高等学校数学学习辅导教材

GAODENG XUEXIAO SHUXUE XUEXI FUDAO JIAOCAI

高等数学课程过关强化试卷

高等数学教学研究组／组编
王丽燕／编著

高等数学（下）

（理工类·普通院校）

真正的一线教师力作
针对性强　信息超值
考点覆盖率 100%
考试成功率 100%
保你轻松过关得高分

ISBN 7-5611-2280-2

ISBN 7-5611-2280-2 定价:20.00元（本册10.00元）

大连理工大学出版社

责任编辑／刘 杰　封面设计／王福刚

高等数学课程过关强化试卷系列
高等数学（上）（理工类·重点院校）
高等数学（下）（理工类·重点院校）
高等数学（上）（理工类·普通院校）
高等数学（下）（理工类·普通院校）
线性代数（理工类·本科）
概率论与数理统计（理工类·本科）
微积分（上）（经管类）
微积分（下）（经管类）
高等数学（上）单元跟踪测试及期末冲刺★级试题
（理工技术类院校·高职高专）
高等数学（下）单元跟踪测试及期末冲刺★级试题
（理工技术类院校·高职高专）
线性代数单元跟踪测试及期末冲刺★级试题
（理工技术类院校·高职高专）

高等学校数学学习辅导教材

高等数学课程过关强化试卷

高等数学（下）

（理工类・普通院校）

高等数学教学研究组　组编

王丽燕　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学课程过关强化试卷:高等数学(下)(理工类·普通院校) / 王丽燕编著 .
大连 :大连理工大学出版社,2003.4
ISBN 7-5611-2280-2

Ⅰ.高…　Ⅱ.王…　Ⅲ.高等数学—高等学校—习题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 012631 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河　邮政编码:116024
电话:0411-4708842　传真:0411-4701466　邮购:0411-4707961
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:7　字数:155 千字
印数:1～8 000
2003 年 4 月第 1 版　2003 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑:刘　杰　责任校对:刘智伟
封面设计:王福刚

定　价:20.00 元(本册 10.00 元)

前　言

《高等数学》是大学理工科、经济学、管理学等门类各专业学生必修的基础课,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目,同时高等数学又是在校大学生感到比较难学的一门课。针对目前高等数学课时减少,学生学习困难,期末考试难以过关的实际问题,我们根据原国家教委审定的普通高等学校"高等数学课程教学基本要求"(教学大纲),又根据教育部 2003 年制定的"全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲"的要求,编写了这本融期末复习与考研前期辅导热身为一体的《高等数学课程过关强化试卷》(理工类・普通院校)。本书也可以作为高等院校高等数学教师的教学工具书。

本书的特点是:

一、题型齐全,覆盖面广,难度适中

我们以普通高等学校期末考试试卷为标准,所选的题目类型齐全,题型精典,覆盖面达 100%。每套题基本题占 65 分左右,中等题占 20 分左右,综合题占 15 分左右。注重基本概念、基本理论、基本计算和基本应用,综合题可以帮助学生提高分析问题与解决问题的能力,激发学生的学习兴趣,培养应用意识与创新意识,作了本书的试卷,可以将高等数学的知识有机地联系在一起,温故知新,加深理解,使你的期末考试不仅可以顺利过关,而且成绩达到优秀。

二、展开解题思路,突出解题方法,传授解题技巧

我们对每一套题都作了详尽的解答,使读者作完每套考题后有所对照,了解自己的真实水平。另外,试题解答我们注重知识与一题多解,充分展示解题思路、解题方法与解题技巧,使你充分感受数学

的乐趣和数学的美。

本书由王丽燕编著,柳杨、铁军作了部分编写与校对工作,浙江大学秦禹春教授担任主审。本书在编写过程中得到了沈阳工业学院沙萍副教授,长春大学敬石心教授,鞍山钢铁学院李海燕教授,大连理工大学庞丽萍博士及大连大学教务处徐晓鹏教授的热情帮助与指点,编者在此向他们一并表示衷心的感谢!。

尽管编者从事高等数学教学近二十个年头,有着丰富的教学经验,但限于编者水平,加之时间仓促,错漏不当在所难免。如果你发现了本书的不足,希望你能告诉我,如果你感到本书对你确有帮助,使你在期末考试时稳操胜券,请你把书留给你的学弟学妹们。

