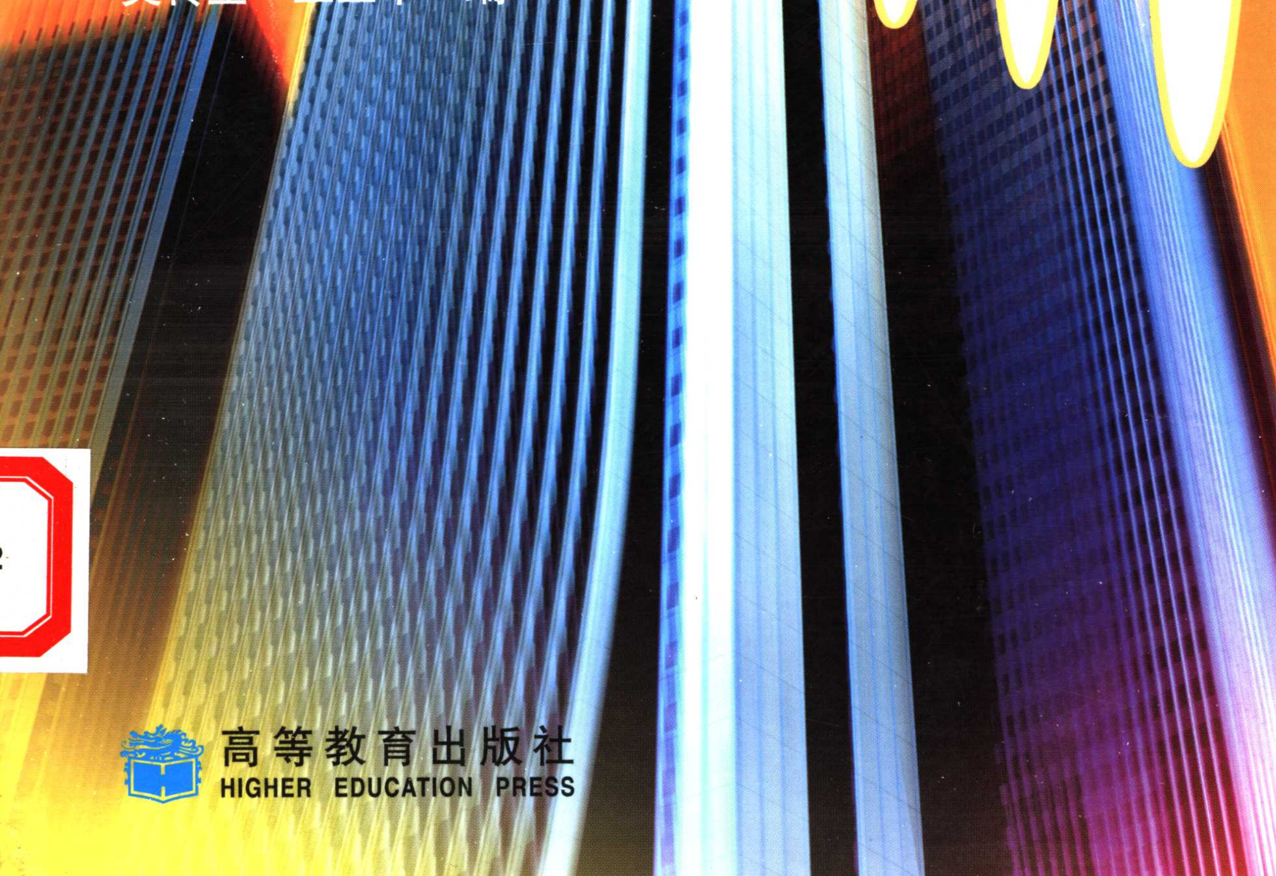
普通高等教育“十五”国家级规划教材

经济数学——线性代数

吴传生 王卫华 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

经济数学. 线性代数/吴传生，王卫华编. —北京：
高等教育出版社，2003.12
ISBN 7-04-012932-9

Ⅰ. 经… Ⅱ. ①吴…②王… Ⅲ. ①经济数学-高
等学校-教材②线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 108641 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	人民教育出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2003 年 12 月第 1 版
印　　张	13	**印　　次**	2003 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	240 000	**定　　价**	14.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，根据作者多年的教学实践，结合经济类、管理类线性代数课程的基本要求以及教育部最新颁布的研究生入学考试数学三和数学四的考试大纲编写而成.

本书的主要内容包括线性方程组的消元法与矩阵的初等变换；行列式、Cramer 法则；矩阵的运算；线性方程组的理论；特征值和特征向量、矩阵的对角化；二次型；应用问题等七章.各章的每节后配有习题，除第一章和第七章外，每章后配有总习题.

