

東北師範大學函授講義

算術

遼寧人民出版社



東北師範大學函授講義

算 術

東北師範大學函授教育處編

劉 孟 德 編 譯

朱 靜 航 校 閱

遼寧人民出版社

一九五五年·瀋陽

算 術

東北師範大學函授教育處編

劉孟德編譯

朱靜航校閱

☆

遼寧人民出版社出版（瀋陽市翠雲街二十三號）

瀋陽市書刊出版業營業許可證文出字第—號

長春新華印刷廠印刷 新華書店瀋陽發行所發行

編號：4311·050×1168 紙張·8 磅印張·260,000 字

一九五五年九月第一版 一九五五年九月第一次印刷

印數：1 60,033 定價：八角五分

前 言

本書原是東北師範大學數學函授專修班的講義。它主要是根據蘇聯 Б. А. Тулинов 和 Я. Ф. Чекмарев 著的師範學校所用的算術，並結合我國實際而編譯的。兩年來，經過東北各地區的函授學員及教師進修學院試用的結果，大家一致認為它可以作為初中算術教師教學工作的參考。

當編譯這本書的時候，我系各室許多教師曾給予協助，並提出了很多寶貴意見；試用當中，又有許多函授學員來信和進修學院的老師提出批評，根據他們的意見又重新加以修改。在此，謹向這些同志致謝。

由於個人學識有限，時間又很倉促，錯誤之處，仍在所難免；希望讀者們多提意見，以便再版時修改。

最後，本書原稿經我系系主任朱靜航同志校閱，並提出許多指導性意見，在這裏一併致謝。

編 譯 者

一九五四年十二月三十日於東北師範大學數學系

目 錄

前 言

第一篇 整 數

第一章 自然數（正整數）概念

§ 1. 算術研究的對象·····	1
§ 2. 自然數列及其性質·····	1
§ 3. 數的起源、數°數公理、數°數過程·····	3
§ 4. 零·····	5
§ 5. 自然數的性質·····	5

第二章 進 位 制

§ 6. 進位制的概念·····	6
§ 7. 十進位制的讀法·····	7
§ 8. 十進位制數的寫法·····	8
§ 9. 數的讀法與寫法法則·····	8
§ 10. 書寫符號的發展史·····	9
§ 11. 其他進位制·····	12
§ 12. 進位制互化法·····	13

第三章 加 法

§ 13. 序 言·····	16
§ 14. 兩個自然數的和·····	16
§ 15. 算術中的符號·····	18
§ 16. 若干個數的和·····	18
§ 17. 加法定律（基本性質）及其推論·····	19
§ 18. 加法法則·····	21

第四章 減 法

§ 19. 定 義	24
§ 20. 差的性質及和減一數	26
§ 21. 加減式的性質	27
§ 22. 減去和的方法	29
§ 23. 減法法則	30
§ 24. 加法與減法驗算	32
§ 25. 括號在加減法時的應用	33

第五章 乘 法

§ 26. 定 義	34
§ 27. 乘法定律(基本性質)	36
§ 28. 由乘法的基本性質所得的推論	43
§ 29. 乘法法則	46

第六章 除 法

§ 30. 除法定義	49
§ 31. 除法中的特殊情形	50
§ 32. 帶餘數除法	51
§ 33. 除法的一般定義	52
§ 34. 由除法定義推出的結論	52
§ 35. 除法在解題上的應用	53
§ 36. 在乘法中已知數與未知數的關係	54
§ 37. 乘除式的基本性質	55
§ 38. 除法分配性	58
§ 39. 若干個數之積除以一已知數或若干個數之積	59
§ 40. 除法法則	60
§ 41. 乘法與除法的驗算	63
§ 42. 括號用法	65

第七章 和、差、積、商的變化

§ 43. 和的變化	67
§ 44. 差的變化	68
§ 45. 積的變化	71
§ 46. 商的變化	73

第八章 度量、米突制

§ 47. 量的概念	76
§ 48. 量的測度	76
§ 49. 量的性質	78
§ 50. 度 量	79
§ 51. 米突制	79
§ 52. 市用制	84
§ 53. 時 間	85
§ 54. 名 數	89
§ 55. 名數的換算	90
§ 56. 名數的運算法	91

第二篇 倍 數

第九章 倍數基本定理

§ 57. 定 義	100
§ 58. 若干個數的和爲一已知數的倍數的定理	101
§ 59. 兩數之差爲一已知數的倍數的定理	102
§ 60. 兩加數之和爲某一已知數的倍數的必要且充分條件	103
§ 61. 積爲一已知數的倍數	104
§ 62. 被除數、除數及餘數能被一已知數整除的定理	105