编　者

2003 年 3 月

班级____________ 姓名____________ 得分____________

试卷一

（时间 110～120 分钟）

一、填空题(每题 5 分,共 20 分)

1. 曲线$\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$在点$(1,1,\sqrt{3})$处的切线与 y 轴正向之间的夹角为(　　)。

2. 设$f(x,y,z)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则$\mathbf{grad}f(x,y,z)=$(　　),函数$f(x,y,z)$在点$(1,1,1)$处沿点$(1,1,1)$到点$(2,2,2)$的方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}=$(　　)。

3. 不具体写出幂级数的展开式,直接确定$f(x)=\frac{1}{3+4x}$展成形如$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$的幂级数的收敛区间为(　　)。

4. 设$f(x)$是周期为2π的周期函数,它在$(-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=x^3$,将$f(x)$展成傅立叶级数时,$a_2=$(　　),若将展成的傅立叶级数的和函数记为$s(x)(-\infty<x<+\infty)$,则$s\left(\frac{5}{2}\pi\right)=$(　　)。

二、完成下列各题(每题 5 分,共 20 分)

1. 求曲面$x^2+2y^2+3z^2=6$在点$(1,1,1)$处的切平面方程和法线方程。

2. 设函数$z=f(x,x^2-y^2)$的二阶偏导数连续,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

3. 设$x^2+y^2+z^2=z$,求dz。

4. 求$\oint_\Gamma 2y\,dx+3x\,dy-z^2\,dz$,其中$\Gamma$是圆周$x^2+y^2+z^2=9,z=0$,若从 z 轴正向看去取逆时针方向。

三、(8 分)

试分解已知正数 a 为三个正数之和,而使它们的倒数之和为最小。

四、(8 分)

计算二重积分 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x}dx$。

五、(8 分)

计算$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$,其中 $\Omega: x^2+y^2 \leqslant z^2, x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$。

六、(8 分)

计算$\oiint\limits_{\Sigma} x^2zdxdy+y^2xdydz+z^2ydzdx$,其中$\sum$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧。

七、(9 分)

设有幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$。

(1) 求它的收敛半径和收敛域;

(2) 求其和函数;

(3) 计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n \cdot n}$。

八、(7 分)

求 $y''-6y'+8y=e^{2x}$ 的通解。

九、(7 分)

已知 $f(0)=-\frac{1}{2}$,求 $f(x)$ 使$\int_B^A[e^{-x}+f(x)]ydx-f(x)dy$ 与路径无关,并求 A 为 $(0,0)$,B 为 $(1,1)$ 时的积分值。

十、(5 分)

在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=\alpha\sin x(\alpha>0)$ 中,求一条曲线 L,使该曲线从 O 到 A 的积分$\int_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy$ 的值最小。

班级________ 姓名________ 得分________

试卷二

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 都存在，则（　　）。

A. $f(x,y)$ 在 P 点必连续　　B. $f(x,y)$ 在 P 点必可微

C. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$ 及 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$ 都存在　　D. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在

2. 若 $u=F(x,y,z)$ 的三个一阶偏导数存在，且不全为零，则方向 $\left\{\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}\right\}$ 是函数 u 在点 (x,y,z) 处（　　）。

A. 变化率最大的方向

B. 变化率最小的方向

C. 可能是变化率最大的方向，也可能是变化率最小的方向

D. 既不一定是变化率最大的方向，也不一定是变化率最小的方向

3. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 在 $x=4$ 处条件收敛，则其收敛半径 $R=$（　　）。

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 不能确定

4. 下列级数中属于条件收敛的是（　　）。

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(n+1)}{n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}}{n^n}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$

5. 微分方程 $y''-3y'+2y=3x-2e^x$ 的特解 y^* 的形式为 $y^*=$（　　）。

A. $(ax+b)e^x$　　B. $(ax+b)xe^x$

C. $(ax+b)+ce^x$　　D. $ax+b+cxe^x$

二、完成下列各题（每题 6 分，共 36 分）

1. 设函数 $z=f(x-z,y-z)$ 有连续一阶偏导数，求 dz。

2. 交换积分次序，并计算 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\dfrac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\dfrac{\pi x}{2y}dy$。