本书的前四章以线性方程组的理论为主线展开讨论，第五章与第六章以实二次型化成标准形为主线展开讨论，第七章综合介绍线性代数在经济学以及其它方面的应用.全书在体系安排上突出“矩阵方法”，从始至终贯穿矩阵的初等变换的作用.表述上从具体问题入手，由浅入深，由易及难，由具体到抽象，使难点分散；理论上贯穿“线性相关性”这一线性代数的灵魂，使得它的讨论变得简单，便于组织教学.

本书结构严谨，逻辑清晰，叙述清楚，说明到位，文字流畅，例题丰富，习题量较大，可供高等学校经济类、管理类专业学生选用，也可供理工科学生选用或参考.

前　言

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材.教材注意将线性代数的知识和经济学及其他有关应用问题适当结合,在保持传统教材优点的基础上,对体系进行了适当的调整和优化.前四章以线性方程组为主线展开讨论,第五、六两章以实二次型化成标准形为主线展开讨论,第七章综合介绍线性代数的一些应用.全书突出“矩阵方法”,从始至终贯穿矩阵的初等变换的作用,表述上从具体问题入手,问题的引入自然、贴切,问题的讨论由浅入深,由易及难,由具体到抽象,循序渐进,脉络清晰,做到了难点分散,化难为易,便于组织教学.

本书的主要内容及教学处理意见如下:

第一章先介绍线性方程组及矩阵的一些基本概念,从线性方程组的消元法引出矩阵的初等变换,与中学代数紧密衔接,突出了线性方程组及矩阵的初等变换的作用,为以后各章的讨论提供了方便,奠定了基础;

第二章从分析二阶矩阵和三阶矩阵所确定的行列式的结构出发,递归地定义 n 阶矩阵所确定的 n 阶行列式,由此导出求解一类特殊线性方程组的克拉默法则;

第三章先进一步介绍产生矩阵概念的实际例子,再讨论矩阵运算、逆矩阵、分块矩阵、初等矩阵、矩阵的秩等内容,这一章叙述详尽,说理透彻,例题丰富,学生应该牢固掌握;

第四章先利用矩阵的秩的概念及性质讨论线性方程组有解的条件,以此为基础讨论向量组的线性相关性的理论,达到了化难为易的目的,再综合利用前面知识,讨论线性方程组解的结构,这样,从第一章到第四章循序渐进,形成一个有机整体;

第五章从实例出发讨论矩阵的特征值和特征向量,介绍了矩阵可对角化的条件,重点讨论实对称矩阵可对角化,为第六章作好准备;

第六章利用前面所学的知识,较全面地讨论二次型化为标准形的三种方法及正定二次型的判定,重点讨论用正交变换化二次型为标准形;

第七章介绍了线性代数在几何学、递推关系求解、经济学模型的建立和求解等三个方面的应用实例,以窥见线性代数应用的广泛性,这一章可供教学中选用.

本书的习题按节配置，遵循循序渐进的原则，充分注意基本概念，基本方法和理论，也适当配置了一些应用性习题.除第一章和第七章外，每章后配置总习题，这些题目有许多选自历年研究生入学考试的考题，供学完一章后复习、总结、提高之用.需要说明的是，这些总习题不是要求每个学生都必做的.

本书结构严谨，逻辑清晰，叙述清楚，说明到位，文字流畅，例题丰富，注重应用，习题量较大，便于自学，可作为高等学校经济类、管理类专业学生的教材，也可供工科学生选用或参考.

本书第一、二、三、四章由吴传生编写，第五、六、七章由王卫华编写，全书由吴传生负责统稿定稿.

本书在编写过程中，参考了众多的国内外教材；高等教育出版社的领导和编辑们对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助，尤其是李艳馥老师和胡乃冏老师在本书的编辑和出版过程中付出了大量心血；武汉理工大学教务处、理学院、数学系、统计学系对本书的出版也给予了大力支持，在此一并致谢!

由于编者水平有限，加之时间也比较仓促，教材中一定存在不妥之处，希望专家、同行、读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善.

编　者

2003.8

郑重声明

策划编辑　李艳馥

责任编辑　胡乃冏

封面设计　王　雎

责任印制　杨　明

目　　录

第一章 线性方程组的消元法和矩阵的初等变换

许多自然现象和经济现象，变量之间的依赖关系，本质上是非线性的，但如果忽略若干次要因素，线性依赖的法则不同程度上会较好地符合实际情况，于是线性方程和线性方程组就可以在一定程度上作为描述一些客观事物的数学模型.科学技术和经济管理中的许多问题，往往可以归结为建立和求解线性方程组的问题.

