

逼近论会议论文集

(III)

Proceedings of the 3rd Conference
on Approximation Theory

Held at Huangshan, October, 23—30, 1982

全国第三次逼近论会议文集编委会
南京大学学报编辑部

南 京

Journal of Nanjing University

NANJING, CHINA

1983, 10

逼近论会议论文集

(III)

Proceedings of the 3rd Conference
on Approximation Theory

Held at Huangshan, October, 23—30, 1982

编 委

程民德 徐利治 孙永生 沈燮昌
谢庭藩 陈文忠 郑维行 苏维宜

全国第三次逼近论会议文集编委会
南京大学学报编辑部

Journal of Nanjing University

1983, 10

逼近论会议论文集

III

* * * * *

前 言

继1978年杭州会议、1980年厦门会议之后，全国第三次函数逼近论会议于1982年10月23日到10月30日在安徽黄山顺利进行，到会人员108人，其中正式代表60人。会议由南京大学主办，北京大学、杭州大学共同参加筹备，安徽省数学会、合肥工业大学、徽州师专给予大力支持。会议收到论文150多篇，在会上宣读的近一百篇，内容相当丰富。假如说第一次会议是科学的初春，我们这个小园地还处在嫩芽初发的状态，那么到第二、三次会议已是春意盎然，逐渐进入百花齐放的阶段了。为了反映会议成果，代表们一致认为出版论文集是很必要的。本文集按照一般论题、调和分析、三角逼近、线性算子逼近、Walsh分析及其发展、插值与样条等项编排，委托南京大学学报负责编辑出版事宜。在出版过程中得到多方面的支持，编委会谨表深切谢意。

程民德 徐利治 孙永生 沈燮昌
谢庭藩 陈文忠 郑维行 苏维宜

1983年10月于南京

目 录

一 般 论 题

逼近论在中国的某些新进展	徐利治(1)
--------------	--------

调 和 分 析

多线性算子理论和 Calderon 猜测的解决	程民德 邓东皋(5)
L^1 付氏分析研究中的某些新进展	陆善镇(19)
典型群上的正线性算子	范大山(25)
关于 H^p ($p \geq 1$) 空间中的最佳逼近问题	邢富冲(30)
广义 Carleson 不等式 (摘要)	邓东皋(38)
广义 Calderon—Zygmund 算子及其加权范数不等式 (摘要)	彭立中(41)
具 Λ -有界平均变分的函数类 (摘要)	施咸亮(43)
关于 A. Ruiz 定理 (摘要)	张阳春(45)
某些二阶微分算子的 L_p 可逆性 (摘要)	张阳春 P. A. Tomas (46)
沿曲线的乘子 (摘要)	张阳春 P. A. Tomas (48)

三 角 逼 近

光滑函数类的宽度估计问题	孙永生(49)
关于最佳逼近多项式研究的某些进展	谢庭藩(65)
一类一致概周期函数的 Fourier 级数求和	程乃栋(80)
关于 B. K. Дзялык 核的导数模的估计	娄元仁(88)
用调和平均逼近连续函数 (摘要)	陈全德(98)
关于 $Lip(1, p)$ 函数类多重 Fourier 积分球形求和的收敛性与一致逼近 (摘要)	潘文杰(100)
收敛因子定理的一个证明 (摘要)	秦国强(101)
二重周期函数用 Marcinkiewicz 型 Cesaro 平均的逼近与求和 (摘要)	王昆扬(102)
关于函数的光滑性 (摘要)	谢庭藩(105)
关于 Leindler 的两个问题 (摘要)	谢庭藩(107)
用 Cesaro 平均逼近共轭函数 (摘要)	杨文善(109)
线性算子的渐近表示 (摘要)	余祥明(111)
测度连续模与积分平均模 (摘要)	曾晓明(114)

线性算子逼近

赋范空间中的几个逼近问题及目前发展	潘文熙(117)
饱和理论	任福贤(130)
线性正算子逼近与迭代	程正兴(143)
逼近度与光滑模 (摘要)	陈文忠(148)
线性拓扑空间中太阳集的若干逼近性质 (摘要)	潘文熙(151)
空间 E_Δ 与 $W_m E_\Delta$ 逼近问题的误差估计 (摘要)	肖应鹄(153)
A. Varma 定理的补充 (摘要)	谢敦礼(155)
K 泛函与逼近 I、II (摘要)	杨义群(156)
关于 Bernstein—Kantorovic 多项式在 $L^p[0, 1]$ 空间中的逼近阶 (摘要)	周信龙(159)