3. 求曲线 $x=\dfrac{t^2}{2}$，$y=t+3$，$z=t^3+4$ 上对应于 $t=1$ 的点处的切线方程与法平面方程。

4. 求微分方程 $xy'=3y+x^2$ 的通解。

5. 设 L 是曲线 $y=\ln x$ 上自点 $A(1,0)$ 到点 $B(2,\ln 2)$ 的一段弧，求 $\int_L x^2 ds$。

6. 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$的敛散性。

三、(8 分)

设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法线向量，求函数 $u=\frac{1}{z}(6x^2+8y^2)^{\frac{1}{2}}$ 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数。

四、(8 分)

计算三重积分$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$，其中 Ω：$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=a>0 \end{cases}$围成的区域。

五、(9 分)

计算曲面积分$\iint_{S}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中 S：$x^2+y^2+z^2=1$，$z\geqslant 0$ 外侧。

六、(8 分)

计算曲线积分$\oint_{\Gamma}(z+y)dx+(x+z)dy+(x-y)dz$，其中 Γ 是$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$，从 x 轴正向往负向看逆时针方向。

七、(8 分)

求 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots(-1<x<1)$ 的和函数 $s(x)$，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}$的值。

八、(8 分)

在第一卦限内作椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的切平面使之与三坐标面围成的四面体的体积最小，求此切平面的方程。

班级______ 姓名______ 得分______

试卷三

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、解下列各题（每题 6 分，共 60 分）

1. 设 $u = f(x+y, xy)$，且 $f(x,y)$ 具有二阶偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$。

2. 求曲面 $z = 2x^2 + 4y^2$ 在点 $(2,1,12)$ 处的切平面与法线方程。

3. 求 $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$ 的极值。

4. 计算 $\iint\limits_D |\cos(x+y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: y = x, y = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的闭区域。

5. 计算 $I = \int_\Gamma (y^3 e^x - 2y)\mathrm{d}x + (3y^2 e^x - 2)\mathrm{d}y$，其中 Γ 是从 $O(0,0)$ 到 $A(2,2)$ 再到 $B(4,0)$ 的折线。

6. 计算 $I = \oiint\limits_\Sigma (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\sum$ 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 0, z = 3$ 所围成的立体的表面的外侧。

7. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n}{n^2}$ 是绝对收敛还是条件收敛或者发散？

8. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且满足 $f(t) = 1 + \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，试求函数 $f(x)$。

9. 计算 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ 在点(1,1,1)处的梯度。计算 $\boldsymbol{a} = xy^2z^2\boldsymbol{i} + z^2\sin y\boldsymbol{j} + x^2e^y\boldsymbol{k}$ 的旋度。

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$n > 0$，证明：

$$\int_a^b dy\int_a^y (y-x)^n f(x)dx = \frac{1}{n+1}\int_a^b (b-x)^{n+1} f(x)dx。$$

二、(10分)

计算由锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 和旋转抛物面 $az = x^2 + y^2 (a > 0)$ 所围立体的体积。

三、(10分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n$ 的收敛半径，收敛区间及和函数。

四、(10分)

将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$ 展开成 x 的幂级数。

五、(10分)

展开 $f(x) = x + 1 (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 为正弦级数。

班级____________ 姓名____________ 得分____________

试卷四

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、完成下列各题（每题 6 分，共 60 分）

1. 设 $z = u^2v - uv^2$，而 $u = x\cos y, v = x\sin y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

2. 设 $e^z - xyz = 0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

3. 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$，其中 $f(u)$ 为可导函数，试证：$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$。

4. 计算二重积分 $\int_1^3 dy \int_{y-1}^2 e^{x^2} dx$ 的值。

5. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z dv$，其中 Ω 是由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ 围成的闭区域。

6. 计算曲线积分 $\oint_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$，其中 L 是由抛物线 $y = x^2$ 和 $y^2 = x$ 所围成的区域的正向边界。

7. 把 $\ln(b + 2x)(b > 0)$ 展开成 x 的幂级数。

8. 问函数 $u = xy^2z$ 在点 $P(1, -1, 2)$ 处沿什么方向的方向导数最大？并求此方向导数的最大值。

9. 求微分方程 $y''(1+x^2)=2xy'$ 满足初使条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=3$ 的特解。

