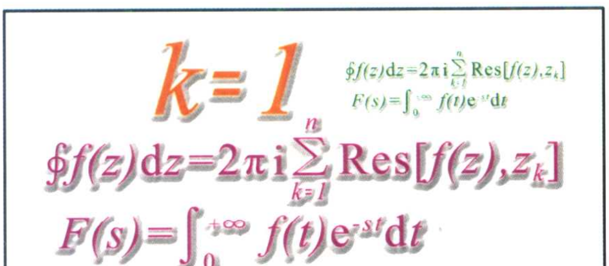
高等学校数学教材系列丛书

复变函数与积分变换
——题型·方法



→解题方法
→典型例题
→综合练习
→模拟考题
→考研题型

主编 杨战民 副主编 任小红 梁晓毅

西安电子科技大学出版社 http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

复变函数与积分变换
——题型·方法

主　编　杨战民
副主编　任小红　梁晓毅

西安电子科技大学出版社
2003

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换——题型·方法/杨战民主编.
—西安：西安电子科技大学出版社，2003.8
(高等学校数学系列丛书)
ISBN 7-5606-1266-0

Ⅰ.复… Ⅱ.杨… Ⅲ.①复变函数—高等学校—教学参考资料
②积分变换—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 048500 号

责任编辑　戚文艳
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)8242885　8201467　　　邮　　编　710071
http://www.xduph.com　　E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印　　刷　西安兰翔印刷厂
版　　次　2003 年 8 月第 1 版　2003 年 8 月第 1 次印刷
开　　本　850 毫米×1168 毫米　1/32　印张 9.1875
字　　数　223 千字
印　　数　1～4 000 册
定　　价　13.00 元
ISBN 7-5606-1266-0/O·0065

XDUP　1537001-1

【内容简介】本书是按照“高等院校工科数学教材编写会议”确定的编写大纲，结合工科院校大学生学习“复变函数”与“积分变换”课程的实际情况编写的．全书分为二篇，共八章．第一篇为复变函数（基本按照高等教育出版社出版的《复变函数（第四版）》的章节顺序），分为六章，第一章为复数与复变函数，第二章为解析函数，第三章为复变函数的积分，第四章为级数，第五章为留数，第六章为共形映射；第二篇为积分变换（基本按照高等教育出版社出版的《积分变换（第三版）》的章节顺序），分为两章，第七章为傅里叶变换，第八章为拉普拉斯变换．各章结构为基本内容、基本要求、基本解题方法、典型例题精解及综合练习题五部分．书后附有答案与提示及近年考研题型与答案．书中附有“＊”号者，可供各专业选用．

本书可作为大学本科及专科学生学习的辅导教材，也可作为专业教师及科技人员的参考书．

前　言

“线性代数”、“概率论与数理统计”以及“复变函数”与“积分变换”是理工科高等院校除“高等数学”以外的三门重点数学课程，它们是许多专业基础课与专业课的理论基础，对后继专业课的学习起着举足轻重的作用．此外，它们也是许多专业的硕士研究生入学考试的必考内容．因此，学好这三门课对在校的大学生是非常重要的．但是，这三门课程都具有理论性较强，较为抽象，方法较难掌握的特点．“复变函数”与“积分变换”更是如此．而这两门课目前参考书籍较少．为此，我们组织了多年在高校担任这几门课的教学工作并具有丰富教学经验的教师编写了这套高等院校工程数学课程的系列辅导教材，以满足广大在校学生及自学人员的需求．

本书是这套系列教材中的第三册．全书共分为两篇．第一篇复变函数分为六章：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数与共形映射；第二篇积分变换分为二章：傅里叶变换与拉普拉斯变换．各章结构由基本内容、基本要求、基本解题方法、典型例题精解与综合练习题五部分组成．基本内容部分简明扼要，重点难点突出；基本要求部分充分体现了教学大纲的要求；基本解题方法部分对该章的题型进行了归类，并总结了解题的方法和思路；典型例题精解部分所选的例题题型灵活，覆盖面广，难度由浅入深，并注重一题多解及知识的综合运用，对所选例题不仅给出了详细解答，而且还进行了详尽分析，并指出了

解题思路和技巧；综合练习题部分所选题型丰富多样，足以使读者加深理解基本理论和掌握基本的解题方法和技巧，也可以使读者能对自己的学习效果进行自我检验.

