

高等学校试用教材

数学分析

下 册

华东师范大学数学系 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

数 学 分 析

下 册

华东师范大学数学系 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

数 学 分 析

下 册

华东师范大学数学系 编

*

人 民 教 育 出 版 社 出 版

新华书店上海发行所发行

青浦任屯印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 14 字数 337,000

1981 年 6 月第 1 版 1983 年 3 月第 3 次印刷

印数 46,001—66,000

书号 13012·0627 定价 1.25 元

目 录

第十一章 数项级数

§ 1 级数的收敛性及其性质	1
§ 2 正项级数	7
一 正项级数收敛性的一般判别原则(7)	
二 比式判别法与根式判别法(11)	
*三 拉贝判别法(17)	
§ 3 一般项级数	20
一 绝对收敛级数(20)	二 交错级数(21)
三 条件收敛级数(22)	四 绝对收敛级数的性质(25)

第十二章 非正常积分

§ 1 无穷限非正常积分	34
一 问题提出(34)	二 基本概念(36)
三 非正常积分与数项级数的关系(40)	
四 收敛性判别法(41)	
§ 2 无界函数非正常积分	48
一 基本概念(48)	二 两种非正常积分的联系(51)
三 收敛性判别法(52)	

第十三章 函数列与函数项级数

§ 1 一致收敛性	59
一 函数列及其一致收敛性(59)	二 函数项级数及其一致收敛性(67)
§ 2 一致收敛函数列与函数项级数的性质	70
§ 3 函数项级数的一致收敛判别法	77

第十四章 幂级数

§ 1 幂级数	83
一 幂级数的收敛区间(83)	二 幂级数的性质(87)
三 幂级数的运算(90)	

§ 2 函数的幂级数展开	95
一 泰勒级数(95)	二 初等函数的幂级数展开式(99)
*§ 3 幂级数的应用	106
一 近似计算(106)	二 三角函数(108)
三 复变量的指数函数·欧拉公式(109)	

第十五章 傅里叶级数

§ 1 傅里叶级数	113
一 三角级数·三角函数系的正交性(113)	
二 以 2π 为周期的函数的傅里叶级数(115)	
三 偶函数与奇函数的傅里叶级数(123)	
*四 傅里叶级数的复数形式(127)	
§ 2 收敛定理	129
一 预备定理(129)	二 收敛定理的证明(134)
三 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数(136)	
§ 3 傅里叶级数的逐项求和和逐项求导	140
§ 4 一致收敛定理及其应用	144

第十六章 多元函数的极限与连续

§ 1 多元函数概念	150
一 平面点集(150)	二 二元函数 (156)
三 n 维欧氏空间与 n 元函数(159)	
§ 2 二元函数的极限	163
一 二元函数的极限(163)	二 累次极限(167)
§ 3 二元函数的连续性	171

第十七章 多元函数微分学

§ 1 偏导数与全微分	178
一 偏导数(178)	二 全微分(182)
§ 2 复合函数微分法	193
一 复合函数的求导法则(193)	二 复合函数的全微分(197)
§ 3 方向导数与梯度	200
§ 4 高阶偏导数与高阶全微分	204
一 高阶偏导数(204)	二 高阶全微分(210)
§ 5 泰勒公式与极值问题	214
一 泰勒公式(214)	二 极值问题(217)

第十八章 隐函数定理及其应用

§ 1 隐函数	226
一 隐函数概念(226)	二 隐函数定理(227)
三 隐函数求导举例(233)	
§ 2 隐函数组	236
一 隐函数组概念(236)	二 函数行列式(237)
三 隐函数组定理(239)	四 反函数组与坐标变换(245)
§ 3 几何应用	249
一 平面曲线的切线与法线(249)	二 空间曲线的切线与法平面(250)
三 曲面的切平面与法线(253)	
§ 4 条件极值	257