第十章 倍數的性質

§ 63. 2、5、4、25、8、125、3及9的倍數性質	105
-------------------------------	-----

§ 64. 7、11及13的倍數性質·····	108
§ 65. 倍數的一般性質的定理·····	109

第十一章 若干個數的最大公約數

§ 66. 互質的數·····	112
§ 67. 求最大公約數的基本定理·····	112
§ 68. 歐幾里德除法·····	113
§ 69. 用輾轉相除的方法求兩數的 H. O. Д. 的法則 ·····	114
§ 70. 最大公約數的基本性質·····	116
§ 71. 已知數除以最大公約數所得之商的定理及其他定理··	118
§ 72. 三個以上數的最大公約數·····	120

第十二章 最小公倍數

§ 73. 定 義·····	121
§ 74. 關於兩個自然數的最小公倍數性質的定理及其推論··	121
§ 75. 若干個數的最小公倍數的求法·····	123
§ 76. 最小公倍數的應用·····	124

第十三章 質 數 定 理

§ 77. 質數定義及其性質·····	125
§ 78. 自然數性質定理·····	125
§ 79. 關於質數無限多的歐幾里德定理·····	126
§ 80. 質數表·····	127
§ 81. 質數性質·····	131

第十四章 數 的 分 解

§ 82. 基本定理及其推論·····	131
§ 83. 數的質約數列的唯一性定理·····	134
§ 84. 數的質約數分解法·····	135

第十五章 利用數的分解求已知數的最 大公約數及最小公倍數

§ 85. 一個數被另一個數整除的必要且充分條件.....	136
§ 86. 兩數或若干個數(分解成標準分解數) 的最大公約數求法.....	137
§ 87. 兩數或若干個數(分解成標準分解數) 的最小公倍數求法.....	140

第三篇 分 數

第十六章 普 通 分 數

§ 88. 分數定義.....	142
§ 89. 分數相等及其基本性質.....	144
§ 90. 分數的約分及通分.....	147
§ 91. 分數的大小.....	150
§ 92. 分母等於 1 的分數.....	151
§ 93. 分數的分子及分母同加一數或同減一數.....	152

第十七章 分數運算法

§ 94. 分數加法.....	155
§ 95. 分數減法.....	160
§ 96. 分數乘法.....	164
§ 97. 分數除法.....	169
§ 98. 分數乘以或除以一整數或分數的實際意義.....	171
§ 99. 分數的分子或分母的變化對於分數值的變化.....	174
§100. 由已知數求分數,及由已知分數值求某數的問題.....	177

第十八章 小 數

§101. 定義,小數的讀法及寫法	178
§102. 小數化成分數.....	181
§103. 小數的大小.....	182
§104. 小數乘以或除以10的方幂的乘法或除法.....	182
§105. 小數運算法.....	184

第十九章 小數和普通分數

§106. 化普通分數爲小數.....	193
§107. 化普通分數爲近似小數.....	195
§108. 循環小數.....	197
§109. 化普通分數爲有限小數或循環小數.....	198
§110. 十進制小數的極限.....	203
§111. 分數發展簡史.....	207

第二十章 近似計算

§112. 在計算、測量和運算上的精確值和近似值.....	210
§113. 近似整數(或整數的近似值).....	211
§114. 小數近似值的概念.....	213
§115. 近似值的誤差.....	213
§116. 近似值的絕對誤差和相對誤差.....	215
§117. 近似值的計算.....	217

第二十一章 比和比例

§118. 比.....	227
§119. 比例(比例式).....	229
§120. 誘導比例.....	232
§121. 複比例.....	236
§122. 一系列比值相等的項的性質.....	239

第二十二章 比例理論的應用

§123. 成正比例和成反比例的量.....	240
§124. 比例法(三數法則).....	247
§125. 百分率.....	253
§126. 比例配分.....	258
§127. 混合法.....	270

第一篇 整 數

第一章 自然數(正整數)概念

§ 1. 算術研究的對象

算術是研究數、數的性質及其運算的科學，因之算術的主要任務在於確定數的概念，發展數的概念，並研究數與數間的關係及其運算性質等。關於數的研究是現代數學中最重要的部分，同時也是比較困難的部分，本書僅能有關於算術的一些基本問題作簡單的敘述。關於正的整數與分數這些問題嚴格的及完善的敘述，就遠超出本書的範圍了。

