高等学校数学系列教材

矩阵论

研究生用

卜长江 罗跃生 主编

哈尔滨工程大学出版社

高等学校数学系列教材

矩 阵 论

卜长江　罗跃生　主编

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论/卜长江,罗跃生主编.一哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2003
ISBN 7-81073-492-X

Ⅰ.矩… Ⅱ.①卜… ②罗… Ⅲ.矩阵一理论
Ⅳ.0151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 057080 号

内 容 简 介

本书较为详细地介绍了线性空间、线性映射、酉空间、欧式空间、若当标准型、矩阵的分解、矩阵的范数、矩阵的导数、积分、级数、矩阵函数和广义逆矩阵等基本内容。全书共分为八章,每章均配有一定数量的习题,供读者练习使用。

本书可作为工科硕士研究生教材,也可供本科生和工程技术人员及科技工作者参考。

哈 尔 滨 工 程 大 学 出 版 社 出 版 发 行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)2519328 邮编:150001
新 华 书 店 经 销
黑 龙 江 省 教 育 厅 印 刷 厂 印 刷

*

开本 850mm×1 168mm 1/32 印张 9.75 字数 252 千字
2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—2 000 册
定价:16.00 元

前　　言

由于自然科学、工程技术、经济和管理科学的迅速发展，矩阵理论得到了重要的应用。作者力图编写具有一定的理论深度，且通俗易懂，适合研究生教学特色的教材，故在教材的内容取舍上、次序安排上，与以往的教材有一定的不同。

本教材是在几届研究生矩阵论课程讲义的基础上，参照课程的基本要求编写的，第一、二、三、四、八章由卜长江编写，第五、六、七章由罗跃生编写。本书约用 50～60 学时讲授，各专业可根据需要灵活掌握。学习本书的读者，只须具备线性代数、少量的高等数学和复变函数知识即可。

哈尔滨工程大学的唐向浦教授，黑龙江大学曹重光教授对本书的原稿作了认真细致的审阅，并提出了很多宝贵的意见和建议。哈尔滨工程大学出版社和哈尔滨工程大学应用数学系十分关心本书的出版，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者的水平有限，书中难免有不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

2003 年 7 月

目　　录

第一章　线性空间与线性映射

线性空间是研究矩阵理论的重要基础，本章主要讨论线性空间及其子空间的性质、线性映射与矩阵的关系等.

§1.1　数　　域

定义 1　设 F 是至少包含两个数的数集，如果 $\forall a, b \in F$ 均有 $a \pm b, ab, \frac{a}{b}(b \neq 0) \in F$，则称 F 是**数域**.

例 1　全体实数构成实数域，记为 $\mathbf{R}$. 全体复数构成复数域，记为 $\mathbf{C}$. 全体有理数构成有理数域，记为 $\mathbf{Q}$.

例 2　全体整数不构成数域，因为对除法不封闭.

例 3　设 $F = \{a + \sqrt{2}b \mid a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}\}$，证明 F 是数域.

证明　$\forall \alpha, \beta \in F$，则 $\exists a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{Q}$，使得 $\alpha = a_1 + \sqrt{2}b_1, \beta = a_2 + \sqrt{2}b_2$，易证 $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \frac{\alpha}{\beta}(\beta \neq 0) \in F$.

例 4　证明任何数域 F 都包含有理数域.

证明　因为 F 中至少包含两个不同元素，所以 $\exists a \in F$，$a \neq 0$，由运算的封闭性知 $\frac{a}{a} = 1 \in F, 1+1=2, 1+2=3, \cdots \in F, 1-2=-1, 1-3=-2, \cdots \in F$，所以 F 包含了全体整数，又由除法封闭性知 F 包含有理数域.

和号 $a_{ij} \in F, \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$.

§1.2 线性空间

在线性代数中,$\mathbf{R}^n$ 是 n 维实向量空间,在本节中将此概念推广到一般向量空间.

定义 1 设 V 是一个非空集合,F 是一个数域.在集合 V 的元素之间定义一种称之为加法的运算,且 V 关于加法封闭,即 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ 有惟一的 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$.在 F 与 V 之间定义一种运算称之为数乘,即 $\forall \lambda \in F, \boldsymbol{x} \in V$ 有惟一确定的 $\boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{x} \in V$ 与之对应,如果以上两种运算满足以下八条运算规则,则称 V 为数域 F 上的**线性空间**,V 中元素也称为 V 中的**向量**,记为 $V = V(F)$.