第十九章 含参量积分

§ 1 含参量正常积分	266
§ 2 含参量非正常积分	275
一 一致收敛性及其判别法(275)	二 含参量非正常积分的性质(282)
§ 3 欧拉积分	289
一 Γ 函数及其性质(289)	二 B 函数及其性质(292)
三 Γ 函数与 B 函数的关系(294)	

第二十章 重 积 分

§ 1 二重积分概念	297
一 平面图形的面积(297)	二 二重积分的定义及存在性(300)
三 二重积分的性质(304)	
§ 2 二重积分的计算	306
一 化二重积分为累次积分(306)	二 用极坐标计算二重积分(312)
三 二重积分的一般变换(316)	
§ 3 三重积分	325
一 三重积分概念(325)	二 化三重积分为累次积分(327)
三 三重积分换元法(330)	
§ 4 重积分的应用	337
一 曲面的面积(337)	二 重心(340)
三 转动惯量(342)	四 吸引力(345)
*§ 5 n 重积分	347
§ 6 非正常重积分	352

- 一 无界区域上的二重积分 (353) 二 无界函数的二重积分 (355)

第二十一章 曲线积分与曲面积分

§ 1 第一型曲线积分与第一型曲面积分	362
一 第一型曲线积分与第一型曲面积分概念 (362)	
二 第一型曲线积分与第一型曲面积分的计算 (365)	
§ 2 第二型曲线积分	371
一 第二型曲线积分概念 (371)	
二 第二型曲线积分的计算 (374)	
三 两类曲线积分的联系 (378)	
§ 3 格林公式·曲线积分与路线的无关性	380
一 格林公式 (380)	
二 曲线积分与路线的无关性 (385)	
§ 4 第二型曲面积分	391
一 曲面的侧 (391)	
二 第二型曲面积分概念 (392)	
三 第二型曲面积分的计算 (395)	
四 两类曲面积分的联系 (398)	
§ 5 奥高公式与斯托克斯公式	400
一 奥高公式 (400)	
二 斯托克斯公式 (402)	
*§ 6 场论初步	409
一 场的概念 (409)	
二 梯度场 (410)	
三 散度场 (411)	
四 旋度场 (413)	
五 管量场与有势场 (416)	
*§ 7 外微分与一般斯托克斯公式	418
一 外积与微分形式 (418)	
二 外微分与一般斯托克斯公式 (420)	
习题解答	426

第十一章 数项级数

§ 1 级数的收敛性及其性质

从本章开始,我们将讨论无穷多个数相加求和的问题,并研究它们的性质.

设

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad (1)$$

是一个无穷数列,对数列(1)的各项依次用加号连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (2)$$

称为数项级数,或无穷级数. 表达式(2)也常写作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

其中 u_n 称为级数(2)的通项. 级数(2)前 n 项的和

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

称为级数(2)的第 n 个部分和(或简称部分和).

例如,把等比数列

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^n, \dots \quad (a \neq 0) \quad (3)$$

各项依次相加可得数项级数

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots \quad (4)$$

这个级数常称为等比级数或几何级数. 它的部分和($r \neq 1$)

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = a \frac{1-r^n}{1-r} \quad (5)$$

对于无穷级数(2),我们要研究是否也有一个数,它象有限数的和一样,可以作为无穷级数(2)的“和”. 为此,我们不难设想,若

无穷级数(2)的部分和 S_n , 当 n 无限增大时其极限存在, 则这极限值应当可以充当这个角色. 例如几何级数 (4) 的部分和 (5), 当 $|r| < 1$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

因此, 当 $|r| < 1$ 时, 可把数 $\frac{a}{1-r}$ 规定为几何级数(4)的和.

一般地, 无穷级数(2)的和的定义为:

定义 若级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

则称级数(2)收敛. 极限值 S 称为级数(2)的和, 记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

若部分和数列 $\{S_n\}$ 没有极限, 则称级数(2)发散.