關於數的相互關係及其運算性質的研究，不僅對於某些特殊數而且對於任意數也是有效的。因此對這些問題的研究是具有重大意義和價值的。

在算術裏爲了研究這些一般的關係，我們常利用拉丁字母 a, b, c …來表示數。例如，在等式

$$a + b = 16$$

中，字母 a 及 b 表示着某些數值，如 $a = 14, b = 2$ 等。

又如在等式

$$a + b = b + a$$

中，字母 a 及 b 表示着任意數，也就是說 a 及 b 看成任意數時，這個等式都是正確的，當然也包含着 $a = 14, b = 2$ 的情形在內。不過第一個等式不能表示數的一般的性質，而第二個等式就可以表示着一切數（整數及分數）的一般性質，那就是：“和數”不因加數的順序的變更而變更。

今後對於一切數的一般性質的研究，我們將採取字母表示法。

§ 2. 自然數列及其性質

一、二、三、四、五、…等等這樣數^o下去的每個數叫正整數，也叫自

然數。自然數的概念導源於“集合”概念。“集合”就是指著圍繞在我們周圍具有某種特徵的一些單獨物體的總和，例如：一堆蘋果，一羣人，一隻手的五個手指，一班學生，甚至於一枝筆，都是一個集合。組成集合的單獨物體稱為集合的元素。某集合中的元素的個數如果是有限個，則此集合稱為**有限集合**；如果是無限個，則此集合稱為**無限集合**。

“一”可稱為數的**單位**。任意一個自然數我們可以把它看成是由一個或某些個單位所組成的集合。因為，為了組成一個任意集合，我們可以先取一個單獨的元素組成一個集合，由於計算這個集合所含的元素的個數，便得出自然數一（或稱單位）。把該集合中再加入一個元素，則其中元素的個數，便是由單位加單位而得，這樣便得出自然數二；若再重新於該集合中加入一個元素，則集合裏元素的個數，便是由單位加單位再加單位而成，從而得出自然數三，如此類推；我們便可以得出自然數一、二、三、四、五、六、…等等。很明顯，由以上所述，我們每次把數一（單位）加到一個已知的數上，便構成一個數列（集合）一、二、三、四、…，這種數列稱為**自然數列**。這個數列是一個無限數列，因為我們可以使其中任何一個數上添加一個單位，便可得出它後面繼續的一個新數。例如將三加上一個單位便得出後面的數四，等等。

自然數列的集合，有下列的特性，即它們的元素（數）是嚴格的依照一定的順序排起來的。因此我們可以知道某一個元素位於另一個元素的前邊，或某一個位於另一個的後邊，及某一個是開始的元素。這種集合及與此相類似的集合統稱為**整序集合**。例如某班學生按身體的高矮而編排的座次，便是一個整序集合。

由以上所述，可知自然數列中每一個數都有它一個固定的位置。因之自然數除了表示集合裏的數量外，在計算過程上，它又可以表示着某整序集合裏的已知元素所佔有的位置的順序數（有序數）。從順序數的觀點，我們又可以得出在自然數列裏，（a）兩相等的數是自然數列的同一數；（b）若一數位於另一數的後面，則該數就大於另一數，反之，若一數位於另一數的前面，則該數就小於另一數。

下述公理表示着自然數列的性質：

- （1）一（單位）是自然數；
- （2）接續於每個自然數後面的後續數，有一個且只有一個；

(3) 兩個自然數的後面，如有同一個後續數，則該兩數相等；

(4) 自然數一的前面不存在任何數；

(5) 已知某一個性質，對於自然數一是真實的；若是它對於某一個自然數是真實的，而且它對於該數的後續數也是真實的，則此性質對於一切自然數都是真實的。

§ 3. 數的起源、數°數公理、數°數過程

我們知道，位置概念是與自然數有着密切的聯系的。設將一些物體排列成一定的順序，而令其中的一個物體與數一相對應，並稱它為第一；令次一物體與數二相對應，並稱它為第二；再次一物體與數三相對應，並稱它為第三，等等；如此繼續的使各個物體與數 $1, 2, 3, 4, \dots$ 相對應，這樣就產生了數°（這裏所說的數是我們習慣上所謂數物體的數°字）。當數°至該集合的最後元素時，則與此元素相對應的數，就是該集合所含元素的個數。很明顯，這樣數°的結果是與數的順序無關的。例如，我們數°教室裏的學生數，無論按何種順序來數°，如按姓氏的排列來數°，按年齡的大小來數°，或按座位的前後來數°，其最後所得的結果都是相同的，這種特性稱為數°數公理。