Walsh 分析及其发展

局部域上积分算子与逼近核	郑维行(161)
圈变函数的 p -adic 导数存在条件	曹祥炎(171)
Walsh 系 Jackson 型定理的证明	苏维宜(181)
Walsh-Fourier 投影的极小性质	奚梅成 冯玉瑜(189)
Виленькин-Fourier 级数的一般线性求和 (摘要)	何泽霖(194)
$L^p(0, \infty)$ 空间中几种 p -adic 导数的关系 (摘要)	华茂芬(196)
关于 Walsh 分析中的表现问题 (摘要)	江惠坤(200)
关于 p -adic 导数与 p -adic 积分的几点讨论 (摘要)	马永培(204)
局部域上 Hilbert 变换的注记 (摘要)	郑维行(207)

插值与样条

复样条函数及其应用	陈翰麟(211)
插值多项式的余项表示及其在样条分析中的应用	王兴华, 杨义群(221)
关于 Lagrange 插值 (摘要)	沈燮昌(230)
三阶 Λ 样条的平均插值	沙 震 吴正昌(231)
有限与无限平面集上的 Spline 内插 (摘要)	陈翰麟(236)
Turan 的一个问题 (摘要)	蒋元林(240)
一类奇异积分的 Chebyshev 型机械求积公式 (摘要)	路见可(242)
Hermite-Fejer 型算子 (摘要)	孙燮华(243)
关于 Kumar 和 Mathur 一文的注 (摘要)	孙燮华(245)
拟 Hermite-Fejer 插值余项的渐近表示 (摘要)	谢庭藩(247)
复二次样条 (摘要)	徐士英(250)
关于插值样条的最佳误差的界 (摘要)	王建忠(252)

Contents

General Topic

Some Recent Developments on Approximation Theory in China

..... Xu Lizhi (1)

Harmonic Analysis

Theory of Multilinear Operators and Solution of Calderon Conjercture

..... Cheng Minde Deng Donggao (5)

On some Recent Progress in L^1 Fourier Analysis Lu Shanzhen (19)

Positive Linear Operators on Classical Groups Fen Dashau (25)

The Best Approximation in H^1_p ($p \geq 1$) Space Xing Fuchong (30)

On generalized Carleson Inequality (Abstract) Deng Donggao (38)

Generalized Calderon—Zygmund Operators and

Their Weighted Norml Inequalities (Abstract) Peng Liqiong (41)

On the Functions with Λ -bounded Mean Variation(Abtract).... Shi Xianliang (43)

On a Theorem of A. Ruiz (Abstract) Zhang Yangchun (45)

L^p — Invertability of Some Second Order

Differential Operators (Abstract) Zhang Yangchun P. A. Tomas (46)

Multipliers Along Curves (Abstract) Zhang Yangchun P. A. Tomas (48)

Trigonometrical Approximation

Estimations of N-widths of Some classes of Differentiable

Functions and Related Extremal ProblemsSun Yongsheng (49)

Some Recent Advances in the Research of the

Best Approximation Polynomials Xie Tingfan (65)

On the Summation of Fourier Series of Uniformly

Almost Periodic Functions Cheng Naidong (80)

On the Bounds of the Derivatives of В.К. Дзялык

Kernel Lou Yuanren (88)

On the Approximation of Continuous Functions by

Harmonic Means (Abstract) Chen Quande (98)

The Convergence and Uniform Approximation of Spherical Summation of Multiple Fourier Integrals for Lip (1, p) Functions (Abstract)	Pan Wenjie (100)
On the Proof of a Convergent Factors Theorem (Abstract)	Qen Kwochang (101)
Approximation and Absolute Summation for Periodic Functions of Two Variable by Cesáro Means of Marcinkiewicz Type (Abstract)	Wang Kunyang (102)
On the Smoothness of Functions (Abstract)	Xie Tingfan (105)
On Two Problems of Leindler (Abstract)	Xie Tingfan (107)
On Approximation of Conjugate Functions by Cesáro Means (Abstract)	Yang Wenshan (109)
Asymptotic Expansion of Linear Operators (Abstract)	Yu Xiangming (111)
The Continuity Modulus of Measure and the Mean Modulus of Function (Abstract)	Zeng Hsiaoming (114)