10. 将周期为 2π 的函数 $f(x)=e^x, x\in[-\pi,\pi)$ 展开成傅立叶级数时，其中系数 $a_4=$(　　)(只写表达式，不必计算)，傅立叶级数在 $x=3\pi$ 处收敛于(　　)。

二、(8 分)

已知曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截出一个椭圆，求原点到该椭圆的最长和最短距离。

三、(8 分)

求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在柱面 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 内的那部分面积。

四、(6 分)

计算 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\sum$ 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的下侧。

五、(8 分)

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n-1}{2^n}$ 的和。

六、(10 分)

已知可微函数 $y=f(x)$ 经过 $P_1(0,1)$ 和 $P_2(1,0)$ 的一段曲线为凸的，$P(x,y)$ 为曲线上任意点，且曲线 $\overset{\frown}{P_1P}$ 与弦 P_1P 之间的面积为 $2x^2$，试求 $f(x)$ 的表达式。

班级______ 姓名______ 得分______

试卷五

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、完成下列各题（每题 6 分，共 60 分）

1. 设 $u=\ln(x^3+y^3+z^3)$，求 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$。

2. 设 $z=x^2f(u)$，而 $u=\frac{y}{x}$，其中 $f(u)$ 二阶可导，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

3. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点(1,2)处沿向量 $\boldsymbol{l}=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}$ 方向的方向导数。

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x,y=0,x=1$ 所围成的闭区域。

5. 求 $I=\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 $z=x^2+y^2,z=1$ 及 $z=4$ 所围成的空间闭区域。

6. 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$，试写出 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅立叶级数的和函数 $s(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式。

7. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面所围成的立体的体积（或表面积）。

8. 计算曲线积分 $\oint_L(2x+3y-x^2y)\mathrm{d}x+(x-2y+xy^2)\mathrm{d}y$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=2$ 的顺时针方向。

9. 试求曲面 $xe^y - ye^z = 1$ 上点 $M(1,0,1)$ 处的切平面方程。

10. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n!}$。

二、(8 分)

求 $\int_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y}{3(x^2+y^2)}$，其中 L 为曲线 $y=\cos\dfrac{\pi x}{2}$ 上由点 $A(-1,0)$ 到点 $B(1,0)$ 的有向曲线段。

三、(8 分)

已知流体速度 $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$，求由平面 $z=1, x=0, y=0$ 和锥面 $z^2=x^2+y^2$ 所围的立体在第一卦限部分向外流出的流量。

四、(8 分)

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = A$（$A$ 为常数），讨论级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 的敛散性。

五、(8 分)

已知 $f(x,y,z) = \ln x + \ln y + 3\ln z$，试在位于第一卦限的球面 $x^2+y^2+z^2=5r^2$ 上找一点，使函数在此点上取得最大值。并用此结果证明对于任意的正实数 a,b,c 有不等式

$$abc^3 \leqslant 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$$

成立。

六、(8 分)

已知函数 $z=z(x,y)$ 在任意点 (x,y) 处的全增量为

$$\Delta z = [\sin x - \varphi(x)]\frac{y}{x}\Delta x + \varphi(x)\Delta y + o(\rho)$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，$o(\rho)$ 表示当 $\rho\to 0$ 时是比 ρ 高阶无穷小，已知 $\varphi(\pi)=1$，求曲线积分

$$\int_{(1,0)}^{(\pi,\pi)} [\sin x - \varphi(x)]\frac{y}{x}\mathrm{d}x + \varphi(x)\mathrm{d}y$$

班级______ 姓名______ 得分______

试卷六

（时间 110 ~ 120 分钟）

一、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1. 设 $x + 2y - 2xyz = 0$，则 $z_x(1,1) = ($　　$)$。

2. 设 $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，则 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}u) = ($　　$)$。

3. 微分方程 $xy' = y\ln y$ 的通解为（　　）。

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛域是（　　）。

5. 设 $f(x) = \pi x - x^2, 0 < x < \pi$，又设 $s(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内的以 2π 为周期的正弦级数展开式的和函数，则 $x \in (\pi, 2\pi), s(x) = ($　　$)$。

