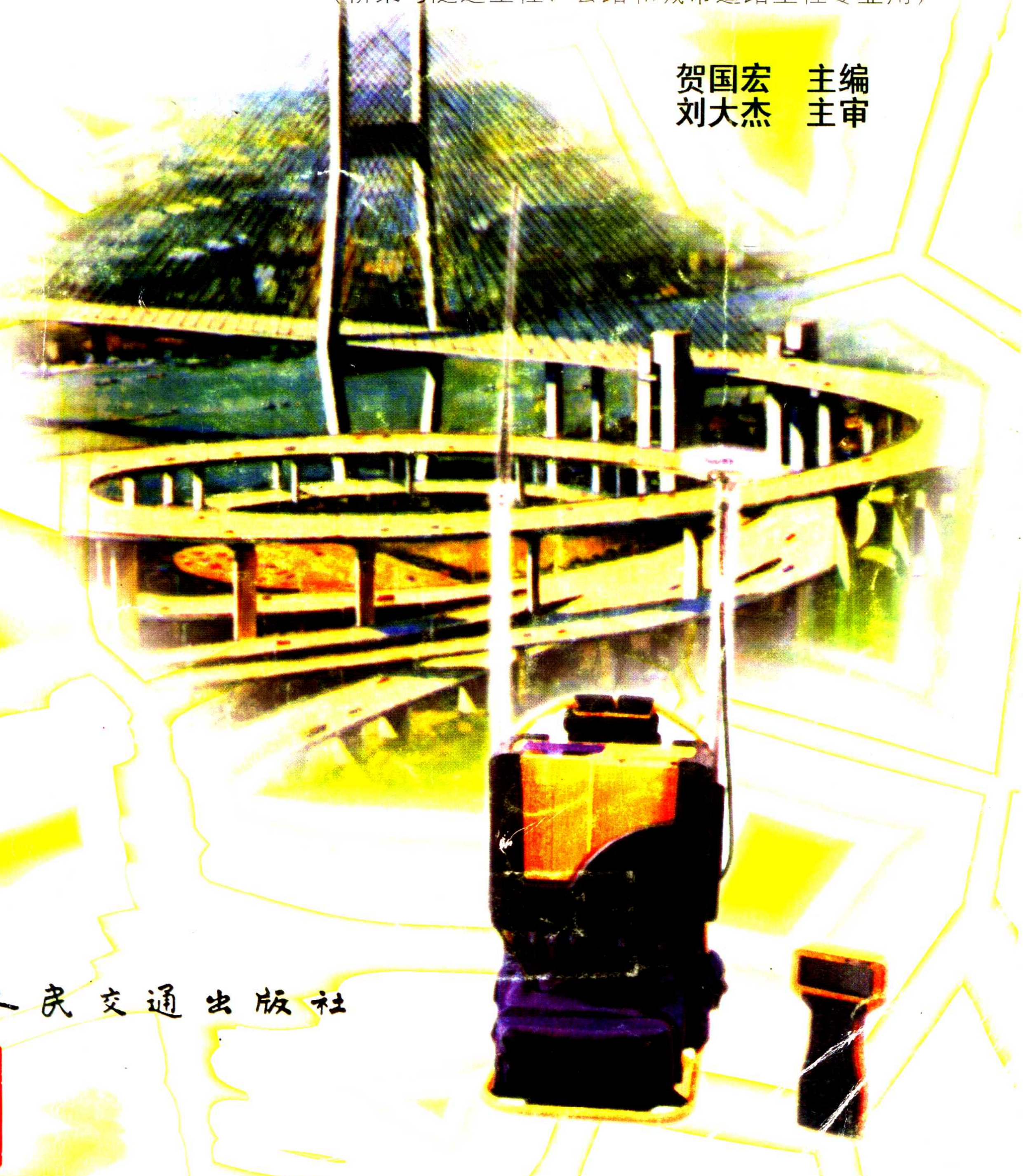
高等学校试用教材

桥隧控制测量

（桥梁与隧道工程、公路和城市道路工程专业用）

贺国宏　主编
刘大杰　主审



人民交通出版社

高等学校试用教材

Qiaosui kongzhi Celiang

桥隧控制测量

（桥梁与隧道工程、公路和城市道路工程专业用）

贺国宏 主编
刘大杰 主审

人民交通出版社

内 容 提 要

本书共分六章：测量平差基础，桥梁控制测量，桥隧控制网的平差计算，隧道控制测量，桥梁变形观测，全球定位系统（GPS）及其在桥隧控制测量中的应用。主要介绍了桥梁和隧道控制测量的基本理论、控制网的设计、测量方法、平差计算、精度分析以及有关问题。

本书可作为公路或铁路桥隧工程、公路和城市道路工程以及测量工程专业的本科生和研究生的教材，也可作为有关技术人员的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