Approximation by Linear Operators

Some Problems of Approximations in Normed Linear Spaces and Recent Developments	Pan Wenxi (117)
A Survey on Saturation Theory	Ren Fuxian (130)
Approximation and Iteration of Positive Linear Operators	Cheng Zhengxing (143)
The Approximation Degree and the Smooth Modulus (Abstract)	Chen Wenzhong (148)
Some Approximate Properties of Sun Sets in Linear Topological Spaces (Abstract)	Pan Wanxi (151)
On Error Estimate of Approximation of the Spaces E_λ and $W^m E_\lambda$ (Abstract)	Xiao Yingkun (153)
A Replenishment for the Theorem of A. Varma (Abstract)	Xie Danli (155)
K-functional and Approximation I, II (Abstract)	Yang Yigun (156)
On the Approximation Degree of Bernstein—Kantorovic Polynomials in $L_p[0, 1]$ (Abstract)	Zhou Xinlong (159)

Walsh Analysis and its Generalization

Integral Operators and Approximation Kernels on Local Fields	Zheng Weixing (161)
On the Existence of p-adic Derivative of Functions of Bounded Variation	Cao Xiangyan (171)

The Jackson Type Theorem for Walsh System	Su Weiyi (181)
The Minimal Property of the Walsh—Fourier Projection	Xi Meicheng Feng Yuyu (189)
General Linear Summation of the Виленькич—Fourier Series	He Zelin (194)
(Abstract)	
Relations Among Various p -adic Derivatives (Abstract)	Hua Maofen (196)
On the Representation Problems For Walsh Analysis (Abstract)	Jiang Huikun (200)
Some Discussion on p -adic Derivative and p -adic Integral	Ma Yong pei (204)
(Abstract)	
Remarks on Hilbert Transform over Local Fields	Zheng Weixing (207)
(Abstract)	

Interpolation and Splines

Complex Splines and their Applications	Chen Hanlin (211)
The Remainder Representation of Interpolatin Polynomials and its	
Applications	Wang Xinghua Yang Yiqun (221)
On Polynomial Interpolation—Lagrange Interpolation (Abstract)	Shen Xiechang (230)
Average Interpolation by 3rd Order Λ -Splines	Zha Zhen Wu Zhengchang (231)
Interpolation by Splines on Finite and Infinite Planar Sets	Chen Hanlin (236)
(Abstract)	
On a Problem of P • Turan (Abstract)	Jiang Yuanlin (240)
A Class of Quadrature Formulas of Chebyshev Type for Singular	
Integrals (Abstract)	Lu Jianke (242)
On Hermite —Fejer Type Operators (Abstract)	Sun Xiehua (243)
A Note on the Paper of Kumar and Mathur (Abstract)	Sun Xiehua (245)
Asymptotic Representation for the Remainder of	
Quasi—Hermite—Fejer Interpolation (Abstract)	Xie Tingfan (247)
On Complex Quadratic Splines	Xu Shiyang (250)
Some Optimal Error Bounds For Interpolating Splines (Abstract)	Wang Jianzhong (252)

逼近论在中国的某些新进展

徐 利 治

(吉林大学数学系、大连工学院应用数学研究所)

摘 要

这是1983年1月11日在美国 Texas 逼近论中心主办的国际性逼近论学术会议上所作的一篇综述报告的摘要(全文将发表于该会议论文集上)。

逼近论这门学科在中国于过去30年间所以取得较大成就的因素有二,一是由于中国分析学家充分认识到逼近论的理论及方法对现代计算数学的重要性,二是由于苏联数学学派的早期影响,特别是一些俄文著作被译为中文后所产生的影响。

报告内容包括十个专题,即如下十节:

- § 1 利用傅里叶和的逼近
- § 2 各种算子的逼近阶
- § 3 关于函数类逼近的极值问题
- § 4 与宽度有关的极值问题
- § 5 多元逼近与多元插值
- § 6 样条逼近与插值
- § 7 有理逼近
- § 8 Walsh 逼近
- § 9 数值逼近与积分
- § 10 其它各种论题

