高等数学自学丛书

线性代数

王楣卿 编

高等数学自学丛书

线性代数

王楣卿 编

山东教育出版社

一九八三年·济南

高等数学自学丛书

线 性 代 数

王栩卿 编

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　山东人民印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　13印张　276千字

1983年1月第1版　1983年1月第1次印刷

印数1—6,000

书号 13275·5　定价 1.10 元

内 容 提 要

本书是高等数学自学丛书之一，内容包括行列式、解线性方程组、n维向量、线性方程组的一般理论、矩阵、线性空间、线性变换、二次形等。

本书适合中等学校数学教师、理工科大学生及知识青年阅读，也可作为高等院校有关专业的教学参考书。

出 版 说 明

为了满足广大读者自学高等数学的需要，我们出版了这套高等数学自学丛书，包括《数学分析基础》、《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《无穷级数》、《多项式代数》、《线性代数》、《抽象代数》、《空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《布尔代数》等十册。

这套丛书起点较低，系统性较强，次序的编排尽量作到由浅入深，由易到难，注意循序渐进，并适当渗透了一些现代数学的观点。在编写过程中，力求作到内容讲述详细，文字通俗流畅；书中安排了较多的例题和习题，书末附有习题答案或提示。因此，这套丛书适合自学，也可以作为这些课程的教学参考书。

这套丛书由山东师范大学数学系主持编写。此外，还得到山东大学数学系、曲阜师范学院数学系、聊城师范学院数学系等单位的大力支持和帮助，在此一并致谢。

一九八二年四月

目　录

第一章　行 列 式

行列式是线性代数中一个很重要的概念．本章的主要内容是：给出行列式定义，讨论行列式的性质和介绍求行列式的值的方法．

§1·1　二阶与三阶行列式

我们先介绍一个概念：数域．

在数学上，为了研究问题方便，常常把一些数放在一起，作为一个整体来看，我们把这个整体叫做一个数集．例如，把全体自然数叫做自然数集，把全体整数、有理数、实数与复数分别叫做整数集、有理数集、实数集与复数集．当然也可以考虑"形如$a+b\sqrt{2}$（a、b为有理数）的数的数集"、"形如$a\sqrt{3}$（a为整数）的数的数集"等等．

定义：在一个至少有两个数的数集中，如果任意两个数的和、差、积、商（零不作除数）仍在这个数集中，那么这个数集就叫做数域．

容易验证，有理数集、实数集和复数集都是数域，而自然数集和整数集都不是数域．

下面讲解本节的主要内容——行列式的来源．

行列式概念是从解含有两个与三个未知量的线性方程组的公式引出来的．

我们先来看含有两个未知量x_1、x_2的两个方程式的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

用加减消去法求解，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

因此，当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，(1)的解一定具有下面的形式：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{2}$$

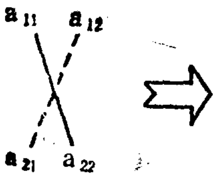
反过来，不难验证，由(2)式确定的x_1和x_2的值，也一定适合(1)，因此当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，方程组(1)有唯一的解，并且这解由公式(2)给出。

方程组(1)的解的公式(2)，形式比较复杂，不便于记忆，因此，有必要研究一下公式(2)的特点，从中找出规律性。

(1)的系数可以排成下表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{3}$$

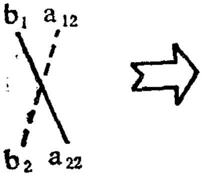
(2)式的分母，恰好等于位于表(3)中左上角到右下角（我们把它叫主对角线）上两个数的乘积减去位于右上角到左下角（我们把它叫次对角线）上两个数的乘积。于是(2)式的分母可以用下列对角线规则计算：



实线上两数的积取正号　$+a_{11}a_{22}$

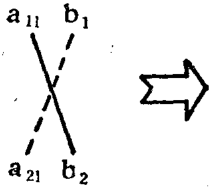
虚线上两数的积取负号　$\begin{array}{l} -a_{12}a_{21}\ \ (+ \\ \hline a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{array}$

(2)式的两个分子也可以用同样方法计算：



$+b_1a_{22}$

$\begin{array}{l} -a_{12}b_2\ \ (+ \\ \hline b_1a_{22}-a_{12}b_2 \end{array}$



$+a_{11}b_2$

$\begin{array}{l} -b_1a_{21}\ \ (+ \\ \hline a_{11}b_2-b_1a_{21} \end{array}$

为方便起见，我们规定：

设有四个数a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}，我们把代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$叫做一个二阶行列式，并且用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

来表示，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

在二阶行列式中，横写的叫做行，竖写的叫做列。一个二阶行列式含有两行和两列。$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$叫做二阶行列式的展开式，乘积$a_{11}a_{22}$及$a_{12}a_{21}$叫做这个行列式的项，而$a_{ij}$（$i$，$j=1$，$2$）叫做这个行列式的元素，$a_{ij}$的第一个下标$i$表示它所在的行，第二个下标$j$表示它所在的列。例如$a_{12}$表

示它位于第一行第二列。

按规定，二阶行列式的值由对角线规则计算。例如：

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\times(-2)-3\times(-1)=-4+3=-1,$$

$$\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ -b^2 & a-b \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)-(-b^2)\times 1$$

$$= a^2-b^2+b^2=a^2.$$

有了二阶行列式概念，就可以把(2)式写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{4}$$

其中D，D_1和D_2分别表示：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

D叫做方程组(1)的系数行列式。

于是，当系数行列式$D\neq 0$时，方程组(1)的解可以表示成(4)的形式。

例 1 解方程组：

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-7=0 \\ x_1-3x_2+2=0 \end{cases}$$