二、（5 分）

设 $z = e^{x-2y}, x = \sin t, y = t^3$，求全导数 $\frac{dz}{dt}$。

三、（8 分）

设 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$。

(1) 问 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处偏导数是否存在？

(2) 问 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处是否连续？

(3) 问 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处是否可微？

四、（6 分）

设由方程 $\begin{cases} xy = uv \\ x - y = \frac{u}{v} \end{cases}$ 确定函数 $x = x(u,v), y = y(u,v)$，求 $\frac{\partial x}{\partial u}$。

五、（8 分）

当常数 $p > 0$ 时，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^p}$ 的收敛区间，并指出在区间的右端点级数是否收敛？若收敛是绝对收敛还是条件收敛？

六、（8 分）

设由 $y = \ln x$，x 轴及 $x = e$ 所围的均匀薄板其密度为 $\mu = 1$，求此薄板绕 $x = t$ 旋转的转动惯量 $I(t)$，并问 t 为何值时 $I(t)$ 最小。

七、(8 分)

设函数 $y(x)$ 的二阶导数连续，且 $y'(0)=0$，试由方程

$$y(x)=1+\frac{1}{3}\int_0^x[-y''(t)-2y(t)+6te^{-t}]\mathrm{d}t$$

确定函数 $y(x)$。

八、(8 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n(-1<x<1)$ 的和函数。

九、(6 分)

求微分方程 $xy'+y=2\sqrt{xy}$ 的通解。

十、(8 分)

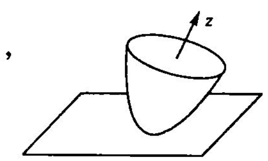
计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 夹在 $z=1,z=2$ 之间部分的下侧。

十一、(10 分)

求微分方程 $y'''-y'=0$ 的哪条积分曲线在原点处有拐点且以 $y=2x$ 为它的切线？

十二、(10 分)

把均匀的旋转抛物线物体 $x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$ 放在水平的桌面上，当主体处于稳定时(重心最低)，求它的轴线与桌面的夹角。



(十二题图)

班级______ 姓名______ 得分______

试卷七

（时间 110 ~ 120 分钟）

一、完成下列各题(每题 6 分,共 60 分)

1. 设 $z=(1+xy)^{\frac{y}{x}}$,求 $\mathrm{d}z$。

2. 求椭球面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 的平行于平面 $2x-3y+2z+1=0$ 的切平面方程，并求切点处的法线方程。

3. 求半径为 R,中心角为 2α 的均匀扇形薄片的重心坐标。

4. 设 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=1$ 围成的闭区域,试把三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}\Omega$ 在下面三种情形化为三次积分

(1) 利用直角坐标(x,y,z);

(2) 利用柱面坐标(r,θ,z);

(3) 利用球面坐标(r,θ,φ)。

5. 计算 $\oint\limits_{L}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$ 部分的边界闭路,方向是经 xOy 面上的边界,再经 yOz 面上的边界,最后经 xOz 面上的边界。

6. 若曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t,y=\mathrm{e}^t\sin t,z=\mathrm{e}^t$ 弧上每一点的密度与该点矢径模的平方成反比,且在$(1,0,1)$ 处为 1,试求曲线从对应点 $t=0$ 到对应点 $t=t_0$ 的一段质量。

7. 求密度为 ρ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量。

8. 求 $I=\oiint\limits_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $f(x),g(y),h(z)$ 为连续函数,Σ 是长方体 $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant z\leqslant c$ 表面的外侧。

9. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{3n} (x > 0)$ 的敛散性。

10. 求 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^4}$ 的通解。

二、(7 分)

估计积分值 $\iint_D (x + xy - x^2 - y^2) d\sigma$ 的大小，其中 $D: 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2$。

三、(7 分)

计算 $I = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2) dv$，其中 Ω 是由 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz (R > 0)$ 确定。

四、(7 分)

求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}$ 的收敛区间及和函数。

五、(7 分)

验证当 $x + y \neq 0$ 时，存在二元函数 $u = u(x,y)$ 使 $du = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$，并求 $u(x,y)$。

六、(7 分)

已知 $f(0) = 0$ 及 $f'(x) = 1 + \int_0^x [6\sin^2 t - f(t)] dt$，求函数 $f(x)$。

七、(5 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,a] (a > 0)$ 上连续，试证：

$$2\int_0^a f(x) dx \int_x^a f(y) dy = [\int_0^a f(x) dx]^2$$