪的骑士阶级从此销声匿迹, 为欧洲从封建时代进入到资本主义时代准备了条件. 近年有些计算机科学家指出, 个人用计算机的出现, 其冲击作用可与枪炮的出现相比. 枪炮使人们在体力上难分强弱, 而个人用计算机将使人们在智力上难分聪明愚鲁. 又有人对数学的未来提出看法, 认为计算机的出现, 将使数学现在一张纸一支笔的方法, 在历史的长河中, 无异于石器时代的手工方法. 今天的数学家们, 不得不面对计算机的挑战, 但是, 也不必妄自菲薄. 大量繁复的事情交给计算机去做了, 人脑将仍然从事富有创造性的劳动.

我国在体力劳动的机械化革命中曾经掉队, 以致造成现在的落后状态. 在当前新的一场脑力劳动的机械化革命中, 我们不能重蹈覆辙. 数学是一种典型的脑力劳动, 它的机械化有着许多其他类型脑力劳动所不及的有利条件. 它的发扬与实现对我国的数学家是一种时代的使命. 我国古代数学的光辉, 都鼓舞着我们为实现数学的机械化, 在某种意义上也可以说是真正的现代化而勇往直前.

吴文俊

2002 年 6 月于北京

前言

实域理论的发展应追溯到著名的 Hilbert 第十七问题. 根据第十七问题的特有形式, E. Artin 和 O. Schreier 洞察到实数域及其子域的最本质的属性, 这些属性包括两个方面: 一是与平方和相关的 "实性"; 二是与运算相适应的元素之间大小关系即 "序" 关系. E. Artin 和 O. Schreier 把这些本质属性引进到域范畴中, 由此建立了著名的 Artin–Schreier 理论, 这一理论是实域理论的基石. 正是基于他和 O. Schreier 所建立的理论, Artin 肯定地解答了 Hilbert 第十七问题, 这使得 Artin 进入 Hilbert 问题解答者的光荣行列中.

由于实域具有相当的普遍性, 且其理论和方法的适用性也颇为广泛, 从而自 Artin 以来, 有关实域的研究一直深入开展, 由此逐渐发展成 "实域论" 这门独特的数学分支. 实域理论不仅是一门自成体系的学科, 同时也是当前正在日益发展的实代数几何的基础. 从数学机械化的发展趋势来看, 代数闭域上代数方程组的求解以及等式型几何命题的自动推理已获丰硕成果, 而实代数方程组的求解以及不等式 (包括不等式型几何命题) 的研究正方兴未艾. 与前者相比, 后者的研究特点正好体现在 "实性" 和 "序" 两个方面. 从而, 实代数方程组的求解以及不等式的研究必然涉及到实域理论中的有关概念、方法和结果. 因此, 对于从事实代数几何和构造性实代数几何方面研究工作的人们来说, 了解实域的有关理论和方法是必要的.

本书力图较全面地介绍实域理论在各个方面的发展, 使读者在兴趣之余有能力进一步阅读有关文献. 为方便读者更进一步了解实域理论的有关内容, 书末列出了大量参考文献以飨读者. 本书要求读者具备抽象代数和一般的域论知识. 限于作者的学识水平, 遗漏与谬误在所难免, 敬请读者不吝指正.

作者是在戴执中先生的指引下, 才得以迈进实域理论和实代数几何这一领域. 在此, 谨向戴执中先生致以衷心谢意. 作者感谢吴文俊院士以及高小山研究员为首席专家的国家九七三项目 "数学机械化与自动推理平台" 专家委员会, 正是由于他们的关照和支持, 作者才有幸成为项目组成员, 且本书被接纳于数学机械化丛书之中. 还应该感谢曾苹同志, 她为书稿的打印付出了辛勤的劳动.

作 者

于南昌

常用记号一览表

$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{Z}$	整数集 (环)
$\mathbb{Q}$	有理数域
$\mathbb{R}$	实数域
$A \setminus B$	集合 B 在集合 A 中的补集
$A \times B$	集合 A 和集合 B 的笛卡儿积
A^n	集合 A 的 n 重 (笛卡儿) 幂集
$\dot{T}$	环 (或域) 的子集 T 中全体非零元组成的集合
$[K:F]$	域扩张 K/F 的扩张次数
$[G:H]$	子群 H 在群 G 中的指标
$\|G\|$	群 G 的阶
$\deg f(x)$	单元多项式 $f(x)$ 的次数
$f'(x)$	单元多项式 $f(x)$ 的微商 (导数)
$\deg(f;x)$	多元多项式 f 关于变元 x 的次数
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$	多元多项式 f 关于变元 x 的偏导数
$\mathrm{Res}(f,g;x)$	多项式 f 和 g 关于变元 x 的结式
A^{T}	矩阵 A 的转置矩阵

目　录

第一章　实域和序域

本章主要介绍域的“实性”、“序”与“亚序”等基本概念，同时研究它们之间的相互关系. 作为序与域扩张的两者结合，我们讨论序在域扩张上可拓展的充要条件. 此外，我们对一个域的全体序组成的集合赋予拓扑结构，使之成为一个拓扑空间 —— 序空间.

§1.1　实域、序和亚序

设 F 是一个域，其中零元和单位元分别记作 0 和 1. 对此，我们可构造 F 的如下非空子集：

$$S_F := \left\{ \text{有限和} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \middle| x_i \in F, i = 1, \cdots, m \right\}.$$

定义 1.1.1　一个域 F 称作形式实域 (或简称实域), 若 $-1 \notin S_F$.