本书由陕西科技大学理学院数学教研室杨战民、任小红、梁晓毅主编. 第一、二、三、七章由杨战民编写，第四、五章及附录由梁晓毅编写，第六、八章由任小红编写. 全书由杨战民统稿.

本书在编写过程中，得到陕西科技大学理学院数学教研室白云霄、王晓琴、谭宏武、王莉、李莉、王玉萍、彭卫丽等老师以及西安电子科技大学出版社的大力支持和帮助，在此一并表示由衷的感谢.

由于编写时间仓促，不足之处，敬请读者及广大同行批评指正.

编　者

2003 年 5 月

目　　录

第一篇　复变函数

第二篇 积分变换

附　　录

第一篇

复 变 函 数

第一章　复数与复变函数

1.1 基本内容

1. 复数

1）复数

对于任意二实数 x，y，称 $z=x+y\mathrm{i}$ 为复数. $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 称为虚单位，$x=\mathrm{Re}(z)$ 为 z 的实部，$y=\mathrm{Im}(z)$ 为 z 的虚部. 当 $x=0$，$y\neq 0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x+0\mathrm{i}$，即 z 为实数 x. 当且仅当 $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)$，$\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)$ 时称 z_1 与 z_2 相等，即 $z_1=z_2$.

2）复数的代数运算

两复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$，$z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$ 的加法、减法、乘法及除法定义为：

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2=x_2+y_2\mathrm{i}\neq 0)$$

3）共轭复数

$z=x+\mathrm{i}y$ 与 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 称为共轭复数. 其性质为：

(1) $\bar{\bar{z}}=z$.

(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

(3) $z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$.

(4) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$.

4) 复数的几何表示

(1) 复平面：复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 由二元有序实数 (x, y) 惟一确定. 用复平面(或 z 平面)，即实轴(x 轴)与虚轴(y 轴)所在的平面上的点 (x, y) 表示复数，也可用从原点指向点 $z = x + \mathrm{i}y$ 的复平面上的向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示复数(见图 1－1). 向量的长度称为 z 的模或绝对值，记为 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 若 $z \neq 0$，则角 θ 称为 z 的辐角，记 $\mathrm{Arg}z = \theta$. 若 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$，称 $\arg z = \theta_0$ 为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值. 有 $\mathrm{Arg}z = 2k\pi + \arg z$. $z = 0$ 时，辐角不确定.

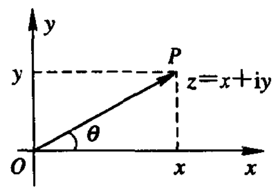


图 1－1

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z} = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ \pm \dfrac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ 且 } y > 0, y < 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} \pm \pi, & x < 0 \text{ 且 } y \neq 0 \\ \pi, & x < 0 \text{ 且 } y = 0 \end{cases}$$

复数的三角表示式：$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，

复数的指数表示式：$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(2) 复球面：扩充复平面即包括无穷远点在内的复平面；与扩充复平面建立一一对应的球面称为复球面，它能将扩充复平面上的点明显地表示出来. 无穷远点与复数 ∞ 对应：$|\infty| = +\infty$，

辐角无意义. 不包括无穷远点的复平面称为有限复平面，或复平面. ∞ 的运算规则如下：

(1) $\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty (\alpha \neq \infty)$.

(2) $\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty (\alpha \neq 0)$.

(3) $\frac{\alpha}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{\alpha} = \infty (\alpha \neq \infty)$, $\frac{\alpha}{0} = \infty (\alpha \neq 0$, 但可以 $\alpha = \infty)$.

(4) $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ 无意义.

5) **复数的乘积与商**

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$$

则

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)], (r_2 \neq 0)$$

即

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 r_2, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2$$

6) **复数的乘幂与方根**

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

则

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)(n \in \mathbf{Z})$$

$$w_k = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n - 1)$$

得 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个相异的根：w_0, w_1, $\cdots$, w_{n-1}.

2. 复变函数

1) 区域

(1) z 平面上点集 $U(z_0,\delta)=\{z \mid |z-z_0|<\delta\}$ 称为 z_0 的 δ 邻域.

(2) 若 G 为平面点集，对任 $z_0\in G$，存在 $U(z_0,\delta)\subset G$，则称 z_0 为 G 的内点.

(3) 若 G 内的每个点都是它的内点，则称 G 为开集.

(4) 若平面点集 D 为开集且是连通的，则称 D 为区域.