但限于篇幅,这篇报告主要只介绍了1976年以来中国分析学家所获得的一些代表性成果,当然不可能没有遗漏(虽然参考文献达百篇之多)。

在§ 1中提到了谢庭藩曾对 Siddiqi 一结果给出反例,并对强性求和证得了精确的一般结果。施咸亮把 Leinder 的一条定理扩充成更一般的形式,施和谢还分别得到了函数 $f \in L^p_{2,1}$ 以及 $f \in C_{2,1}$ 用 Cesaro 均值逼近的相应结果。在这一节中,还特别介绍了曹家鼎关于弱型逼近阶的漂亮结果。正如报告中所指出,中国学者在傅里叶和逼近上面的成果是不胜枚举的。

在§ 2中首先指出,中国学者对 Hermite-Fejer 插值算子的逼近性能曾作过研究,特别是杭州大学几位学者的工作颇为突出。除了谢庭藩关于逼近阶值得重视的最佳结果之外,王斯雷的一个漂亮结果也十分值得称道,即下述关系

$$\|f - H_n(f)\|_{C(-1,1)} = O(\log n/n) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

成立的充要条件为

$$\omega(g, \delta) + \omega(\tilde{g}, \delta) = O(\delta \log 1/\delta) \quad (\delta \rightarrow 0_+)$$

此外,曹家鼎还针对 Fejer 均值的 Favard 问题作出了两个有趣结果。

关于类上的函数逼近偏差上界估计中的精确常数问题,孙永生曾有一系列十分精细的工作并获得优美成果。

关于函数类逼近的极值问题(§ 3),孙永生曾作了系统性研究,确定了某些精确常数。他还引进了两个新的函数类 W_x^r 和 $\tilde{W}_x^r$ 并得出相应的结果。陈文忠曾研究了线性正算子与连续算子逼近的一般极值问题。应用 K 泛函方法他得出了类 $W_p^r(1)$ 上逼近偏差的精确常数。

谈到与宽度有关的极值问题(§ 4),特别值得提到的一个事实是,孙永生曾成功地证明了 Melkman 和 Micchelli 的一个猜想。

在多元逼近与多元插值方面(§ 5),中国学者的工作成果不多,但首先必须提到的是,关于多元函数三角逼近的研究工作在中国是由程民德及其学生于1956年开始的。近几年来北师大与北京大学曾有些中青年学者,如陆善镇、张阳春等,在多重傅里叶级数部分和逼近方法方面作出了有价值的工作。特别,就二重傅里叶和的一致强性逼近而言,张阳春曾对矩形求和与对角线求和的 p 阶强性逼近,分别找到了饱和阶并确定了两种饱和类的特征。还有吉林大学的梁学章曾找到了方域、园域及三角形区域上的二元及多元最小零偏差多项式。

和国外的情形一样,样条逼近与插值在中国也是一个富于成果的研究领域(§ 6),以浙江大学郭竹瑞、沙震等人为首的一批学者在样条逼近阶的分析方面曾取得一系列值得重视的成果,这方面有所贡献的中青年作者至少应提到翁祖荫、贾荣庆、陈天平、杨义群、叶懋冬等等。在多元样条方面,国内外的研究工作正处于开创阶段,特别应该提到的是王仁宏和崔锦泰卓有成效的合作工作,已经开始受到国内外同行的高度重视。例如,他们在关于多元样条空间的研究中发现多元 B 样条并不是基本的,从而引进了一种重要的子空间。还有许多别的成果正在继续发展中。此外,路见可和陈翰麟关于复样条的研究成果也很富于独创性并具有应用价值。

就复域上的有理逼近问题而言(见 § 7),沈燮昌及其合作者所取得的一系列成果是值得重视的。他们曾对 Mergelyn 等人的经典结果作了很大程度的推进。他们引进了很广的一类区域 K_q ($q > 1$) 在其上建立了比 Alener, Fichera 等人更为一般的定理。他们还研究了具有指定极点的有理函数作为项的级数展开式和余项估值问题。此外,王仁宏、黄有群等人关于 $f(x) \in C(a, b)$ 的最佳一致有理逼近的工作也是值得提到的。