桥隧控制测量. 桥梁与隧道工程、公路和城市道路工程专业用/贺国宏主编 -北京：人民交通出版社，1998

高等学校试用教材

ISBN 7-114 03111-4

I 桥… II 贺… III. 隧道测量：控制测量 高等学校-教材 IV. U452.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 21452 号

高等学校试用教材

桥隧控制测量

（桥梁与隧道工程、公路和城市道路工程专业用）

贺国宏 主 编

刘大杰 主 审

责任印制：张 凯 版式设计：崔凤莲 责任校对：张 捷

人民交通出版社出版

（100013 北京和平里东街 10 号）

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经销

北宁市朝阳区女奉印刷厂印刷

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：13.75 字数：350 千

1999 年 2 月 第 1 版

1999 年 2 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数：1—5000 册 定价：17.70 元

ISBN 7-114-03111-4

U·02229

前　言

本书系根据1996年11月在西安召开的路桥及交通工程专业教学指导委员会扩大会议审定的教学大纲编写的，是交通部高校“九·五”规划教材之一。

本书的读者对象是公路和铁路桥隧工程、公路和城市道路工程以及测量工程的本科生和研究生及从事桥隧工程的测量工作者。书中着重介绍了桥梁和隧道控制测量的基本理论、控制网的设计、测量方法、平差计算、精度分析以及其它有关问题。在编写过程中，特别注重测量和计算方法上新技术、新方法的应用，并注重实用性及理论和实践的密切结合。书中带*号部分为研究生增学内容，本科教学时可不讲授。

本书共六章，由贺国宏编写第一、三章和第四章的第1、2、3、7节，第五章的第4、7节，第六章的第7节及附录；由赵建三编写第二章及第五章的第1、2、3、5、6节；由刘学军编写第四章的第4、5、6、8、9、10节及第六章除第7节外的其余各节。

本书由贺国宏主编，负责全书的统稿和修改，由同济大学刘大杰教授主审。刘教授认为，该书结构合理，取材恰当，是一本很有特色的教材。他还提出了许多宝贵的修改意见，在刘教授的指导下，我们作了修改，在此向他表示衷心的感谢。在编写过程中，还得到交通部第二勘测设计院的帮助，并在此致谢。

由于我们学识浅薄，错误和不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

目　录

绪　论

一、控制测量原理

在地面上选择、标定出若干个点，并以适当的形式把它们相互连接起来，构成一定的网形，这种网称为控制网，这些点称为控制点。进行控制测量的目的就是为了确定这些控制点的坐标和高程。为确定控制点的平面位置（x，y）而布设的控制网称为平面控制网；为确定控制点的高程（H）而布设的控制网称为高程控制网。

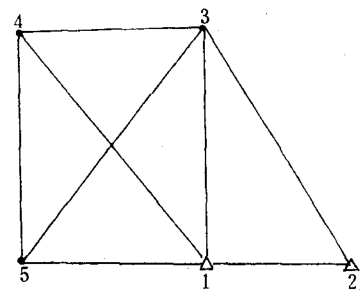


图　1

如图1所示是一个平面控制网，如果观测网中各三角形的内角，这种网称为三角网（测角网）。若已知点1的坐标（x_1，y_1），点1到点2的坐标方位角α_{12}及边长s_{12}，便可依正弦定理推出三角形各边的坐标方位角，从而推得各点的平面坐标。

在图1中，也可以不测各水平角，而只观测各边的长度，三角形各内角可通过余弦定理由三边长求得，然后按以上同样的推算方法可求出各点的坐标。这种只观测边长而不观测水平角的控制网，称为三边网（测边网）。还可以既观测网中部分或全部内角，又观测网中部分或全部边长，这种控制网称为边角网。有时，在没有必要分清是哪一种控制网时，可以统称为三角网。

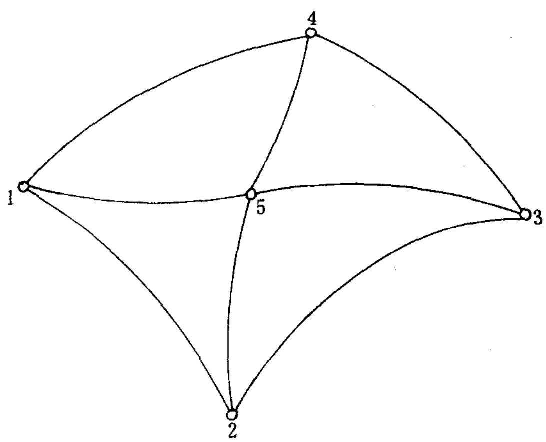


图　2

对于高程控制点，可以建立高程控制网。如图2所示为一高程控制网，观测了各段水准路线的高差，若已知点1的高程，可推出各未知点的高程。由于高程控制网通常由水准测量的方法建立起来，所以高程控制网通常称为水准网。