解：把常数项移到等号右边，使原方程组化为：

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=7 \\ x_1-3x_2=-2 \end{cases}$$

因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-7\neq 0$$

故可应用公式(4)求解。又因为

$$D_1=\begin{vmatrix}7 & 1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-19,\qquad D_2=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-11$$

所以，原方程组的解是：

$$x_1=\frac{19}{7},\qquad x_2=\frac{11}{7}$$

从上面的例子可以看出，利用二阶行列式来解两个未知量的线性方程组是很方便的。

我们再来看含有三个未知量x_1、x_2、x_3的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{5}$$

用加减消去法解(5)。以数$a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$乘(5)的第一式，以数$a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$乘(5)的第二式，以数$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$乘(5)的第三式，然后把这三个新的方程加起来，就可以使x_2与x_3的系数都等于零，得出：

$$\begin{aligned}(&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}\\ &-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3\\ &+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3\end{aligned}$$

所以，当

$$\begin{aligned}D=&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}\\ &-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0\end{aligned}\tag{*}$$

时，就得到

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}} \\
&\quad \frac{-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}, \\
&\text{（用类似方法，可以求得）} \\
x_2 &= \frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}} \\
&\quad \frac{-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}, \\
x_3 &= \frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}} \\
&\quad \frac{-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

因此，当$D\neq 0$时，(5)的解一定是(6)的形式。

反过来，不难验证，由(6)式确定的x_1、x_2和x_3的值一定适合(5)。所以，当$D\neq 0$时，(5)有唯一解，这解由(6)式给出。

由于解(6)的表达式太复杂，我们仿照二阶行列式，规定：

设有9个数a_{ij}（$i=1, 2, 3$，$j=1, 2, 3$），我们把（*）式中的代数和D叫做三阶行列式，用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{7}$$

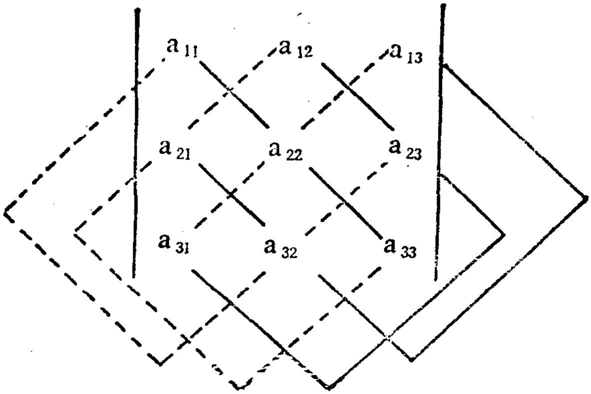
表示。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{8}$$

等式(8)的右端叫做三阶行列式(7)的展开式，a_{11}，a_{12}，…，a_{32}，a_{33}叫做这行列式的元素。

不难发现，三阶行列式也有与二阶行列式类似的对角线计算规则，这规则如下：

三阶行列式的对角线计算规则



实线上三数的积	$+a_{11}a_{22}a_{33}$
取正号	$+a_{12}a_{23}a_{31}$
	$+a_{13}a_{21}a_{32}$
虚线上三数的积	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
取负号	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

以上得到的六个数相加，即得(7)的展开式。

例如：

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-5)\cdot1+1\cdot3\cdot3$$

$$-1\cdot2\cdot1-(-1)\cdot3\cdot(-2)-2\cdot(-5)\cdot3$$

$$=-8+5+9-2-6+30$$

$$=28$$

引进三阶行列式概念后，我们可以把(6)式写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D},\qquad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{9}$$

其中D、D_1、D_2、D_3分别表示：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

D叫做方程组(5)的系数行列式。

于是当系数行列式$D\neq 0$时，方程组(5)的解可以用公式(9)来表示。

例2 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1-\ x_2+\ x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1 \\ \ x_1+3x_2-2x_3=4 \end{cases}$$

解： 因为

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&2&-5\\1&3&-2\end{vmatrix}=28,\qquad D_1=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&2&-5\\4&3&-2\end{vmatrix}=13,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&-5\\1&4&-2\end{vmatrix}=47,\qquad D_3=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&2&1\\1&3&4\end{vmatrix}=21.$$

所以，方程组的解是

$$x_1=\frac{13}{28},\qquad x_2=\frac{47}{28},\qquad x_3=\frac{21}{28}.$$

从上面的例子可以看出，用三阶行列式来解三个未知数的线性方程组是很方便的。

习 题 1·1

1. 计算下面的行列式：

(1) $\begin{vmatrix}2&1\\-3&5\end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix}-3&8\\-2&14\end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&1&3\end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix}2&1&2\\-3&0&4\\2&3&5\end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix}0&a&0\\b&0&d\\0&c&0\end{vmatrix}$ (7) $\begin{vmatrix}1&1&\omega\\1&1&\omega^2\\\omega^2&\omega&1\end{vmatrix}$

其中ω是 1 的虚三次方根。

2. 用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 5x+2y=3 \\ 11x-7y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22 \\ 2x-5y+4z=4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} bx-ay=-2ab \\ 2cy+3bz=bc \\ cx+az=0 \end{cases}$

其中a，b和c是不为零的常数。

3．证明下列等式：

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 \\ a_2 & kb_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

(4) $a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$