多年来以郑维行与苏维宜为代表的研究集体曾对 Walsh 分析及逼近问题进行了卓有成效的研究工作。他们首先引进了局部紧致拓扑群 G^p 上的逻辑导数概念,还引入了 $L^q(C_0, \infty)$ ($1 \leq q \leq 2$) 上的 p 进积分概念并建立了和 p 进导数的联系。特别有趣的是他们还证得了 Bernstein 型和 Jackson 型定理,在郑维行的最近工作中引进了一种乘积型近似恒等核,这也是值得重视的新成果(见 § 8)。

关于多项式插值法,王兴华得到了一个比 Steffensen 更为优越的插值余项公式,该公式能用以获得各种余项的精确估计。例如,对于样条插值和迭代方法等余项估值都已得到精

确结果,因此这是一项值得重视的成果。又,徐利治与杨家新曾提出利用逆级数关系构造插值公式的方法,应用该方法可导出一类广义牛顿级数,其部分和可用来处理带有极点的函数的有理插值问题。还得到另一种用差分表示的插值公式,能用以解决 $[0, \infty)$ 上和 $[0, \infty) \times [0, \infty)$ 上的插值问题,且可避免产生 Runge 现象。徐和他的合作者还研究了高维区域上构造最优边界型求积公式的一般方法(见§6)。

数年前余家荣曾应用 Stieltjes 变换和二重依附级数证得了 Stieltjes-Hamburger 二维矩量问题解的唯一性的充要条件。他成功地应用此项结果研究了二元函数的带权逼近。关于利用广义多项式带权逼近广义函数问题,他还证得更一般的唯一性定理。又程乃栋曾对一类概周期函数证得了 Jackson 型、Bernstein 型和 Zygmund 型定理。这些也是值得称道的漂亮成果。§10中还提到吴学谋所发展的逼近变换理论(ATT),这是在他的“泛系分析”框架里建立起来的一般理论,故应用方面很广。吴曾由此研究了新型的 Markov 不等式、Faber 级数及各种直交级数的新型估计等。看来 ATT 将随着应用的扩展而愈益受到重视。

Some Recent Developments on Approximation Theory in China

Xu Lizhi

(Jilin University)

Abstract

This is a summary of an article on approximation theory which I gave in the international conference on Jan. 11, 1983 sponsored by the Center of Approximation Theory in Texas, U.S.A.,

多线性算子理论和 Calderon 猜测的解决

程民德 邓东皋

(北京大学)

摘 要

这里说的 Calderon 猜测,是指 Lipschitz 曲线上 Cauchy 积分算子为 L^2 有界。本文综述自 1965 年 Calderon 证明一阶奇异积分交换子有界性以来有关问题的各种进展,并介绍 Coifman, McIntosh 和 Meyer 最终在 1981 年用他们自己发展起来的多线性算子理论证实了 Calderon 猜测的正确性。

§ 1. Calderon 猜测

这里说的 Calderon 猜测,是指关于 Lipschitz 曲线上 Cauchy 积分算子的 L^2 有界性的猜测,具体说是下面三个命题是否成立〔6〕:

(1) 设 $A' \in L^\infty(R)$, 则 Lip 曲线 $z = x + iA(x)$ 上的 Cauchy 积分算子

$$C(f)(x) = p \cdot v \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y) dy}{(x-y) + i(A(x)-A(y))}$$

是 L^2 到 L^2 有界的,

(2) 设复平面 C 上的曲线 $z = z(s)$ 满足

$$0 < r \leq \left| \frac{z(s) - z(t)}{s - t} \right| \leq R,$$

则 Cauchy 积分算子

$$C(f)(s) = p \cdot v \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{Z(s) - Z(t)} dt$$

是 L^2 到 L^2 有界的,

(3) 设 K 是复平面 C 上的一紧集, 复值函数 $A(x)$ 满足

$$\frac{A(x) - A(y)}{x - y} \in K,$$

又 $F(z)$ 在 K 的一个邻域是解析的, 则算子

$$C(f)(x) = p \cdot v \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{A(x) - A(y)}{x - y}\right) \frac{f(y)}{x - y} dy$$