本章主要介绍线性方程组的基本概念，求解线性方程组的消元法，并由此引出矩阵及其初等变换的有关概念.

先看一个实际例子：

引例(物资调运问题) 有三个生产同一产品的工厂 A_1,A_2,A_3，其年产量分别为40(吨)，20(吨)和10(吨)，该产品每年有两个用户 B_1 和 B_2，其用量分别为45(吨)和25(吨)，由各产地 A_i 到各用户 B_j 的距离为 C_{ij}(千米)如表1-1所示($i=1,2,3;j=1,2$)，不妨假设每吨货物每千米的运费为1(元)，问各厂的产品如何调配才能使总运费最少？

表1-1

C_{ij}	A_1	A_2	A_3
B_1	45	58	92
B_2	58	72	36

解 为解决这一问题，设各厂运到各用户的产品数量如表1-2所示.

表1-2

	A_1	A_2	A_3
B_1	x_1	x_2	x_3
B_2	x_4	x_5	x_6

由题目可以看出，3个厂的总产量与两个用户的总用量刚好相等，所以对产地来讲，产品应全部调出，因而有

$$x_1 + x_4 = 40, \tag{1}$$

$$x_2 + x_5 = 20, \tag{2}$$

$$x_3 + x_6 = 10. \tag{3}$$

同时对用户来说,调出的产品刚好为其所需要的,因而又有

$$x_1 + x_2 + x_3 = 45, \tag{4}$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = 25. \tag{5}$$

再来看如何刻画运费.

显然,把 x_1(吨)货物由 A_1 运到 B_1 的运费为 $45x_1$(元),把 x_4(吨)货物由 A_1 运到 B_2 的运费为 $58x_4$(元),…,它们的和即为总运费 S,即

$$S = 45x_1 + 58x_2 + 92x_3 + 58x_4 + 72x_5 + 36x_6. \tag{6}$$

于是,题目要解决的问题是:如何选择非负数 $x_1, x_2, \cdots, x_6$,使之满足(1) ~ (5),而使总用费 S 最小.此即为物资调运问题的数学模型.

物资调运问题的解决,首先依赖于对方程(1) ~ (5) 的研究.在方程(1) ~ (5) 中,每个方程都是一个线性方程.几个线性方程联立在一起,称之为线性方程组.因此方程(1) ~ (5) 构成 6 个未知数 5 个方程的线性方程组.

类似上面的例子还可以举出很多.硬就是说,不少实际问题可以化为线性方程组的问题.这样的方程组所包含的未知数的个数不只是一个两个,而是更多.因此,为了解决这类问题,需要讨论含有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组.若用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表 n 个未知量,设方程的个数为 m 个,则线性方程组就可以写成如下形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{7}$$

这里 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots n)$ 为已知数,它是第 i 个方程中第 j 个未知量 x_j 的系数;$b_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 也是已知数,称为第 i 个方程的**常数项**.当线性方程组(7) 的常数项均为零时,我们称它为**齐次线性方程组**,否则,称为**非齐次线性方程组**.

所谓方程组(7) 的一个**解**就是指 n 个数 $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \cdots, x_n = \xi_n$ 组成的有序数组

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别用 $x_1=\xi_1,x_2=\xi_2,\cdots,x_n=\xi_n$ 代入后,(7) 中的每个方程都成为恒等式.方程组(7) 的解的全体称为**解集合**.**解方程组**实际上是找出它的全部解,或者说,求出它的解集合.如果两个方程组有相同的解集合,它们就称为是**同解的**.

显然,知道了一个线性方程组的全部系数和常数项,这个线性方程组就确定了.确切地说,线性方程组(7) 可为如下形式的矩形数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{matrix}$$

所确定,这样的矩形数表就称为矩阵.

一般地,可给出如下的矩阵定义

定义 1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列的矩阵,简称 $m\times n$ 矩阵,为表示它是一个整体,总是加一个圆括弧(或方括弧),并用大写黑体字母表示它.例如可记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

有时也写成 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

数 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的**元素**.元素全是实数的矩阵称为**实矩阵**,元素中有复数的矩阵称为**复矩阵**.本书中的矩阵如不特别说明,都是指实矩阵.

行数和列数都是 n 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵,n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_n$.

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n)$$

称为**行矩阵**,又称**行向量**.为避免元素间的混淆,行矩阵也记作 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

只有一列的矩阵

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

称为**列矩阵**,又称为**列向量**.(以后,行矩阵和列矩阵我们也可用小写黑体字母表示.)

两个矩阵的行数相等,列数也相等时,就称它们是同型矩阵.如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵,并且它们对应的元素相等,即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots n)$ 那么就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

元素都是零的矩阵称为**零矩阵**,记作 $\mathbf{0}$.注意不同型的零矩阵是不相等的.

