

全国高等农业院校教材

全国高等农业院校教学指导委员会审定

概率统计方法与应用

邓华玲 主编



中国农业出版社

全国高等农业院校教材
全国高等农业院校教学指导委员会审定

概率统计方法与应用

邓华玲 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

概率统计方法与应用 / 邓华玲主编. —北京: 中国农业出版社, 2003.2

全国高等农业院校教材

ISBN 7-109-08055-2

I. 概... II. 邓... III. ①概率论-高等学校-教材
②数理统计-高等学校-教材 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 106612 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100026)

出版人: 傅玉祥

责任编辑 朱 雷

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2003 年 2 月第 1 版 2003 年 2 月北京第 1 次印刷

开本: 787mm×960mm 1/16 印张: 19.5

字数: 348 千字

定价: 25.90 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

该教材被列为全国高等农业院校“十五”规划教材,是为了适应 21 世纪高等农业院校对应用型人才的培养而编写的,以培养学生理解统计思想和应用统计方法为教学的出发点,并结合国际通用的统计软件 SAS,在主要章节后面增加了实验内容,旨在培养学生应用现代化工具与统计方法来解决问题的能力.本教材的主要内容包括:随机事件与概率、一维随机变量及其数字特征、二维随机变量及其数字特征、大数定律和中心极限定理初步、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析和 SAS 软件的简介,并给出了各章习题的参考答案.书中内容取材广泛,例题和习题多取自贴近生活和生产实际的问题,介绍了有关概率统计学家在概率统计发展过程中的贡献,扩大了学生的知识面,增加了学生的学习兴趣.

本书可作为高等农业院校各专业本专科生的教材,也可作为研究生、教师和科技人员的参考书.

主 编	邓华玲		
副主编	傅丽芳	顾凤岐	
参 编	祁雪莲	王淑艳	朱荣胜
	孟翔燕	张彩琴	
主 审	葛家麒		

前 言

随着科学的进步和社会的发展,数学的思想方法和思维方式在各行各业越来越受到重视,同时数学方法的应用在各学科中更是起到了举足轻重的作用.没有数学方法的应用就难以发现事物之间量的关系.为适应社会的需求,对非数学专业学生的数学基础的要求已不仅仅是具有较深厚的数学理论知识和较强的推导证明能力,而是要求学生在理解数学思想方法的基础上以数学的实际应用为主.

概率论与数理统计是农业院校各专业都开设的一门基础课,在以前的教学中多以概率论为教学重点,作为真正在实际中有重要应用价值的数理统计部分往往被轻视,使得我们的学生在学完该课后只知道几个抽象的分布,甚至连最简单的数据处理方法都不会.本书立意改变传统的数学教学以三基——基本知识、基本理论、基本方法为目的的训练方式,把教学的重点转到对学生应用统计方法解决实际问题的能力和意识的培养上来.因此教材的编写主要以学生能够理解数理统计的思想方法和会应用基本方法处理数据为目的.

首先,本教材对以往的教学内容进行了一些改革,为达到以上“应用”的目的,改变了以理论为主的教学内容,在不影响本课程体系的完整性的条件下,适当地减少、减弱了概率论部分的理论性和难度,从直观性、趣味性和易于理解的角度把概率论作为数理统计的基础知识加以介绍.在数理统计部分尽量把常用的方法都介绍给学生,根据农业院校学生基础的实际情况,尽量以直观的方法来阐述数理统计方法的思想,注重分析方法的应用条件,较多地采用了有实际背景的农业、经济、工程以及生活方面的例子,力求做到通俗易懂,使学生感到统计的方法就在身边.同时参考一些国外相应专业的教材.

其次,是教学手段的改革,在计算机如此发达和普及的今天,数理统计的教学如果不借助于计算机这一现代化工具,势必就要落后于时代的发展.基于此,本教材结合数理统计的教学内容,利用国际通用的统计软件 SAS 开发了数理统计的一些应用程序和演示实验,主要通过演示实验、应用程序、例题的计算和结果分析使学生进一步理解数理统计的思想,同时把数理统计中繁杂公式的记忆和大量的计算都简化了,使数理统计的实际应用更为方便.利用实验可以使学生很快理解在课堂中难以实现的内容,如一些需大量计算才能得到的规律性的

问题等.实验课既能提高教学效果,又可以减少教学学时数,使学生的应用能力得到提高.