是 L^2 到 L^2 有界的。

这三个命题，初看起来是 (3) 最强，因为

(i) 取 $F(z) = \frac{1}{z}$ ，则 (3) 推出 (2)。

(ii) 取 $F(z) = \frac{1}{1+iz}$ ，则 (3) 推出 (1)。

另外，

(iii) 取 $F(z) = z^n$ ，则 (3) 中的算子化为 n 阶交换子

$$(4) \quad C_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{A(x) - A(y)}{x - y} \right)^n \frac{f(y)}{x - y} dy.$$

但是，实际上，由 (2) 可以推出 (3)，这是因为，从 (3) 的假设知存在闭曲线 Γ ，使 Γ 到 K 的距离 $\rho(\Gamma, K) \geq r > 0$ ，根据 Cauchy 积分定理

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(s)}{s - \omega} ds$$

便有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{A(x) - A(y)}{x - y}\right) \frac{f(y)}{x - y} dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(s) ds \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{A_+(x) - A_+(y)} dy,$$

其中 $A_+(y) = sy - A(y)$ 满足 (2) 的条件

$$0 < r \leq \left| \frac{A_+(x) - A_+(y)}{x - y} \right| = \left| s - \frac{A(x) - A(y)}{x - y} \right| \leq R < \infty.$$

其实从 (1) 也不难推出 (2) (见 § 4 和 [9]、[21])。

Calderon 猜测虽然是 1978 年在世界数学家大会的报告上提出的，但事实上，与上述猜测密切相关的课题，早在 60 年代便开始了研究，而猜测的最终解决却是不久以前由 R. R. Coifman, A. McIntosh 和 Y. Meyer 用多线性算子的方法完成的 ([12]、[9])。

§ 2. 奇异积分的交换子和多线性算子理论

把 (1) 中的算子 $C(f)$ 按幂级数展开

$$(5) \quad C(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{A(x) - A(y)}{x - y} \right)^n \frac{f(y)}{x - y} dy,$$

其中每一项便是形为 (4) 的 n 阶交换子。早在 1965 年，A. P. Calderon 为了研究带不光滑系数的微分方程，就引进了一阶奇异积分的交换子：

$$(6) \quad C_A(HD)f = [A, HD]f = -p \cdot v \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(x) - A(y)}{x - y} f(y) dy$$

(其中 $[,]$ 表示通常的交换子 $[T_1, T_2] = T_1 T_2 - T_2 T_1$, A 表示用函数 $A(x)$ 作乘法的算子, $D = \frac{d}{dx}$, H 是 Hilbert 变换), 并证明了当 $A' \in L^\infty$ 时它是 L^2 到 L^2 有界的 ([3]), 在那里 Calderon 用了很特殊的围道积分的推理, 他的方法不能用到高阶交换子上。1975

年 Coifman 和 Meyer 建立了 Mellin-Fourier 分析的方法并用 “good λ ” 不等式, 不仅对一阶交换子, 并且对高阶交换子, 证明了它们的有界性 ([13][14])。可惜的是当时他们对高阶交换子的算子模未能得到足够好的估计, 以保证 (5) 中级数的收敛性。虽然这样, 他们却由此发展了一整套多线性算子理论, 并把它们应用到拟微分算子上, 得到了很好结果 ([1], [16], [23])。

这里说的多线性算子, 是指同平移和放大可交换的, 具体说就是形为

$$(7) \quad M_n(f_1, \dots, f_n) = \int \dots \int_{(R^d)^n} K(x - u_1, \dots, x - u_n) f_1(u_1) \dots f_n(u_n) du_1 \dots du_n$$

的算子, 其中 $x, u_j \in R^d$, 它们可以看作通常的 $(R^d)^n$ 上的卷积算子在对角线上的值:

$$M(f_1, \dots, f_n)(x) = \int \dots \int_{(R^d)^n} K(x_1 - u_1, \dots, x_n - u_n) f_1(u_1) \dots f_n(u_n) du_1 \dots du_n \Big|_{x_j = x, 1 \leq j \leq n} = K * (f_1 f_2 \dots f_n) \Big|_{x_j = x, 1 \leq j \leq n}$$

或者用 Fourier 积分的形式表示

$$(7') \quad M_n(f_1, \dots, f_n)(x) = C_n \int_{(R^d)^n} e^{ix(\xi_1 + \dots + \xi_n)} \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n) \hat{f}_1(\xi_1) \dots \hat{f}_n(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n,$$