(5) 设 D 为复平面内的一个区域，若点 $P\notin D$，但对任一 $U(P)$ 中总有 D 中的点，则称 P 为 D 的边界点. D 的所有边界点组成 D 的边界.

(6) 区域 D 与它的边界一起构成闭区域或闭域 $\overline{D}$.

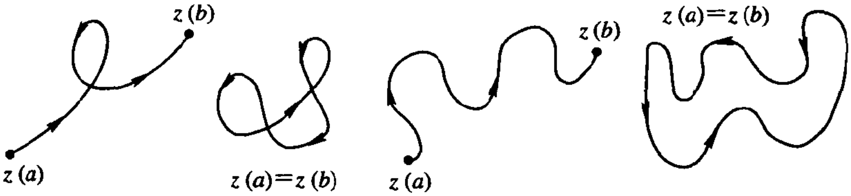
(7) 若存在 $M>0$，使得 $|z|<M$，$z\in D$，则称 D 为有界的，否则称 D 为无界的.

2) 单连通域与多连通域

(1) 若实函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则曲线 C：$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 称为连续曲线. $z(a)$ 与 $z(b)$ 分别称为 C 的起点与终点. 对于 $a<t_1<b$，$a\leqslant t_2\leqslant b$，当 $t_1\neq t_2$ 时，$z(t_1)=z(t_2)$，则称 $z(t_1)$ 为 C 的重点. 无重点的曲线称为简单曲线或 Jordan 曲线. 若 $z(a)=z(b)$，则曲线称为闭曲线（见图 1 - 2).

(2) 任一条简单闭曲线 C 将复平面惟一地分成三个互不相交的点集，一个为有界区域称为 C 的内部，另一个为无界区域称为 C 的外部，而 C 为两区域的公共边界.

(3) 曲线 C：$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$，当 $x'(t)$ 与



不简单、不闭　不简单、闭　简单、不闭　简单、闭

图 1-2

$y'(t)$ 连续且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$ 时，称 C 为光滑曲线. 由几条光滑线段依次相接而成的曲线称为按段光滑曲线.

(4) 若区域 B 中任意一条简单闭曲线的内部总属于 B，则称 B 为单连通域，否则称 B 为多连通域. 单连通域中无洞或割痕，且 B 中的任一条简单闭曲线，在 B 内可经过连续变形而缩成一点.

(5) 常用曲线与区域：圆 $|z-z_0|=R$，圆的内部 $|z-z_0|<R$，圆的外部 $|z-z_0|>R$；圆环域 $r<|z-z_0|<R$；平行于 y 轴的直线 $\mathrm{Re}(z)=a$，平行于 x 轴的直线 $\mathrm{Im}(z)=b$，上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$，下半平面 $\mathrm{Im}(z)<0$，半平面 $\mathrm{Re}(z)<a$ 或 $\mathrm{Re}(z)>a$，射线 $\arg(z-z_0)=\theta$；角形域 $\alpha<\arg(z-z_0)<\beta$；带形域 $a<\mathrm{Im}(z)<b$；割痕域 $z=a+\mathrm{i}t\ (0\leqslant t\leqslant b)$.

3) 复变函数

设 G 是一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的集合. 若有一个确定的法则存在，对 G 中的每个复数 z，按这一法则，有复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 与之对应，则称 w 是 z 的函数. 记为 $w=f(z)$. G 称为 $f(z)$ 的定义域，$G^*=\{w|w=f(z),\ z\in G\}$ 称为 $f(z)$ 的值域. 此时 $w=f(z)$ 相当于两个二元实函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$. 若用 z 平面上的点表示自变量 z，用另一个平面(w 平面) 上的点表示函数 w，

则函数 $w=f(z)$ 在几何上可看作是将 z 平面上的点集 G 变到 w 平面上点集 G^* 的映射(变换).

4) 复变函数的极限与连续性

(1) 设函数 $w=f(z)$ 定义在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内，$\exists$ 常数 A，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$.

注　$z\to z_0$ 的方式是任意的.

定理 1　设

$$f(z)=u+\mathrm{i}v,\quad A=u_0+\mathrm{i}v_0$$
$$z=x+\mathrm{i}y,\quad z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$$

则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$$

(2) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续. 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

定理 2　函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续 $\Leftrightarrow u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

(3) 函数 $f(z)$ 在曲线 C 上 z_0 点处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，$z\in C$.

1.2　基本要求

(1) 熟练掌握复数及复数的运算.

(2) 牢固掌握并灵活运用复数的各种表示法.