第三,本教材增加了有关概率论与数理统计的应用性、趣味性短文及著名的概率论数理统计学家的生平简介,使学生在了解概率统计课程的同时了解概率统计的发展历史,增加数学课的人文氛围,加强数学文化的熏陶,进而提高学生的综合素质.

本教材适用于高等农业院校各专业,书中的例题大都在经济、生物、工程及生活方面取材.学时数在40~80学时,教师可根据自己学校和学生专业的不同情况适当进行删减.

本教材编写分工如下:东北农业大学的邓华玲负责提出全书编写的总体思路,并编写了本书的第六章、第七章、第八章、第九章;东北农业大学傅丽芳编写了第一章、第二章和第四章;东北林业大学的顾凤歧编写了第三章和第五章;东北农业大学的祁雪莲、王淑艳、朱荣胜、孟翔燕编写了各章的演示与实验、SAS基础知识,并为各章习题做出了参考答案;由内蒙古农业大学的张彩琴编写了书中有关的短文和概率统计学家的简介.全书由葛家麒教授主审.在编写过程中得到了东北农业大学数学教研室各位同仁的全力支持,在此表示感谢.

限于编写者水平和经验有限,书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正.

编 者

2002.10

目 录

前言

第一章 随机事件与概率	1
第一节 引 言	1
第二节 随机事件及其运算	2
第三节 概率的定义	7
第四节 概率的计算	14
第五节 经典案例	22
习题一	28
第二章 一维随机变量及其分布	32
第一节 一维随机变量的分布函数	32
第二节 一维随机变量及其分布	34
第三节 一维随机变量函数的分布	39
第四节 一维随机变量的数字特征	42
第五节 常见的概率分布	47
第六节 应用案例	59
习题二	62
第三章 二维随机变量及其分布	67
第一节 二维随机变量的概率分布	67
第二节 边缘分布与独立性	72
第三节 二维随机变量的数字特征	78
第四节 协方差与相关系数	81
第五节 应用案例	85
习题三	88
第四章 大数定律和中心极限定理	91
第一节 大数定律	91

第二节 中心极限定理	95
第三节 应用案例	98
演示与实验一	99
习题四	105
第五章 描述性统计	106
第一节 引言	106
第二节 描述性统计	108
第三节 统计量的分布	123
演示与实验二	129
习题五	134
第六章 参数估计	136
第一节 点估计	136
第二节 区间估计	144
第三节 样本容量的决定	150
第四节 应用案例	153
演示与实验三	156
习题六	160
第七章 假设检验	163
第一节 基本概念	163
第二节 单个正态总体参数的假设检验	167
第三节 两个正态总体参数的假设检验	173
第四节 非正态总体参数的假设检验	178
第五节 χ^2 检验	180
第六节 两个重要的非参数检验 ——符号检验与秩和检验	187
第七节 应用案例	192
演示与实验四	194
习题七	204
第八章 方差分析	208
第一节 单因素方差分析	209

第二节 双因素方差分析(无交互作用)·····	216
演示与实验五·····	220
习题八·····	225
第九章 回归分析与相关分析 ·····	229
第一节 相关关系·····	229
第二节 回归分析·····	230
第三节 一元线性回归·····	232
第四节 多元线性回归·····	241
第五节 可线性化的非线性回归·····	247
第六节 相关分析·····	250
第七节 应用案例·····	253
演示与实验六·····	256
习题九·····	263
 SAS FOR WINDOWS 基础知识 ·····	 266
习题参考答案·····	275
附表 1 标准正态分布数值表 ·····	286
附表 2 泊松分布表 ·····	287
附表 3 χ^2 分布表 ·····	288
附表 4 t 分布表 ·····	290
附表 5 F 分布表 ·····	291
附表 6 相关系数显著性检验表 ·····	295
附表 7 威尔柯克逊秩和检验临界值表 ·····	296
附表 8 威尔柯克逊符号秩和检验临界值表 ·····	299
参考文献 ·····	300

第一章

随机事件与概率

第一节 引言

一、概率论的研究对象及主要任务

在自然界和人类社会中,人们所观察到的现象大体上可分为两类:一类是在相同的条件下,每次观察(试验)得到的结果是完全相同的,我们把这样的现象称为确定性现象或必然现象.例如向空中抛掷一物体,此物体上升到一定高度后必然下落;在一个标准大气压下把水加热到 100°C 必然会沸腾;异性电荷必然相吸,而同性电荷必然相斥等等.与此相对应的另一种现象则不同,即使在相同的条件下,每次观察(试验)可能出现不同的结果,这样的现象我们称为偶然现象或随机现象.例如,在相同的条件下抛一枚均匀的硬币,其结果可能是正面(分值面)向上,也可能是反面向上,重复投掷,每次的结果在出现之前都不能确定;又如从同一生产线上生产的灯泡的寿命、某城市每月交通事故的数目、某商店每天接待的顾客人数、股市上股票每天的价格等等,这类现象都随大量的偶然因素而起落不定,都属于随机现象.