综上所述，把控制点连接成一定的网形，观测网中的水平角、边长、高差等，由已知数据就可以推算出各控制点的坐标和高程，这就是控制测量的基本原理和方法。

二、桥隧控制测量的任务及其在桥隧建设中的作用

在桥隧工程建设的各个阶段，都要进行控制测量。其任务是：

1．在勘测设计阶段，为测绘桥址和隧道地表大比例尺地形图而建立必要精度的控制网，为工程设计提供必须的满足精度要求的数据，以保证设计的桥梁和隧道在技术上是先进的、合

理的。

2. 在桥隧工程施工阶段，为施工建立必要精度的施工控制网。桥梁施工放样时，必须保证桥轴线长度和桥墩中心定位有一定的精度；隧道贯通测量时，必须保证贯通误差（特别是横向贯通误差）不超过某一限度。所以，在桥隧施工时，必须建立施工控制网，以确保桥轴线长度、桥墩定位、隧道贯通时有足够的精度。

3. 在桥梁工程竣工后，为了观测工程建筑物的变形，亦需提供变形观测控制网。桥墩受水流冲击和荷载作用时，都会引起基础及其本身发生变形；钢梁因自重、构件安装误差及荷载和冲量的作用，也会产生挠曲变形。这种变形在允许的范围内应认为是正常的，如果超过一定的数值，可能会影响其使用，甚至会发生危及安全问题。因此，在桥隧竣工前后及营运期间，应当经常进行变形观测。鉴于这种变形很小，一般难以用肉眼观察出来；因此，必须建立控制网，进行精密观测，测量出这种微小变形。通过变形观测，当发现变形出现不正常现象时，应及时分析原因，采取措施，以保证安全。此外，利用变形观测资料，还可以验证地基与基础的计算方法、桥梁结构的设计方法是否合理。因此，桥梁变形观测对桥梁设计、施工、管理和科学研究都有重要的作用。

以上三项任务，由于时间有先后，规模有大小，形式和精度要求也不相同，一般采用分别布网的方法。但布网的原则和方法是相仿的。鉴于测图控制网的要求较低；又有成熟的规范可作参照，在测量学中也已经阐述过其施测方法，故本课程不再阐述这一任务。

三、桥隧控制测量的内容

由上所述，控制网是各项测量工作的基础，故研究建立桥隧控制网的原理和方法就成为桥隧控制测量的主要内容。更具体地说，它的内容是：

1. 研究控制网中求未知量最优估值的理论和方法。在实际控制测量中，边长、水平角、高差等观测值总是存在一定的误差，这些误差受到多种因素影响，因而视为随机变量。怎样用带有误差的观测值求出未知量，并保证未知量具有足够可靠度，这是一个首先要解决的问题。

显然，要确保桥梁和隧道测量结果满足精度要求，关键的问题是控制网测定值必须达到足够的精度。评定其测量成果达到什么样的标准才视为满足精度要求，通常使用测量平差理论和方法来解决这一问题。

2. 研究控制网的布设方法。控制网的精度不但与观测精度有关，而且与网的形状有关，这就产生了怎样设计一个适当的网形以满足精度要求的问题。

3. 阐述桥隧控制测量的外业工作方法和步骤。桥隧控制测量由于精度要求较高，怎样合理组织安排外业测量工作，避免或削弱仪器和外界条件产生的误差的影响，这是保证控制网的精度的一个很关键的问题。

4. 控制网的平差计算。按照测量平差的理论和方法，对外业工作获得的观测数据进行平差计算，求出未知量的最优估值并评定其精度，为桥梁放样和隧道贯通测量提供精密的测量数据。

5. 阐述桥梁墩台发生水平和垂直变形、钢梁挠曲变形等的观测方法和数据处理方法。

6. 介绍全球定位系统（GPS）在工程控制测量中的应用。全球定位系统具有速度快、精度高、不需通视等特点，它的出现是测量工作中的一次重大的技术革命。GPS 技术在桥隧控

制测量、变形观测中都有重要的应用，其前景非常广阔，我们将用最后一章来阐述这一问题。

值得指出的是，第一章阐述的测量平差的理论和方法是后续各章的基础。在此，有必要提醒初学者，多花费一些时间学好用好测量平差理论，会有助于系统掌握本教材全部基础知识。

第一章　测量平差基础

§1-1　观测值的协方差阵及其传播律

一、相关观测值的方差和协方差

在测量学中已经讲过，对任何一个量进行观测，总是存在着观测误差。观测误差包括系统误差和偶然误差。由于系统误差可以通过适当的观测方法来消除或是通过计算进行改正，因此可以认为在观测误差中仅存在偶然误差，或者说偶然误差是主要的。偶然误差的产生是一种随机现象，因此，偶然误差又称为随机误差，或者说偶然误差是一个随机变量。