1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$;
2. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}), \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in V$;
3. $\exists \boldsymbol{\theta} \in V$ 使 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in V$,称 $\boldsymbol{\theta}$ 为零元素,也记为 $\mathbf{0}$;
4. $\forall \boldsymbol{x} \in V, \exists \boldsymbol{y} \in V$,使 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\theta}$, 记 $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}$;
5. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}; \forall \lambda,\mu \in F, \forall \boldsymbol{x} \in V$;
6. $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}; \forall \lambda \in F, \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$;
7. $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}; \forall \lambda,\mu \in F, \forall \boldsymbol{x} \in V$;
8. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in V$.

例 1 设 F 为数域,则 $F^n = \{[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}} \mid a_1,a_2,\cdots,a_n \in F\}$ 按通常的 n 维向量加法与数乘,不难证明 F^n 为 F 上的线性空间.

例 2 记 $F^{m\times n}$ 为数域 F 上的 $m \times n$ 矩阵的全体,按通常的矩

阵加法与数乘构成 F 上的线性空间,其中 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{O}_{m\times n}$.

例 3　$C[a,b]$ 为区间$[a,b]$上一切一元连续实函数,按通常的实函数加法和数乘,构成了实数域**R**上的线性空间,其中 $\boldsymbol{\theta} = 0$.

例 4　$P[x]_n$ 为不超过 $n-1$ 次的实多项式及零多项式的全体,是实数域 **R** 上的线性空间.

例 5　复数域**C**是实数域**R**上的线性空间,而**R**却不是**C**上的线性空间.

以下为线性空间的简单性质.

性质 1　线性空间 $V(F)$ 中零元素惟一.

证明　设有零元素 $\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2 \in V(F)$,则 $\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\theta}_2$.

性质 2　$\forall \boldsymbol{x} \in V(F)$, $\exists \boldsymbol{y} \in V(F)$ 使得 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\theta}$,则 $\boldsymbol{y}$ 惟一,称为 $\boldsymbol{x}$ 的负元素.

证明　设 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{\theta}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{y}_1 + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}_2 \\ &= \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}_2\end{aligned}$$

性质 3　$0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}, (-\lambda)\boldsymbol{x} = -\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$.

证明　$0\boldsymbol{x} = (0+0)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}$,所以 $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$.

因为 $\lambda\boldsymbol{x} + (-\lambda)\boldsymbol{x} = [\lambda + (-\lambda)]\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$,所以$(-\lambda)\boldsymbol{x} = -\lambda\boldsymbol{x}$.

因为 $\lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\theta} = \lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta}) = \lambda\boldsymbol{x}$,所以 $\lambda\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$.

性质 4　若 $\lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$,其中 $\lambda \in F, \boldsymbol{x} \in V(F)$,则 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$.

证明　若 $\lambda = 0$ 命题显然成立,不妨设 $\lambda \neq 0$,则

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}(\lambda\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$$

定义 2　设 $W \subset V(F)$,若 W 在数域F上也是线性空间,则

称 $W(F)$ 为 $V(F)$ 的**子空间**(按原来的两种运算).

若 W 是线性空间 V 的非空子集,则在线性空间定义的八个条件中除3,4条外,W 显然满足其余条件.而如果封闭性满足了,3,4条就成立了.这是因为 $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W, \lambda\boldsymbol{x}\in W(\forall\lambda\in F)$,则 $0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}\in W, -\boldsymbol{x}=(-1)\boldsymbol{x}\in W$,因此有下面的定理.

定理1 设 $V(F)$ 是线性空间,W 为 V 的非空子集,按原来的两种运算 W 是线性空间 $\Leftrightarrow W$ 按原来两种运算封闭.

例6 数域 F 上的 n 阶对称阵的全体构成了 $F^{n\times n}$ 的一个子空间.

定义3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是数域 F 上的线性空间 V 中的向量,则不难证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 的线性组合的全体构成了 V 的一个子空间,记为 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)$ 或 $\mathrm{span}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t]$,称为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ **生成或张成子空间**.

零向量集合及 V 本身都是 V 的子空间,称为**平凡子空间**.若 W 是 V 的子空间,且不是平凡子空间,则称 W 是 V 的**真子空间**.

§1.3 线性空间的基

与 $\mathbf{R}^n$ 中一样,我们在 $V(F)$ 中也要讨论线性相关性及向量组的秩和极大无关组,向量组的等价性,线性空间和线性子空间的基底、维数,以及向量在一组基下的坐标和相关性质.

一、线性空间的基

定义1 设 $\boldsymbol{x}_i\in V(F), a_i\in F, i=1,2,\cdots,m$,若

$$\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+a_m\boldsymbol{x}_m$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 可由 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ **线性表示**,或称 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的**线性组合**.