那么随机现象是不是就没有什么规律可循呢?事实上并非如此.人们经过长期的观察和实践逐渐发现,虽然这类现象在每次观察中的结果具有不确定性,但通过大量的、反复的试验或观察,随机现象都呈现出某种规律性,所谓“无规律”只是针对一次或少数几次试验和观察而言.例如多次投掷一枚均匀的硬币,正面朝上的次数和背面朝上的次数之比总是接近于 $1:1$.历史上,蒲丰曾投掷过 4 040 次,其中 2 048 次正面朝上,而皮尔逊投掷过 24 000 次,正面向上的次数为 12 012 次;在大量重复试验或观测中,随机现象呈现出的这种内在规律性称为统计规律性.

正如恩格斯所说“在表面上是偶然性在起作用的地方,这种偶然性始终是受内部隐蔽着的规律支配的,而问题只是在于发现这些规律”.

概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科.

二、概率论发展历史及其应用

概率论的起源与赌博问题有关.早在16世纪,意大利学者就开始研究掷骰子等赌博中的一些简单问题,例如两个骰子出现的点数之和为9和10的可能性的大小等.后来,大约在17世纪中叶,法国数学家帕斯卡(B.Pascal)、费马(Fermat)及荷兰数学家惠更斯(C.Hugeness)用排列组合的方法,研究了赌博中一些较复杂的问题,例如“分赌资问题”、“赌徒输光问题”等.随着18、19世纪科学的迅速发展,起源于赌博的概率论逐渐被应用于生物、物理等研究领域,同时也推动了概率理论研究的发展.概率论作为一门数学分支日趋完善,形成了严格的数学体系.

概率论与数理统计的理论和方法应用十分广泛,几乎遍及所有的科学领域以及工农业生产和国民经济各部门.例如应用概率统计方法可以进行气象预报、水文预报和市场预测、股市分析等;在工业中,可用概率统计方法进行产品寿命估计和可靠性分析等.如今,概率论与数理统计已成为许多重要学科的基础和必要的数学工具.伟大的数学家拉普拉斯(Laplace 1749—1827,法国数学家和天文学家)曾经说过:“生活中最重要的问题实际上多半是概率问题.严格地讲,人们甚至可以说几乎所有的知识都是或然性的.而在我们能肯定知道的少量事情中,甚至在数学学科自身中,归纳和类比这样的发现真理的主要方法都是基于概率事件的,所以说整个人类知识系统是 与概率论相关联的.”

第二节 随机事件及其运算

一、随机事件与样本空间

我们知道要研究随机现象的规律需要进行大量的观察和试验(把对自然现象进行一次观察或进行一次科学试验统称为试验).如果一个试验具备以下特征:

- (1) 试验可以在相同的条件下重复进行;
- (2) 试验所有可能的结果是明确知道的,并且不止一个;
- (3) 每次试验必然出现这些可能结果中的一个,但试验前不能预知出现哪一个结果,则称为**随机试验**,简称**试验**,用字母 E 表示.

例如:掷一枚均匀硬币,观察正面和反面出现的情况;考察某日电话总机所接到的呼叫次数;在一批灯泡中任意抽取一个,测试其寿命等等都是随机试验.

研究一个随机试验 E , 首先要明确试验所有的可能结果. 每一个可能的基本结果(不可分解)称为 E 的**基本事件**, 通常用 ω 表示. 我们把 E 的所有基本事件组成的集合称为 E 的**基本事件空间**, 常用 $\Omega = \{\omega\}$ 表示. 在统计学中, 基本事件 ω 是抽样的基本单元, 故基本事件又称为**样本点**, 基本事件空间又称为**样本空间**.

例 1 (1) 抛掷一枚均匀的硬币, 其可能出现的结果只有两种: 正面、反面. 若令 $\omega_1 = \text{正面}$, $\omega_2 = \text{反面}$, 则 ω_1, ω_2 为该随机试验的两个基本事件, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ 为样本空间.