在數°集合元素的個數時，無論我們按什麼樣的順序，把其中的一切元素取出，使其逐次與自然數列中的數相對應，最後必定得到與已知集合元素個數相同的一個集合。像這樣的計算方法，只有在人類的文化發展到相當高的階段時，才能逐漸的得到。譬如我國古代的結繩記事，大事結大結，小事結小結，逐漸的變為一件事結一個結，兩件事結兩個結，就充分說明了這一點。

如果兩個集合間的元素成一對應，則此兩集合稱為等價。所謂一一對應，就是一個集合中每一個元素都可以與第二個集合中的唯一的一個元素相對應；反之，第二個集合中的每一個元素，也都可以與第一個集合中的唯一的一個元素相對應。對於兩個集合成等價的判定，不一定能產生數°的關係；因為等價集合的判定，只要確定出元素成對應就夠了。我們從等價集合的研究中所得出來的結論，應用在與此集合成等價的其他集合上，也是有效的。

在實施算術運算時，我們一般都是利用具體的且是以往經驗所得

來的集合：如手指、石塊、算籌、算珠等，作為等價集合類的代表集合，在這種意義上並可作為數的實際代理者。事實上，因為等價集合類的標記，是屬於該類中任何集合的。如果所研究的集合，與所選出的標準集合之間，有一一對應關係，則所研究的集合可以用標準集合（如手指的集合、石塊的集合、算籌的集合、算珠的集合等）來代表。在選擇作為等價集合類的代表的標準集合時，應以易解性、習慣性、不變性、熟習性為基準。

如以手指：大指、食指、中指、無名指、小指作為元素的標準集合就是一個例子。

很明顯，如果某集合以“小指”為標記，意即該集合是屬於以自然數5為標記的集合類中的集合，因之，數5就稱為“小指”。這種利用物體名稱，作為計算時的名稱，是在數的最初發展階段就已經出現了的。例如，我國的“一”就是“余”，“二”就是“爾”的假借。

後來隨着時間的進展，這些名稱逐漸喪失了它的原始意義，在計算上也開始使用某些自然數的名稱。同時隨着文化的不斷發展，人類常常遇到的或所要研究的集合，比所使用的標準集合還要大，因之為了確定一一對應關係，就必然要選擇一個新的標準集合——無限自然數列。這種數列的數是一個跟着一個並確定在一定的順序位置上的，而且是用來作為標記及比較集合之價的數字的符號系統。

這樣一來，數^o數的過程就歸結於：在所要研究的集合的元素，與在此時起着標準集合的作用的自然數列的數之間，建立起一一對應關係。數^o數過程的最初階段，就是在於確立所要研究的集合與某標準集合之間的一一對應關係。

原始民族在數^o數過程的初期，他們是採取很熟習的某一定集合的部分集合作為標準集合，後來由於研究較大價的集合的必要性，才使該集合逐步擴大。他們最初所採用的標準集合的元素，多半是一隻手、兩隻手、腳、手腕及肘等。

由於標準集合元素順序的不變性，故人們就把在數^o數時最後所用的標準集合的元素的名稱，來作為所要研究的集合的標記。我們特用下面的例子來說明：

假設要計算某班學生的人數，我們就事先把他們排成一列，並使他

們逐次的由一開始呼出自己的號數，每人繼其前一人所呼出的號數而呼出自己的號數，這樣每個學生就得到一個號數。假設30是最後一個人所呼出的號數，由此可知全班有30個學生。每一個學生與30個數中的一數相對應，也就是說學生集合與數字集成等價。如果我們從另外的集合，如學生的帽子、學生的鋼筆來數^o，其數^o的結果也是到30為止，則這些集合與由1至30的三十個數的集合等價。顯然這一些集合都是彼此成等價的。因之我們就確定該等價集合的標記為30。

總之，確定兩集合之價相等（等價）的原始方法和較近的方法，對於數^o物體來說，都存在着同一的原則，那就是使集合成一一對應的關係。

§ 4. 零

由以上所述，可知自然數是回答這樣的問題：已知集合中含有若干個元素。我們可以說最小價的集合中含有一個元素。

如果集合中一個元素也沒有，便引導出空集合的概念。譬如說一個學生也沒有的小組，或者一個錢也沒有的錢包（它是空的），這些都是關於空集合的問題。在這種情形下，若回答“集合中有若干個元素”的問題，我們就說是零。所以零也是數，它是空集合類的標記。