观测值 L、观测误差 Δ 和被观测量的真值 $\tilde{L}$ 三者存在如下关系

$$\Delta = L - \tilde{L} \tag{1-1-1}$$

理论和实践都证明，观测误差 Δ 服从正态分布，其密度函数为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1-1-2}$$

误差 Δ 的期望和方差分别为

$$\begin{cases} E(\Delta) = 0 \\ D(\Delta) = \sigma^2 \end{cases} \tag{1-1-3}$$

由式（1-1-1）知，观测值 L 也是随机变量，它也服从正态分布，它的期望和方差为

$$\begin{cases} E(L) = \tilde{L} \\ D(L) = \sigma^2 \end{cases} \tag{1-1-4}$$

由式（1-1-3）和（1-1-4）可见，观测值的方差与它的误差的方差是相等的。如果在相同的观测条件下得到一组独立的观测误差，按照方差的定义并考虑到 $E(\Delta)=0$，可以得到

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= D(\Delta) = E(\Delta - E(\Delta))^2 = E(\Delta^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta = \lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta\Delta]}{n} \end{aligned} \tag{1-1-5}$$

σ 称为标准差，测量上习惯称为中误差。

由于观测值的个数总是有限的，由有限个观测误差只能求得方差和中误差的估值。σ 的估值用 $\hat{\sigma}$ 或 m 表示，即

$$\hat{\sigma}^2 = m^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n} \text{或} \hat{\sigma} = m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-1-6}$$

在不致混淆的情况下，可以不区分中误差和中误差的估值。

以上说明的是一个观测量的情况。在有两个以上观测量的情况下，除了各自的方差或中误差，还须引进两个变量之间的协方差以及协方差阵的概念。

设有观测量 X 和 Y，它们之间的协方差定义为

$$\sigma_{XY} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[(X - \widetilde{X})(Y - \widetilde{Y})]$$

或改写为

$$\sigma_{XY} = E[\Delta_X \Delta_Y] = \lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta_X \Delta_Y]}{n} \tag{1-1-7}$$

式中 $\Delta_X = X - \widetilde{X}$、$\Delta_Y = Y - \widetilde{Y}$ 分别为 X 和 Y 的真误差，其估值为

$$\hat{\sigma}_{XY} = \frac{[\Delta_X \Delta_Y]}{n} \tag{1-1-8}$$

若 $\sigma_{XY}=0$，表示 X 和 Y 是不相关的，反之两者是相关的，称为相关观测值。由于测量上涉及的观测量多为正态变量，按照概率统计的理论，对正态变量而言，“不相关”和“独立”是等价的，因此，两个不相关的观测值称为独立观测值。反之称为相关观测值。

在有 n 个观测量的情况下，把它们写成向量的形式，设

$$X = [X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n]^T$$

定义其期望和协方差阵为

$$\begin{cases} E(X) = [E(X_1) \quad E(X_2) \quad \cdots \quad E(X_n)]^T \\ D(X) = E[(X - E(X))(X - E(X))^T] \end{cases} \tag{1-1-9}$$

按照方差和协方差的定义，把式（1-1-9）中的协方差阵写为矩阵展开式为

$$D(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}{}^2 & \sigma_{X_1X_2} & \cdots & \sigma_{X_1X_n} \\ \sigma_{X_2X_1} & \sigma_{X_2}{}^2 & \cdots & \sigma_{X_2X_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{X_nX_1} & \sigma_{X_nX_2} & \cdots & \sigma_{X_n}{}^2 \end{bmatrix} \tag{1-1-10}$$

在上述协方差阵中，对角元素为各观测值的方差，即

$$\sigma_{X_i}^2 = E(X_i - E(X_i))^2 = E(\Delta_{X_i}^2) \quad (i = 1,2,\cdots n)$$

其它非对角元素为两两观测值之间的协方差，即

$$\begin{aligned} \sigma_{X_iX_j} = \sigma_{X_jX_i} &= E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))] \\ &= E(\Delta_{X_i}\Delta_{X_j}) \quad (i,j = 1,2,\cdots n) \end{aligned}$$

从上式可见协方差阵是一个对称阵。当观测向量 X 中各分量两两不相关时，协方差阵（1-1-10）化为对角阵，即

$$D(X) = \mathrm{diag}(\sigma_{X_1}{}^2, \sigma_{X_2}{}^2, \cdots \sigma_{X_n}{}^2) \tag{1-1-11}$$