按上述定义, 几何级数(4)当 $|r| < 1$ 时收敛, 且

$$\frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots \quad (6)$$

当 $|r| > 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} |r|^n = \infty$, 所以部分和 $S_n = a \frac{1-r^n}{1-r}$ 的极限不存在; 当 $r = \pm 1$ 时其部分和分别为 $S_n = na$ 与

$$S_n = [1 + (-1)^{n-1}]a/2$$

容易看到当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它们的极限都不存在. 于是可见, 几何级数(4)当 $|r| \geq 1$ 时是发散的.

再考察下面一个例子.

例 1 讨论级数

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots \quad (7)$$

的收敛性.

解 级数(7)的部分和

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

所以级数(7)收敛, 且其和为 1.

注意: 由于级数(2)的收敛或发散(简称敛散性)是由它的部分和数列 $\{S_n\}$ 来确定, 因而可把级数(2)作为数列 $\{S_n\}$ 的另一种表现形式. 反之, 任一数列 $\{a_n\}$ 若令

$$u_1 = a_1, \quad u_n = a_n - a_{n-1} \quad (n=2, 3, \dots)$$

则无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + \cdots \quad (8)$$

与数列 $\{a_n\}$ 具有相同的敛散性, 且当数列 $\{a_n\}$ 收敛时, 其极限值就是级数(8)的和.

基于级数与数列这种密切的联系, 读者不难自行由数列的某些结果证明下列关于级数的一些定理.

定理 1(级数的柯西(Cauchy)准则) 级数(2)收敛的充要条件是: 任给正数 ε , 总存在某一自然数 N , 使得当 $n > m > N$ 时, 都有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| < \varepsilon \quad (9)$$

定理 1 也可写成下述形式:

定理 1' 级数(2)收敛的充要条件是: 任给正数 ε , 总存在某自然数 N , 使得当 $m > N$ 时, 对一切自然数 p , 都有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| < \varepsilon \quad (10)$$

若级数(2)收敛, 则对任一正数 ε , 让(9)中 $m = n-1$, 就有

$$|u_n| < \varepsilon$$

从而有下面结论.

推论 (级数收敛的必要条件) 级数(2)收敛的必要条件是:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

注意: 通项趋于零仅仅是级数收敛的必要条件, 而不是充分条件. 例如, 调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \quad (11)$$

的通项 $\frac{1}{n}$ 虽然趋于零, 但它却是发散的. 因为令 $p=m$ 时, 由(10)式有

$$\begin{aligned} |u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{2m}| &= \left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \right| \\ &\geq \left| \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m} \right| \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

它对任何自然数 m 都成立, 由定理 1' 知调和级数(11)是发散的.

例 2 应用柯西收敛准则证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的收敛性.

证 由(10)式

$$\begin{aligned} |u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| &= \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(m+p)^2} \\ &< \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(m+p-1)(m+p)} \\ &= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{m+p-1} - \frac{1}{m+p} \right) \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+p} < \frac{1}{m} \end{aligned}$$

因此对任给的正数 ε , 只须取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 使得当 $m > N$ 及任何自然数 p , 都有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| < \frac{1}{m} < \varepsilon$$

由定理 1' 就证得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是收敛的. 证毕

定理 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 且其和分别为 S 与 T , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且其和为 $S \pm T$. 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

因之, 我们常称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ 分别为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的和与差.

定理 3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和为 S , c 为任一常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 也收敛, 且其和为 cS , 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

定理 4 去掉、增加或改变级数的有限项并不改变级数的敛散性.

证 由级数收敛的柯西准则(定理 1')知道, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛与否, 在于对任给的正数 ε , 是否存在一个充分大的正整数 N , 使得在第 N 项以后的任一片段的绝对值 ($n > N$, p 为任一自然数) $|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$. 由此可见, 级数的敛散性与级数的前面有限项的取值是无关的. 证毕

由此定理知道, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和为 S , 则级数

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots \quad (12)$$

也收敛, 且其和为 $R_n = S - S_n$. (12)式称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第 n 个余项(或简称余项), 它表示以部分和 S_n 代替 S 时所产生的误差.