(2) 投掷一颗骰子, 观察出现的点数. 其可能出现的点数为: 1、2、3、4、5、6, 若令 $\omega_i = i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, 则 ω_i 为随机试验的基本事件, 样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(3) 观察单位时间内到达某公交车站候车的人数, 令 $\omega_i = \text{单位时间内有 } i \text{ 人到达车站候车}, i = 0, 1, 2, \dots$, 则基本事件为 ω_i , 样本空间 $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots\} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

(4) 从一批灯泡中任取一只, 以小时为单位, 测试这只灯泡的寿命, 令 t 表示灯泡的寿命, 则大于等于零的任意一个实数都是该试验的一个样本点, $\Omega = \{t | t \geq 0\}$.

从上面的例子可以看到, 样本空间可以由有限多个基本事件组成, 如例 1 中(1)、(2)的情形, 也可以由无限多个基本事件组成, 如例 1 中(3)、(4).

在随机试验中, 有时我们所关心的是带有某些特征的结果是否发生, 比如在例 1(2)中, 要研究出现的点数为偶数这样的情况, 我们知道这种情况在每次试验中都有可能发生(试验出现了 2、4 或 6 点时), 也可能不发生(出现 1、3、5 点时). 把这种在随机试验中可能发生、也可能不发生的事情称为**随机事件**, 简称事件, 通常用大写字母 A, B, C 等表示. 前面所说的出现的点数为偶数可以用事件 A 表示, $A = \{\text{出现的点数为偶数}\} = \{2, 4, 6\}$, 而 $B = \{\text{出现的点数大于 } 4\} = \{5, 6\}$, $C = \{\text{出现的点数为 } 2\}$ 等等都是例 1(2)中随机试验的事件.

样本空间 Ω 包含全体基本事件, 而随机事件是由某些带一定特征的基本事件组成的, 从集合论的观点看, 随机事件就是样本空间 Ω 的子集.

若一次试验结果出现了事件 A 中的样本点, 即当试验结果为 ω_1 且 $\omega_1 \in A$ 时, 则称事件 A 发生, 否则称 A 不发生. 例如上述的掷骰子试验, 若一次试验出现了点 2(4 或 6), 则事件 A 在这次试验中发生, 若出现点 1(3 或 5), 则事件 A 不发生.

样本空间 Ω 包含所有的基本事件, 每次试验 Ω 必然会发生, 因此称 Ω 为

必然事件.类似地,我们把不包含任何基本事件的事件,记作 $\emptyset$,它总也不会发生,因此称为**不可能事件**.必然事件与不可能事件可以说并不具有随机性,但为了今后研究上的方便,我们还是把它们作为随机事件的两个极端情形来统一处理.

二、事件间的关系与运算

根据随机事件的定义,任一事件 A 都是相应的样本空间 Ω 的一个子集.在概率论中常用一个长方形表示样本空间 Ω ,用其中的一个圆(或其他几何图形)表示事件 A ,如图 1-1,这类图形由数学家维恩首先使用,称为维恩(Venn)图.

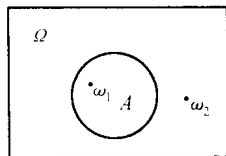


图 1-1 事件 A 的维恩图

研究事件间的关系及运算能帮助我们通过对简单事件规律的研究,掌握更复杂的事件的规律.

1. 事件间的关系

(1) 事件的包含关系 设在同一个试验 E 中有两个事件 A 与 B ,若 A 发生必然导致 B 发生(即 A 中任意一个基本事件都在 B 中),则称事件 B 包含事件 A ,记作 $B \supset A$ (或 $A \subset B$),如图 1-2 所示.例如投掷一颗骰子的试验, $A = \{\text{出现 4 点}\}$, $B = \{\text{出现偶数点}\}$,则 A 发生必导致 B 发生,故 $A \subset B$.

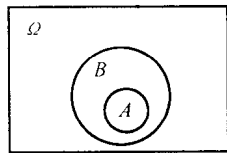


图 1-2 $A \subset B$

显然,对任何事件 A ,有 $\emptyset \subset A \subset \Omega$.

(2) 事件相等 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 $A = B$.这时 A 中任一基本事件必属于 B ,同时 B 中任一基本事件也必属于 A , A 与 B 含有相同的基本事件.例如掷骰子试验中,记 $A = \{\text{掷出 3 点或 6 点}\}$, $B = \{\text{掷出 3 的倍数点}\}$,这两个事件虽然说法不同,但所包含样本点相同,其实表示了同一事件,因而 $A = B$.