今后，简记协方差阵为 D_X，即 $D_X = D(X)$。同时，在不致引起混淆的情况下，简记方差 $\sigma_{X_i}{}^2$ 为 σ_i^2，协方差 $\sigma_{X_iX_j}$ 为 σ_{ij}。

值得指出的是，当观测向量中各分量不存在函数关系或者说函数独立时，可以证明，协方差阵是一个对称正定阵。

二、协方差传播律

设观测值向量为 $\underset{t\times 1}{X}$，其期望为 $E(X)$，方差阵为 D_X，若 X 的 n 个线性函数为

$$\underset{n\times 1}{Y} = KX + K_0 \tag{1-1-12}$$

式中 K 是已知系数矩阵，K_0 是常数向量，按照协方差阵的定义，它的协方差阵为

$$D_Y = E[(Y - E(Y))(Y - E(Y))^T] \tag{1-1-13}$$

式中

$$Y - E(Y) = KX + K_0 - E(KX + K_0) = K(X - E(X))$$

代入到式（1-1-13）中得

$$\begin{aligned} D_Y &= E[K(X - E(X))(X - E(X))^T K^T] \\ &= KE[(X - E(X))(X - E(X))^T]K^T \\ &= KD_X K^T \end{aligned} \tag{1-1-14}$$

上式称为协方差传播律。从以上推导中可以看出，式(1-1-12)中 K_0 对求函数的方差没有影响。

当式（1-1-12）中 $n=1$ 时，把式（1-1-14）展开为纯量形式可得

$$\sigma_Y^2 = k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + \cdots k_t^2\sigma_t^2 + 2\sum_{i<j} k_i k_j \sigma_{ij} \tag{1-1-15}$$

特别地，当观测值两两独立时，简化为

$$\sigma_Y^2 = k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + \cdots k_t^2\sigma_t^2 \tag{1-1-16}$$

这就是在测量学中阐述过的误差传播定律。

对于两个随机向量 X 和 Y 的协方差，按照其定义可写出其互协方差阵为

$$D_{XY} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))^T] \tag{1-1-17}$$

因此，若设 X 的两个函数向量为

$$\begin{cases} Y = KX + K_0 \\ Z = HX + H_0 \end{cases} \tag{1-1-18}$$

则由上式求出 E（Y）、E（Z）后代入式（1-1-17）得

$$D_{YZ} = E[K(X - E(X))(X - E(X))^T H^T] = KD_X H^T \tag{1-1-19}$$

这就是由 X 的协方差阵求它的两个函数向量 Y 和 Z 的互协方差阵的公式。它也称为协方差传播律。

例〔1-1〕 设向量 X 和 Y 的函数向量

$$Z = F_1 X + F_2 Y \tag{1-1-20}$$

已知 X 和 Y 的协方差阵为 D_X 和 D_Y，X 关于 Y 的互协方差阵为 D_{XY}，求 Z 的协方差阵及 Z 关于 X 和 Y 的互协方差阵。

解：将式（1-1-20）改写为

$$Z = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{1-1-21}$$

按协方差传播律得

$$\begin{aligned} D_Z &= \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_X & D_{XY} \\ D_{YX} & D_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} \\ &= F_1 D_X F_1^T + F_2 D_Y F_2^T + F_1 D_{XY} F_2^T + F_2 D_{YX} F_1^T \end{aligned} \tag{1-1-22}$$

再把 X、Y 改写为

$$X = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

再按协方差传播律式（1-1-19）得

$$\begin{aligned} D_{ZX} &= \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_X & D_{XY} \\ D_{YX} & D_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= F_1 D_X + F_2 D_{YX} \end{aligned} \tag{1-1-23}$$

同理可得

$$D_{ZY} = F_1 D_{XY} + F_2 D_Y \tag{1-1-24}$$

以上各式在应用中可作为公式使用。

以后经常要由观测值的方差阵推求观测值函数的方差阵，协方差传播律是一个非常有力的工具。

例〔1-2〕 如图 1-1，在测站 O 上按方向观测法观测了三个方向，设方向观测值为 l_i，观测中误差为 m，求三个角观测值的协方差阵。

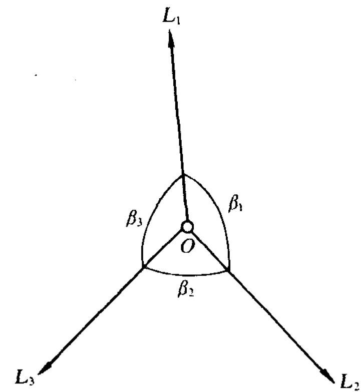


图 1-1

解：设 $L=[l_1 \quad l_2 \quad l_3]^T$，$\beta=[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3]^T$，因为各角为两方向观测值之差，容易得出角观测值向量（实为函数向量）和方向观测值向量之间关系式