显然，实数域 $\mathbb{R}$ 是实域，且一个实域的所有子域都是实域. 此外，实域的特征必为零. 事实上，如若域 F 的特征为素数 p, 则有 $-1 = 1^2 + \cdots + 1^2 (p-1$ 项$) \in S_F$. 因此，我们可认定：有理数域 $\mathbb{Q}$ 包含在每个实域之中.

为表达上的方便，对于域 F 的任意子集 T, 我们引入如下记号：

$$-T = \{-a \mid a \in T\};$$

$$T + T = \{a + b \mid a, b \in T\};$$

$$T \cdot T = \{ab \mid a, b \in T\}.$$

定义 1.1.2　设 P 是域 F 的一个子集. 若下列条件成立：

(1) $P \neq F$;

(2) $F = P \cup -P$;

(3) $P + P \subseteq P$, 且 $P \cdot P \subseteq P$,

则称 P 是 F 的一个正锥.

注　(1) 当 P 是域 F 的正锥时，显然有 $0, 1 \in P$, 而 $-1 \notin P$. 此时还有 $P \cap -P = \{0\}$; 否则，有非零 $a \in P \cap -P$. 从而对于任意 $x \in F$, 当 $xa^{-1} \in P$ 时，$x = (xa^{-1})a \in P \cdot P \subseteq P$; 当 $xa^{-1} \in -P$ 时，$x = (xa^{-1})a \in (-P) \cdot (-P) \subseteq P$, 这导致矛盾：$F = P$. 此外易知，对于每个 $x \in F$, $x^2 \in P$.

(2) 若 P_1 和 P_2 都是域 F 的正锥，且 $P_1 \subseteq P_2$, 则 $P_1 = P_2$. 事实上，如若不然，则有 $a \in P_2$ 但 $a \notin P_1$. 从而 $a \in -P_1 \subseteq -P_2$. 于是 $a \in P_2 \cap -P_2 = \{0\}$, 即

$a = 0 \in P_1$, 矛盾.

定义 1.1.3 域 F 中元素之间的一个二元关系 $\leqslant$ 称作 F 的一个序，如果下列条件成立:

(1) 对于任意 $a \in F$, $a \leqslant a$;

(2) 若 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a$, 则 $a = b$;

(3) 若 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant c$, 则 $a \leqslant c$;

(4) 对于任意 $a, b \in F$, $a \leqslant b$ 或者 $b \leqslant a$;

(5) 若 $a \leqslant b$, 则对于任意 $c \in F$, $a + c \leqslant b + c$;

(6) 若 $0 \leqslant a$ 且 $0 \leqslant b$, 则 $0 \leqslant ab$.

"正锥" 和 "序" 这两个概念在表述方面尽管迥然不同，但它们之间可互相转化. 事实上，对于域 F 的一个序 $\leqslant$, 集合 $P_{\leqslant} := \{a \in F \mid 0 \leqslant a\}$ 是 F 的一个正锥. 反过来，对于域 F 的一个正锥 P, 我们可按如次方式规定 F 上的一个二元关系 $\leqslant_P$: 对于 $a, b \in F$, $a \leqslant_P b$ 当且仅当 $b - a \in P$. 容易验证: $\leqslant_P$ 是域 F 的一个序. 进一步可知, $P_{\leqslant_P} = P$, 且 $\leqslant_{P_{\leqslant}} = \leqslant$. 正因为这一缘故，有时我们不加区别地把 "正锥" 也称作 "序".

如果 $\leqslant$(或 P) 是域 F 的一个序 (或正锥), 那么我们将迳称 $(F, \leqslant)$(或 (F, P)) 是一个序域 . 对于域 F 的一个序 $\leqslant$ 以及 $a, b \in F$, 若 $a \leqslant b$ 但 $a \neq b$, 则习惯地记作 $a < b$. 此时，域 F 中一个元素 a 称作正元素，如果 $0 < a$, 这等价于: a 是 $P_{\leqslant}$ 中的非零元素，其中 $P_{\leqslant}$ 为 $\leqslant$ 的对应正锥.

例 1 设 $\mathbb{R}$ 为实数域，且记 $\mathbb{R}^2 = \{a^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$. 容易验证, $\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个正锥，且 $\mathbb{R}^2$ 的对应序为实数之间通常的大小关系.

例 2 设 $\mathbb{Q}$ 为有理数域，且 $\mathbb{Q}^+$ 为所有非负有理数组成的集合，则 $\mathbb{Q}^+$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个正锥，且 $\mathbb{Q}^+$ 的对应序为通常的有理数之间大小关系.

例 3 设 (F, P) 是一个序域, t 是域 F 上一个未定元，构造域 $F(t)$ 的如下子集:

$$P_{0+} := \{0\} \cup \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \middle| f(t),\, g(t) \in F[t], \text{且} f(t)g(t) \text{的尾项系数属于} P \right\}.$$

容易验证: P_{0+} 是 $F(t)$ 的一个正锥.

此外，我们还可以构造域 $F(t)$ 的如下子集:

$$P_{+\infty} := \{0\} \cup \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \middle| f(t),\, g(t) \in F[t], \text{且} f(t)g(t) \text{的首项系数属于} P \right\}.$$

同样可验证: $P_{+\infty}$ 是 $F(t)$ 的一个正锥.