顯然的，0與自然數沒有關係，也不能從自然數列中得到它。但是理論上總希望將0放入自然數列內，並適當的將0放在1的前面，寫為0、1、2、3、4、…，這是有益的，通常稱它為擴大自然數列。

關於擴大自然數列中的頭一個元素是0而不是1這件事，是沒有理論方面的原則作為根據的。

§ 5. 自然數的性質

自然數列中的一切數都有下列性質，它是不加證明而被採用的真理：

- 1) 反射性：一切自然數的自身相等($a=a$)；
- 2) 對稱性：若自然數 a 等於自然數 b ，則 b 亦等於 a ；
- 3) 傳遞性：若自然數 a 等於自然數 b ，而自然數 b 等於自然數 c ，則 a 等於 c 。

第二章 進 位 制

§ 6. 進位制的概念

上一章裏已經講過，由於數⁰物體的數目，而產生自然數。自然數的表示方法，世界各國通常都採用十進位制，即低位上的十個單位組成高位上的一個單位，“十”特名為**基礎數**。又進位制是依照基礎數的不同，以確定其專門名稱。例如：以數12為基礎數的進位制，就稱為十二進位制；以數2為基礎數的進位制，就稱為二進位制。應用進位制所表示的數，就稱為**進位數**。一切進位制的基本原則是：某個確定的單位數組成次高位上的一個新的單位，此確定的單位數就是進位制的基礎數。

多數民族，在有文化的初期，由於實際生活的需要，都或多或少的創造出一個比較完整的進位制；但是用專門數碼來表示數的書寫方法，却產生的很晚，甚至於像古代希臘及羅馬那些有高度文化的民族裏，用數碼來表示數的書寫方法也是極不完整的。直到紀元初年，印度人才初步的應用了幾個數碼，並利用一定的進位制來表示數。他們首先提出了**符號的位置意義**，即在一已知數中，同一符號因其所處位置的不同而有不同的意義。這一天才的思想，解決了數的表示法和寫法。

當我們採用某數 k 作為數的進位制的基礎數時，在計算上就要用到下面各列的數：

- 1) $1, 2, 3, 4, 5, \dots, (k-1)$;
- 2) $k, 2k, 3k, 4k, 5k, \dots, (k-1)k$;
- 3) $k^2, 2k^2, 3k^2, 4k^2, 5k^2, \dots, (k-1)k^2$;

.....

$$(n+1) \quad k^n, 2k^n, 3k^n, 4k^n, 5k^n, \dots, (k-1)k^n.$$

這樣，在以 k 為基礎數的進位制中，任何一個數 N ，都可以用下列和的形式來表示：

$$N = a_n \cdot k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \dots + a_3 \cdot k^3 + a_2 \cdot k^2 + a_1 \cdot k + a_0,$$

而 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ 各為表示數 0 至 $k-1$ 間的數。

例如：以7為基礎數的進位制，則任何自然數N，就可以用和的形式表示為：

$$N = a_n \cdot 7^n + a_{n-1} \cdot 7^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 7^2 + a_1 \cdot 7 + a_0,$$

而 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ 各為表示數0, 1, 2, 3, 4, 5, 6的符號。

當着單位的數目等於基礎數時，它就可組成為高位(第二位)上的一個單位。故對於任何種(以符號位置意義為基礎)的進位制，基礎數可以用單位後帶零的符號來表示。而一數以某種進位制表示時，這種進位制的基礎數不必再有特殊的符號。

用0及表示數1至9的符號和位置意義的進位制，首先出現於印度，大約在第八世紀才傳入阿拉伯，阿拉伯人又於第九世紀傳入歐洲。因為它是以10為基礎數，特稱為十進位制。

§ 7. 十進位制的讀法

最初的十個數，有互不相關的十個獨立名稱：一、二、三、四、五、六、七、八、九、十。而數10是進位制的基礎數，並用之來表示新的計算單位。這樣就大大地簡化了大數的口述與書寫的方式。

十進位制記數法的主要規則：

(1) 任何位上的十個單位，組成次高位上的一個單位。

(2) 由一開始數 $^{\circ}$ 起，最初所得的九個數，是屬於第一位(或末位)，特稱為個位數。十就是第二位上的一個單位。故

第1位上的單位稱為個，

第2位上的單位稱為十，

第3位上的單位稱為百，

第4位上的單位稱為千，

第5位上的單位稱為萬，

第6位上的單位稱為十萬，

第7位上的單位稱為百萬，

第8位上的單位稱為千萬，

第9位上的單位稱為億，

第10位上的單位稱為十億，

第11位上的單位稱為百億，