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\\ l_3\end{bmatrix} \tag{1}$$

由于方向观测值是互相独立的，其协方差阵为对角阵，即 $D_l=m^2I$，再对式（1）应用误差传播定律得

$$D_\beta = m^2\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T = m^2\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix} \tag{2}$$

从以上结果看出，方向观测值是独立的。但由方向观测值求得的相邻角度观测值是相关观测值，同时由于 $\beta_1+\beta_2+\beta_3=360°$，所以这三个角观测量是函数相关的，从而该协方差阵（2）必为奇异阵。验证其行列式恰为零正好说明这一点。

如果直接观测这三个角度，这时角观测值与方向观测值之间有如下关系

$$\begin{cases}\beta_1 = l_2 - l_1\\ \beta_2 = l_3 - l_2'\\ \beta_3 = l_1' - l_3'\end{cases} \tag{3}$$

其中 l_i 和 l_i' 为同一方向的观测，但不是同一方向观测值。这时三个角观测值是独立的，其协方差阵为对角阵。

例〔1-3〕 在图 1-2 的三角形中，β_1、β_2、β_3 为等精度观测值，其中误差为 m_β，试求经过三角形闭合差平均分配后的平差角向量 $\hat{\beta}=[\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2 \quad \hat{\beta}_3]^T$ 的协方差阵 $D_{\hat{\beta}}$。

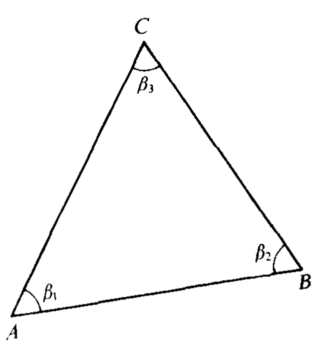


图 1-2

解：设三角形闭合差为

$$\omega = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180$$

经过闭合差分配后的平差角值为

$$\hat{\beta}_1=\beta_1-\frac{\omega}{3}=\frac{2}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3+60°$$

同理

$$\hat{\beta}_2=-\frac{1}{3}\beta_1+\frac{2}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3+60°$$

$$\hat{\beta}_3=-\frac{1}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2+\frac{2}{3}\beta_3+60°$$

写成矩阵形式为

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\\ \hat{\beta}_3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}60°\\ 60°\\ 60°\end{bmatrix} \tag{1}$$

应用协方差传播律，得

$$D_{\hat{\beta}}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_\beta^2 & & \\ & m_\beta^2 & \\ & & m_\beta^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}=\frac{m_\beta^2}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix} \tag{2}$$

由于三个平差角满足 $\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3=180°$，其协方差阵（2）也是奇异的。

三、非线性函数的情况

以上所述协方差传播律只能用在线形函数的情况，若函数是非线性的，则必须先进行线性化后才能应用协方差传播律。设

$$F=f(X_1,X_2,\cdots X_n) \tag{1-1-25}$$

假定观测值有近似值 $X^0=[X_1^0 \quad X_2^0 \quad \cdots \quad X_n^0]^T$，则可将上式按台劳级数在 X^0 处展开并取至一次项为

$$F=f(X_1^0,X_2^0\cdots X_n^0)+(\frac{\partial f}{\partial X_1})_0(X-X_1^0)+(\frac{\partial f}{\partial X_2})_0(X_2-X_2^0)+(\frac{\partial f}{\partial X_n})_0(X_n-X_n^0) \tag{1-1-26}$$

式中 $\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_0$ 是函数对各个变量所取的偏导数并以近似值 X^0 代入所算得的数值，它们都是常数。令

$$K=[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]=\left[(\frac{\partial f}{\partial X_1})_0 \quad (\frac{\partial f}{\partial X_2})_0 \quad \cdots \quad (\frac{\partial f}{\partial X_n})_0\right]$$

$$k_0=f(X_1^0 \quad X_2^0 \quad \cdots \quad X_n^0)-\sum_{i=1}^{n}k_iX_i^0$$

则式（1-1-26）可写为

$$F=k_1X_1+k_2X_2+\cdots k_nX_n+k_0=KX+k_0 \tag{1-1-27}$$

这样就将非线性函数式（1-1-25）化为线性函数式（1-1-27），这时就可以按线性函数的误差传播定律来求 F 的方差了。由于在线性化的过程中，常数项 k_0 对方差的计算不起作用，起作用的只是函数的偏导数向量，即系数向量 K，所以，为求函数的方差，只要对 K 求全微分即可。