另外,如果把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列得到的一个新矩阵,叫做 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

回到线性方程组的讨论.

线性方程组(7)的未知量的系数所确定的矩阵

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

称为方程组(7)的**系数矩阵**.

而(7)所对应的矩阵

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}
$$

称为它的**增广矩阵**.

线性方程组(7)由其增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 唯一确定.

在中学代数中,已经学过用消元法解二元或三元线性方程组,其基本思想是通过消元变形把方程组化成容易求解的同解方程组.不过我们要求消元过程规范而又简便.先看例子

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_3 = 6.\end{cases} \tag{8}$$

解　第二个方程减去第一个方程的 2 倍,第三个方程减去第一个方程,就变成

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = 5.\end{cases}$$

将上面的第二个方程与第三个方程互换,即得

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_2 - x_3 = 2.\end{cases}$$

将第三个方程减去第二个方程的 4 倍,得

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_3 = -18.\end{cases}$$

将第三个方程两边乘$\frac{1}{3}$,得

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = 5, \\ x_3 = -6.\end{cases} \tag{9}$$

将第一个方程减去第三个方程的 3 倍,第二个方程加上第三个方程,得

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 = 19, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = -6.\end{cases}$$

将第一个方程加上第二个方程,得

$$\begin{cases}2x_1 = 18, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = -6.\end{cases}$$

将第一个方程两边乘$\frac{1}{2}$得

$$\begin{cases}x_1 = 9, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = -6.\end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

上面解方程的过程,从(8)到(9)叫**消元过程**,从(9)到(10)叫**回代过程**.

分析一下消元法,它实际上是对方程组进行了以下几种变换:

(1) 交换两个方程的次序;

(2) 用一个非零的常数乘以某个方程;

(3) 把一个方程的适当倍数加到另一个方程.

定义 2 上述三种变换均称为线性方程组的**初等变换**.

命题 线性方程组的初等变换总是把方程组变成同解方程组.

读者可分别对线性方程组的三种初等变换对该命题予以证明.由该命题,线性方程组的初等变换也称为**同解变换**.

上述变换过程中,实际上只是对方程组的系数和常数项进行运算,未知量并未参与运算.因此,例如例 1 中,对方程组的变换完全可以转换成对其增广矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

的行进行变换.

把线性方程组的三种初等变换移植到矩阵上,就得到矩阵的三种初等变换.

定义 3 下面的三种变换称为矩阵的**初等行变换**:

(i) 对调矩阵的两行(对调第 i,j 两行,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$);

(ii) 以非零常数 k 乘矩阵某一行的各元素(第 i 行乘 k,记作 $r_i \times k$);

(iii) 把某一行所有的元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上,记作 $r_i + kr_j$).

把定义中的"行"变成"列",即得矩阵的**初等列变换**的定义(所用记号是把"r"换成"c").

矩阵的初等行变换与初等列变换,统称为**初等变换**.

定义 4 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$,就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价,记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

不难验证,矩阵之间的等价具有下列性质:

(i) 自反性 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$;

(ii) 对称性 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$;

(iii) 传递性 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$.

数学中把具有上述三条性质的关系称为**等价关系**.线性方程组同解,就是线性方程组间的一种等价关系.

由定义 2 和定义 3 可知,线性方程组的同解变换,也就是方程组增广矩阵的初等行变换.对于例 1,其一一对照过程如下:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\4&2&5&4\\2&0&2&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&4&-1&2\\0&1&-1&5\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_1$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&1&-1&5\\0&4&-1&2\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_2$$

$$\xrightarrow{r_3-4r_2}\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&1&-1&5\\0&0&3&-18\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_3$$

$$\xrightarrow{r_3\div 3}\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&1&-1&5\\0&0&1&-6\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_4$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-3r_3}\begin{pmatrix}2&-1&0&19\\0&1&0&-1\\0&0&1&-6\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_5$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}2&0&0&18\\0&1&0&-1\\0&0&1&-6\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_6$$

$$\xrightarrow{r_1\div 2}\begin{pmatrix}1&0&0&9\\0&1&0&-1\\0&0&1&-6\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_7.$$

由 $\boldsymbol{B}_7$ 所对应的

$$\begin{cases}x_1=9,\\x_2=-1,\\x_3=-6\end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-1\\-6\end{pmatrix}. \tag{10}$$

就是原方程组的解.

以上由 $\boldsymbol{B}$ 到 $\boldsymbol{B}_4$ 的变换过程对应的是消元过程,而从 $\boldsymbol{B}_4$ 到 $\boldsymbol{B}_7$ 的变换对应