(3) 和事件 称事件 A 和 B 至少有一个发生所构成的事件为 A 与 B 的和事件,记作 $A \cup B$.和事件 $A \cup B$ 是由 A 与 B 的所有基本事件共同组成的,如图 1-3.例如掷一颗骰子观察所得的点数,设 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$,则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$.

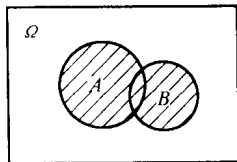


图 1-3 $A \cup B$

例 2 测试灯泡寿命的试验中,令 $B = \{t \mid t \leq 1000\}$ (寿命不超过 1000 h), $A = \{t \mid t \leq 500\}$ (寿命不

超过 500 h), 则 $A \cup B = B = \{t | t \leq 1000\} = \{\text{寿命不超过 } 1000 \text{ h}\}$.

很显然, $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B; A \cup A = A$.

类似地, 可定义 $n(n > 2)$ 个事件的和: 称 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生所构成的事件为它们的和事件, 记作 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, 简记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$; 称可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中至少有一个发生所构成的事件为它们的和事件, 简记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(4) 积事件 称事件 A 与 B 同时发生所构成的事件为 A 与 B 的积事件, 记作 $A \cap B$ 或 AB , 如图 1-4 所示. 积事件是由那些同时属于 A, B 的基本事件构成的. 例如在掷骰子的试验中 $A = \{2, 4, 6\}, B = \{3, 4, 5\}$, 则 $AB = \{4\}$, 即只有随机试验出现 4 点时, A 与 B 同时发生, 又如例 2 中, $AB = A = \{t | t \leq 500\}$.

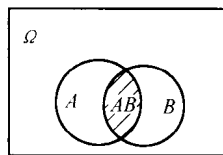


图 1-4 $A \cap B$

类似地, 可以定义 $n(n > 2)$ 个事件 $A_1, A_2, \dots,$

A_n 的积: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$, 可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的积: $A_1 \cap$

$A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

(5) 互斥事件 若事件 A, B 不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 则称事件 A 与 B 是互斥事件或互不相容事件, 这时事件 A 与 B 没有相同的基本事件 (如图 1-5).

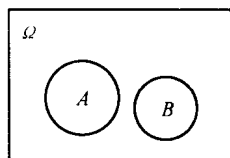


图 1-5 $AB = \emptyset$

当两个事件 A 与 B 互斥时, 可将 $A \cup B$ 记作 $A + B$.

例 3 掷一颗骰子, 令 $A = \{\text{出现奇数点}\}, B = \{\text{出现 } 4 \text{ 点}\}$, 则有 $AB = \emptyset$, 即 A 与 B 互斥, $A \cup B = A + B = \{1, 3, 4, 5\}$.

(6) 互逆事件 若事件 A 与事件 B 在一次试验中必有且只有一个发生, 则称事件 A 与 B 为互逆事件或对立事件. 对立事件 A 与 B 满足条件: $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \emptyset$.

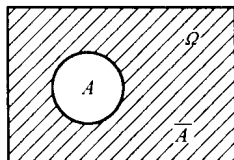


图 1-6 A 与 $\bar{A}$

一个事件 A 的对立事件是惟一确定的, 记作 $\bar{A}$. $\bar{A}$ 由样本空间中一切不属于 A 的基本事件组成, 如图 1-6 所示.

例 4 在例 3 中, 令 $C = \{\text{出现偶数点}\}$, 则 $AC = \emptyset$, 且 $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$, 所以 $C = \bar{A}$. $AB = \emptyset$, 但 $A \cup B = \{1, 3, 4, 5\} \neq \Omega$, 所以 A, B 不是互

逆事件.

对立事件是相互的, A 的对立事件是 $\bar{A}$, 则 $\bar{A}$ 的对立事件必是 A , 即 $\overline{\bar{A}} = A$. 特别地, 必然事件 Ω 与不可能事件 $\emptyset$ 互为对立事件, 即 $\bar{\Omega} = \emptyset, \overline{\emptyset} = \Omega$.

若 $A \subset B$, 则 $\bar{A} \supset \bar{B}$.