例〔1-4〕 在例〔1-3〕中，若已知 $m_\beta=3''$，平均分配闭合差到各角后，得到各角之值为

$$\hat{\beta}_1=40°10'30'',\hat{\beta}_2=50°05'20'',\hat{\beta}_3=89°44'10''$$

AB 边长 $s_0=1500.000$m（无误差），试求 AC、BC 边的长和它们的协方差阵 D_s。

解：在图 1-2 中，记边长 AC 为 s_a，边长 BC 为 s_b，根据例〔1-3〕求得的 $\hat{\beta}$ 的协方差阵并代入 $m_\beta=3''$得

$$D_{\hat{\beta}}=\frac{m_\beta^2}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -3 & -3\\ -3 & 6 & -3\\ -3 & -3 & 6\end{bmatrix} \qquad (单位:s^2)$$

边长 s_a、s_b 按下式计算

$$s_a = s_0 \frac{\sin\hat{\beta}_1}{\sin\hat{\beta}_3} = 1500 \times \frac{0.6451244}{0.9999894} = 967.697(\mathrm{m})$$

$$s_b = s_0 \frac{\sin\hat{\beta}_2}{\sin\hat{\beta}_3} = 1500 \times \frac{0.7670407}{0.9999894} = 1150.573(\mathrm{m})$$

对上述两个非线性函数求全微分得

$$\Delta s_a = s_a \mathrm{ctg}\hat{\beta}_1 \frac{\Delta\hat{\beta}_1}{\rho} - s_a \mathrm{ctg}\hat{\beta}_3 \frac{\Delta\hat{\beta}_3}{\rho}$$

$$\Delta s_b = s_b \mathrm{ctg}\hat{\beta}_2 \frac{\Delta\hat{\beta}_2}{\rho} - s_b \mathrm{ctg}\hat{\beta}_3 \frac{\Delta\hat{\beta}_3}{\rho}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \Delta s_a \\ \Delta s_b \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} s_a \mathrm{ctg}\hat{\beta}_1 & 0 & -s_a \mathrm{ctg}\hat{\beta}_3 \\ 0 & s_b \mathrm{ctg}\hat{\beta}_2 & -s_b \mathrm{ctg}\hat{\beta}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{\beta}_1 \\ \Delta\hat{\beta}_2 \\ \Delta\hat{\beta}_3 \end{bmatrix}$$

按协方差传播律求 D_s 得

$$D_s = \frac{1}{(206 \times 10^3)^2} \begin{bmatrix} 1146 & 0 & -4 \\ 0 & 962 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1146 & 0 \\ 0 & 962 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} (\mathrm{m}^2)$$

$$= \begin{bmatrix} 1.86 & -0.77 \\ -0.77 & 1.32 \end{bmatrix} (\mathrm{cm}^2)$$

§1-2 协因数阵和权阵

一、协因数阵

从§1-1 中知道，要求观测值向量函数的方差，必须首先知道观测值向量的协方差阵，但是，在平差计算以前，往往并不知道它。即不知道各观测值的方差及各观测值之间两两的协方差，这样，利用协方差传播律就不能求得其函数的方差。例如在例〔1-1〕中求得的三个角观测值的方差阵为

$$D_\beta = m^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1-2-1}$$

其中 m 是方向观测中误差，如果 m 不能确定，则 D_β 也就不能确定。但是从上式我们也看到，除了 m 未确定外，m^2 后面的矩阵是确定的。这个矩阵和 D_β 仅相差一个因子 m^2，在平差前一般很容易确定，而 m^2 则要经过平差计算后才能求得。为了应用的方便，我们可以仿此定义协因数阵。

设观测向量为 $\underset{n\times 1}{X}$，其协方差阵为 D_X，从 D_X 的各元素中取出公因子 σ_0^2（其意义后面再讨论），记 X 的协因数阵为 Q_X，则协因数阵按下式定义：

$$D_X = \sigma_0^2 Q_X \tag{1-2-2}$$

Q_X 中各元素称为协因数。上式写成展开式为

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-2-3}$$

按定义式（1-2-2），对式（1-2-1），若取 $\sigma_0^2=m^2$，则其协因数阵为

$$Q_\beta = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

由于协方差阵和协因数阵只相差一个公因子，根据协方差传播律很容易得到由观测值向量的协因数求其函数向量的协因数的计算公式，它们称为协因数传播律。前述式（1-1-14）～（1-1-24）中只要把其中协方差阵换为对应的协因数阵，就是协因数传播律的相应公式了。为应用方便，对应式（1-1-12）、（1-1-18）、（1-1-20）等，写出其对应的协因数传播律为

$$Q_Y = KQ_XK^T \tag{1-2-4}$$

$$Q_{YZ} = KQ_XH^T \tag{1-2-5}$$

$$Q_Z = F_1Q_XF_1^T + F_2Q_YF_2^T + F_1Q_{XY}F_2^T + F_2Q_{YX}F_1^T \tag{1-2-6}$$

$$Q_{ZX} = F_1Q_X + F_2Q_{YX} \tag{1-2-7}$$

$$Q_{ZY} = F_1Q_{XY} + F_2Q_Y \tag{1-2-8}$$

二、权　　阵

在测量学中已经定义了观测值 X_i 的权，它的定义式为

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \quad (i = 1,2,\cdots n) \tag{1-2-9}$$