其中 $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 称为多线性算子 M_n 的符号, 例如交换子

$$(8) \quad [AD, H]f = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(x) - A(y) - A'(y)(x-y)}{(x-y)^2} f(y) dy,$$

的符号就是 $\left| \frac{\xi_1}{\xi_2} \right| (\operatorname{sgn}(\xi_1 + \xi_2) - \operatorname{sgn} \xi_1)$, 这个算子和 (6) 的交换子相差一个 $\Lambda' f$ 的 Hilbert 变换。

关于多线性算子的一个很一般的结果是 Marcinkiewicz 乘子定理的类似^(1,2)。如果 $\sigma: R^{nd} \rightarrow C, \in C^\infty$, 对任意的 $\alpha \in N^{na}$ 满足

$$|\partial_\xi^\alpha \sigma(\xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{-|\alpha|},$$

则由 (7') 定义的 M_n 是 $(L^{p_1}, \dots, L^{p_n})$ 到 L^p 有界的, 即

$$\|M_n(f_1, \dots, f_n)\|_p \leq C \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_n\|_{p_n},$$

其中 $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} \leq 1, 1 < p_j < \infty$ 。

只有在特殊的情形下得到 $f_1, \dots, f_{n-1} \in L^\infty$ 的估计, 特殊情形之一就是 n 阶交换子^(1,2), 如果 $f_j = A_j: R \rightarrow C$ 满足 $A'_j \in L^\infty (1 \leq j \leq n-1)$, $f_n = f$, 那末

$$\left\| \int_R \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{A_j(x) - A_j(y)}{x-y} \right) \frac{f(y)}{x-y} dy \right\|_2 \leq C \prod_{j=1}^{n-1} \|A'_j\|_\infty \cdot \|f\|_2$$

特殊情形之二是 $d = 1$, $n = 2$ [], 对一般的情形这仍然是个未解决的问题。

研究多线性算子的方法, 除 Mellin-Fourier 分析外, 一种用得很多的方法是把多线性算子看成下列两种基本算子的组合^[15]

$$(9) \quad I_1(a, f) = \int_0^\infty (\psi_t * f) (\varphi_t * a) \frac{dt}{t},$$

$$(10) \quad I_2(a, f) = \int_0^\infty (\varphi_t * f) (\psi_t * a) \frac{dt}{t},$$

中 $\varphi, \psi \in C^\infty$, $\text{supp } \hat{\varphi} \subset [-\delta, \delta]$, $\text{supp } \hat{\psi} \subset \{\eta < |\xi| < \eta'\}$, 而 δ 比较 η 充分小, $\varphi_t(\cdot) = \frac{1}{t} \varphi(\frac{\cdot}{t})$ 。我们以 (10) 为例看看如何证明当 $a \in L^\infty$ (或进一步 $a \in \text{BMO}$), $f \in L^2$ 时的有界性。事实上这时不难看出存在类似 ψ 的 $\bar{\psi}$, 使对 (10) 的估计化为对任意 $g \in L^2$, 有

$$\begin{aligned} \left| \langle I_2(a, f), g \rangle \right| &= \left| \left\langle \int_0^\infty (\varphi_t * f) (\psi_t * a) * \bar{\psi}_t \frac{dt}{t}, g \right\rangle \right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} |\bar{\psi}_t * g|^2 \frac{dx dt}{t} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} |\varphi_t * f|^2 |\psi_t * a|^2 \frac{dx dt}{t} \right)^{1/2} \\ &\leq C \|g\|_2 \|a\|_\infty \|f\|_2, \end{aligned}$$

其中关键用了 Carleson 不等式, 因为可以证明

$$\sup_{|y-x| < t} |(\varphi_t * f)(y)| \leq C f^*(x),$$

其中 f^* 是 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数, 以及 $|\psi_t * a|^2 \frac{dx dt}{t}$ 当 $a \in L^\infty$ (甚至 $a \in \text{BMO}$) 时是 Carleson 测度^{[14][15][16][21]}。由于这里用到了几何和 Carleson 不等式, 故推广到高维或高阶会迁到不同程度的困难。关于 Carleson 不等式的一种推广, 可参看 (20)。