定义 2 设 $A:\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m;B:\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_s$ 是线性空间 $V(F)$ 中的两个向量组,如果 A 中的任一个向量可由向量组 B 线性表示,则称**向量组 A 可由向量组 B 线性表示**.如果向量组 A 与 B 可以互相线性表示,则称向量组 A 与 B **等价**.

定义 3 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m \in V(F)$,如果存在一组不全为0的常数 $a_1,a_2,\cdots,a_m \in F$ 使

$$a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_m\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{\theta}$$

则称向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ **线性相关**,否则称 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ **线性无关**.

定义 4 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 是 $V(F)$ 中的向量组,如果 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 中有 r 个向量线性无关,而所有的 $r+1$ 个向量(如果有的话)都线性相关,则称此 r 个向量为向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的**极大无关组**,称 r 为向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的**秩**,记为 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m]$.**规定只含零向量的向量组秩为零**.

与 $\mathbf{R}^n$ 类似,在线性空间 $V(F)$ 中下列命题成立.

命题 1 设 $m\geqslant 2$,则 $V(F)$ 中向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中有某个向量可由其余的向量线性表示.

命题 2 若 $V(F)$ 中向量组的某一子向量组线性相关,则该向量组线性相关.

命题 3 若 $V(F)$ 中向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关,则其任意非空子向量组也线性无关.

命题 4 设 $\boldsymbol{x}\in V(F)$,则 $\boldsymbol{x}$ 线性无关 $\Leftrightarrow \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{\theta}$.

命题 5 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}\in V(F)$,若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性

无关,$x_1,x_2,\cdots,x_m,y$ 线性相关,则 y 可由 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 惟一线性表示.

定义 5 线性空间 V 中的向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为 V 的**基向量组或基(底)**,如果有:

1. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关;

2. $V(F)$ 中任一向量可由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性表示.

则称 n 为 V 的**维数**,记 $\dim V = n$.

如果对 $\forall n$ 均可在 $V(F)$ 中找到 n 个线性无关的向量,则称 $V(F)$ 为**无限维的向量空间**(例如实数域上全体多项式的集合).**只含零向量的线性空间维数规定为** 0.

命题 6 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为线性空间 $V(F)$ 的基,则 $\forall x \in V(F)$,x 可由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 惟一线性表示.

命题 7 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为线性空间 $V(F)$ 的基,则 $V(F) = L[x_1,x_2,\cdots,x_n]$.

定义 6 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $V(F)$ 的基,则 $\forall x \in V(F)$,有惟一的表达式

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = [x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, a_i \in F, i = 1,2,\cdots,n$$

称 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 或 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 为 x 基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 下的**坐标**.

注:基不惟一,例如在 $\mathbf{R}^n$ 中

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,e_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

和

$$e_1'=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},e_2'=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,e_n'=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

都是的 $\mathbf{R}^n$ 基. 称 $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,e_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 的自然基底.

例 1 $P[x]_n=\{f(x)\mid f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}, a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\in\mathbf{R}\}$, 则 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 为 $P[x]_n$ 的基.

注: n 次多项式的全体不构成线性空间,因为不封闭.

二、基与基的关系,向量在两组基下的坐标关系

定义 7 设 $V(F)$ 的两组基为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$, 令

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1'=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2'=a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\ \vdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}_n'=a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n\end{cases}$$

则

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'] = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 的**过渡矩阵**.

命题 8 基底过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

证明 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 线性无关,所以

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

只有零解,即

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n]\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

只有零解.又因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解,所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

$\boldsymbol{A}^{-1}$ 为由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的过渡矩阵,这是因为

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n']\boldsymbol{A}^{-1} = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n]$$

定理 1 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 是 V 的两组基,且 $\boldsymbol{A}$ 为由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2', \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 的过渡矩阵,V 中向量 $\boldsymbol{x}$ 在基

$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 下的坐标分别为 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{bmatrix}$，则

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{bmatrix}$$

证明 $[\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'] = [\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]\boldsymbol{A}$，而

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n = [\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = a_1'\boldsymbol{\varepsilon}_1' + \cdots + a_n'\boldsymbol{\varepsilon}_n' = [\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'] \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{bmatrix}$$

$$= [\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]\boldsymbol{A} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{bmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关，故

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{bmatrix}$$

例 2

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

是 $\mathbf{R}^3$ 两个基,求由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\boldsymbol{\varepsilon}_3'$ 的过渡矩阵.

解 由于
$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_1' = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2' = \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3' = \dfrac{1}{2}(-\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3) \end{cases}$$

即

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\boldsymbol{\varepsilon}_3'] = [\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

所以