式中 p_i 为 X_i 的权，σ_0^2 称为单位权方差，这也就是式（1-2-2）中 σ_0^2 的意义，在平差前它是一个可以任意选定的量。σ_i^2 为 X_i 的方差，由式（1-2-3）知

$$\begin{cases} \sigma_i^2 = \sigma_0^2 Q_{ii} & (i = 1,2\cdots n) \\ \sigma_{ij} = \sigma_0^2 Q_{ij} & (i,j = 1,2,\cdots n) \end{cases} \tag{1-2-10}$$

上式第一式和式（1-2-9）比较，可得

$$Q_{ii} = \frac{1}{p_i} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2} \tag{1-2-11}$$

这就是说，协因数阵 Q_X 中主对角元素 Q_{ii} 为 X_i 的权倒数，它与该观测值的权成反比，而与其方差成正比；非对角元素 Q_{ij} 与协方差 Q_{ij} 成正比，又称为相关权倒数。由上述可见，Q_{ii} 是反映观测值精度高低的一种指标，这与权有类似的作用。而 Q_{ij} 是反映 X_i 和 X_j 两个观测值之间相关程度的一个指标。

当观测值两两不相关时，协因数阵化为对角阵，即

$$Q = \mathrm{diag}(Q_{11}, Q_{22}, \cdots Q_{nn}) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \cdots \frac{1}{p_n}\right)$$

若记　　$P=\mathrm{diag}\ (p_1,\ p_2,\ \cdots p_n)$

则　　$Q=P^{-1}$ 或 $P=Q^{-1}$　　(1-2-12)

由于 P 的对角元素是观测值的权，所以称它为权阵。从上式看到，它和协因数阵 Q 互为逆阵，故 Q 阵又称为权逆阵。

在观测值相关的情况下，仍然保持由式（1-2-12）定义权阵的意义不变，也称 P 为权阵。但需要指出的是，当 Q 为非对角阵时，权阵 P 的对角元素 p_{ii} 不再是 X_i 的权了。根据矩阵代数的知识，不难从式（1-2-12）看出这一点。但是，相关观测值的权阵在平差计算中也能起到和独立观测值的权阵一样的作用。

例〔1-5〕 已知观测值向量 $\underset{2\times 1}{L}$ 的协因数阵为

$$Q=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

求观测值的权和权阵。

解：由式（1-2-11）得观测值的权为

$$p_1=\frac{1}{Q_{11}}=\frac{1}{2},p_2=\frac{1}{Q_{22}}=\frac{1}{2}$$

权阵

$$P=Q^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

式中 $p_{11}=2/3$，$p_{22}=2/3$，可见 $p_{11}\neq p_1$，$p_{22}\neq p_2$。

例〔1-6〕 设例〔1-5〕中观测向量的函数向量为

$$\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_1\\ L_2\end{bmatrix}$$

求各函数的权和函数向量的权阵。

解：按协因数传播律式（1-2-4），得

$$Q_Y=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 17\\ 17 & 26\end{bmatrix}$$

其权

$$p_{y_1}=\frac{1}{Q_{y_1}}=\frac{1}{14},\quad p_{y_2}=\frac{1}{Q_{y_2}}=\frac{1}{26}$$

权阵

$$P_Y=Q_Y^{-1}=\begin{bmatrix}14 & 17\\ 17 & 26\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0.35 & 0.23\\ 0.23 & 0.19\end{bmatrix}$$

同样可见，P_{y_1}、P_{y_2} 也不等于权阵 P_Y 的对角元素。

例〔1-7〕 设在同级的水准网中，共有 N 个水准闭合环，每个环的长度为 R_i（km），根据往返高差中数算得每个水准环的闭合差为 ω_i，试评定该水准测量的精度。

解：由于每一水准环测段高差真值之和的理论值为零，故闭合差 ω_i 乃是每一环线高差观测值之和的真误差。设 1km 水准观测为单位权观测值，则每一环高差观测值之权为 $p_i=m_{\mathrm{km}}^2/\left(\sqrt{R_i}m_{\mathrm{km}}\right)^2=1/R_i$。按测量学中熟知的公式

$$\hat{\sigma}_0=\sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-2-13}$$

即得每公里高差观测值方差的估值公式为

$$m_{\mathrm{km}}=\sqrt{\frac{1}{N}\left[\frac{\omega\omega}{R}\right]} \tag{1-2-14}$$