值得特别指出的是, 对 (8) 中的交换子, 用上面谈到的方法或用 Mellin-Fourier 分析, 可以证明, 当 $A' \in \text{BMO}$ 时, $\|[AD, H]\|_{(L^2, L^2)} \sim \|A'\|_{\text{BMO}}$ 以及 $\|[AD, H]\|_{(\text{BMO}, \text{BMO})} \sim \|A'\|_{\text{BMO}}$ 。这些事实在下一节叙述弧曲线上的 Cauchy 积分算子的有界性时起了重要的作用 [17]。

§ 3. 弦弧曲线

1977年 A.P. Calderon 用了很复杂的复分析, 证明了 (1) 中的 Cauchy 积分算子在 $\|A'\|_\infty \leq \delta_0$ (其中 δ_0 是一很小的正数) 的条件下是 L^2 有界的^[5], 其主要思想是把这种 Cauchy 积分算子看作 Hilbert 变换的一种摄动。1979年 Coifman 和 Meyer 对上述 Calderon 的结果给出了一个新证明, 对 Calderon 证明作了一定程度的简化^[15], 几乎同时他们又把 Calderon 的上述结果推广到某类弦弧曲线^[17]。他们的主要思想是通过 BMO 函

数来表示弦弧曲线, 然后用 § 2 中谈到的多线性算子的结果, 证明以这种弦弧曲线为边界的上半平面可保角变换到上半平面 (即对这种区域给出了 Riemann 定理的一个证明) 最后把保角变换和上下半平面的 Cauchy 型积分算子结合起来, 再一次用 § 2 中的多线性算子的结果, 证明了这种弦弧曲线上的 Cauchy 积分算子的有界性。下面我们简单介绍他们的方法。

我们说复平面 C 上用弧长 s 作参数表示的曲线 $\Gamma: Z = Z(s)$ 是弦弧曲线, 如果存在 $\delta(\Gamma) > 0$ 使得

$$0 < 1 - \delta^2(\Gamma) \leq \left| \frac{Z(s) - Z(u)}{s - t} \right| \leq 1.$$

可以证明, $Z = Z(s)$ 是弦弧曲线的充分必要条件是存在 BMO 函数 $\alpha(t)$, 使得

$$(11) \quad Z(s) = \int_0^s e^{i\alpha(t)} dt,$$

并且 $\|\alpha\|_{\text{BMO}} \sim \delta(\Gamma)$, 前提是 $\|\alpha\|_{\text{BMO}}$ 或 $\delta(\Gamma)$ 充分小。

Coifman 和 Meyer 的结果是: 若由 (11) 定义的弦弧曲线满足 $\|\alpha\|_{\text{BMO}} < \delta_0$ (充分小), 则 (2) 中的 Cauchy 积分算子是 L^2 有界的。显然这包含了 Calderon 1977 年的结果。

满足上述条件的曲线的一个例子是 (ε 充分小)

$$Z(s) = \int_0^s e^{i\varepsilon \ln|t|} dt$$

他们的第一步是证明 Riemann 保角变换的存在性, 设 ϕ 是 Riemann 函数, 把以 (11) 中曲线 Γ 为边界的上半平面保角变换到上半平面, 这时曲线 Γ 变为 x 轴, 记 $x = \phi(Z(s)) = h(s)$, 则

$$Z(s) = \phi^{-1}(x) = \int_0^x e^{\beta_0 + i\alpha_0} dt, \quad x = h(s),$$

它必须满足

$$(12) \quad Z'(s) = e^{\beta_0 \circ h + i(\alpha_0 \circ h)} h'(s) = e^{i\alpha(s)},$$

其中 $\circ$ 表示取函数的复合, 如 $\beta_0 \circ h = \beta_0(h(s))$, 有时我们把这记为 $U_{hf} = f \circ h$ 。等式 (12) 意味着

$$h' e^{\beta_0 \circ h} = 1,$$

即

$$\ln h' = -\beta_0 \circ h,$$

记 $\beta = \ln h'$, 则

$$\beta_0 = -\beta \circ h^{-1}, \quad \text{即} \quad H(\beta_0) = -H(\beta \circ h^{-1}).$$

因此 (12) 成立的充分必要条件是

$$\alpha = -H(\beta \circ h^{-1}) \circ h = -U_h H U_h^{-1} \beta$$

或

$$\beta = U_h H U_h^{-1} \alpha$$