(7) 差事件 称事件 A 发生而 B 不发生所构成的事件为 A 与 B 的差事件, 记作 $A - B$. 如图 1-7 是两种场合下 A 与 B 差事件的示意图. 从图中可看出 $A - B = A - AB = A\bar{B}$, 即差事件 $A\bar{B}$ 由一切属于 A 但不属于 B 的基本事件组成.

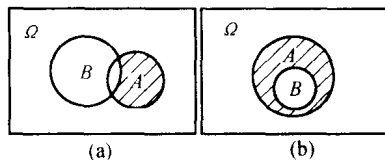


图 1-7 (a) $A - B (AB \neq \emptyset)$

(b) $A - B (B \subset A)$

例 5 掷骰子试验中, 令 $C = \{2, 4, 6\}, D = \{1, 2, 3\}$, 则 $C - D = C\bar{D} = \{4, 6\}, D - C = D\bar{C} = \{1, 3\}$.

2. 事件的运算定律

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A; AB = BA$.

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (AB)C = A(BC)$.

(3) 分配律 $(A \cup B)C = AC \cup BC; (AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$.

(4) 德·摩根定律(对偶律) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (可以推广到多个事件的情形).

例 6 设 A, B, C 是样本空间 Ω 中的三个随机事件, 试用 A, B, C 的运算表达式表示下列随机事件.

- (1) A 与 B 发生但 C 不发生;
- (2) 事件 A, B, C 中至少有一个发生;
- (3) 事件 A, B, C 中至少有两个发生;
- (4) 事件 A, B, C 中恰好有两个发生;
- (5) 事件 A, B, C 中不多于一个事件发生.

解: (1) ABC

(2) $A \cup B \cup C$

(3) $AB \cup BC \cup AC$

(4) $AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}\bar{B}C = AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C$

(5) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC$ 或 $\overline{AB \cup BC \cup AC}$

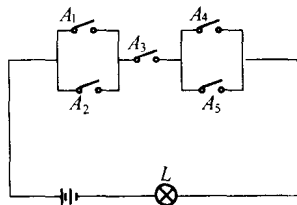


图 1-8

例 7 在图 1-8 中, 有 5 个开关(继电器),

若用 A_i 表示第 i 个开关是闭合的 ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), B 表示“信号灯亮”, 试用 $A_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 表示事件 B .

$$\begin{aligned} \text{解: } B &= (A_1 \cup A_2)A_3(A_4 \cup A_5) \\ &= A_1A_3A_4 \cup A_2A_3A_4 \cup A_1A_3A_5 \cup A_2A_3A_5 \end{aligned}$$

第三节 概率的定义

前面已经讲过, 随机事件在一次试验中可能出现也可能不出现, 似乎没有什么规律, 但经过大量的重复试验人们发现: 随机事件出现的可能性不仅有规律, 而且可以度量, 我们把随机事件出现的可能性大小的度量值称为该随机事件的概率. 研究随机试验不仅要知道它可能出现哪些事件, 更重要的是研究随机事件出现的概率, 进而揭示出这些事件内在的统计规律性, 这对于人们的生产、生活和经济活动都很有意义. 例如:

(1) 抛一枚均匀的硬币, 因为已知出现正、反面的可能性相同, 各为 $\frac{1}{2}$, 足球裁判就用抛硬币的方法让双方队长选择场地, 以示机会均等.

(2) 某厂研制出一种新药, 要考虑新药在未来市场的占有率将是多少. 市场占有率高, 就应多生产, 获取更多利润; 市场占有率低, 就不能多生产, 否则会造成产品积压.

上述问题中的机会、市场占有率以及彩票的中奖率、产品的次品率、射击的命中率等都是用来度量随机事件发生的可能性大小的. 尽管所用术语不同, 但其共同点都是用 0 到 1 之间的一个数值 (也称为比率) 来作为随机事件 A 发生的可能性大小的度量, 即事件 A 发生的概率, 记作 $p(A)$.

在概率论的发展过程中, 人们针对不同的问题, 从不同的角度给出了概率的定义及相应的计算方法, 本节将介绍一定条件下的几种概率定义.

一、统计定义

在大量重复试验中, 随机事件出现的可能性大小会呈现出一定的统计规律性, 可以通过大量的重复试验来确定事件的概率.

设在 n 次重复试验中, 事件 A 出现了 k 次, 则称 k 为事件 A 在 n 次试验中出现的频数, 比值 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 在 n 次试验中出现的频率, 记为 $f_n(A) = \frac{k}{n}$.

前文提到过, 历史上的一些统计学家做过抛掷硬币的试验, 从试验结果的