同样可由级数的柯西准则推得:

定理 5 在收敛级数的项中任意加括号, 既不改变级数的收敛性, 也不改变它的和.

例如: 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时, 下面的两个级数也都收敛且其和不变.

$$\begin{aligned} & \underbrace{(u_1 + u_2)}_{u'_1} + \underbrace{(u_3 + u_4)}_{u'_2} + \cdots + \underbrace{(u_{2n-1} + u_{2n})}_{u'_n} + \cdots \\ & \underbrace{(u_1)}_{u''_1} + \underbrace{(u_2 + u_3)}_{u''_2} + \underbrace{(u_4 + u_5 + u_6 + u_7)}_{u''_3} + \cdots \\ & \quad + \underbrace{(u_{2n-1} + u_{2n-1+1} + \cdots + u_{2n-1})}_{u''_n} + \cdots \end{aligned}$$

注意: 从级数加括号后的收敛性不能推断它在未加括号前也收敛. 例如

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0$$

收敛, 但级数 $1-1+1-1+\cdots$

却是发散的.

习 题

1. 验证下列级数的收敛性, 并求其和数:

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots;$$

$$(2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

2. 已知级数的部分和 $S_n = \frac{n+1}{n}$, 写出这个级数.

3. 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$.

4. 证明: 若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, 则

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ 发散;

(2) 当 $b_n \neq 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{b_1}$.

5. 应用第 3, 4 题的结果求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

6. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n}{2^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{2n^2+1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

7. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是: 任给正数 ε , 存在某自然数 N , 对一切 $n > N$ 总有

$$|u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| < \varepsilon$$

8. 举例说明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 对每一个自然数 p 满足条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}) = 0$$

则这级数不一定收敛.

§2 正项级数

一 正项级数收敛性的一般判别原则

若数项级数各项的符号都相同, 则称它为同号级数. 对于同号级数只须研究各项都是由正数组成的级数——称为正项级数. 如果级数的各项都是负数, 则它乘以 -1 后就得到一个正项级数.

由上节定理3知道它们具有相同的敛散性.

定理1 正项级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

收敛的充要条件是: 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界, 即存在某正数 M , 对一切自然数 n 成立

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \leq M \quad (2)$$

证 必要性 由于级数(1)收敛, 根据收敛性定义, 级数(1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 也收敛, 再根据收敛数列有界性定理推得存在正数 M 使(2)式成立.

充分性 由于 $u_n \geq 0 (n=1, 2, \cdots)$, 所以级数(1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 是递增的; 又知对一切 n (2)式成立, 所以 $\{S_n\}$ 是递增有界数列. 根据单调有界定理知道数列 $\{S_n\}$ 收敛, 从而级数(1)也收敛. 证毕

定理2(比较原则) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 且存在某自然数 N , 对一切 $n > N$ 都有

$$u_n \leq v_n \quad (3)$$

那么

(i) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(ii) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证 因为改变级数的有限项并不影响原有级数的敛散性, 因此不妨设不等式(3)对一切自然数 n 都成立.

现分别以 S'_n 与 S''_n 记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和. 由(3)式推得, 对一切自然数 n , 都有

$$S'_n \leq S''_n \quad (4)$$

如若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n$ 存在. 则由(4)式对一切 n 有

$$S'_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n$$

即正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S'_n\}$ 有界, 由定理 1, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 这就证明了 (i).

对于 (ii), 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 由定理 1, 它的部分和数列 $\{S'_n\}$ 无界. 同样由 (4) 式可得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和数列 $\{S''_n\}$ 也是无界的, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是发散的. 证毕

例 1 证明 p 级数

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

当 $p \geq 2$ 时是收敛的.

证 当 $p=2$ 时, 上节例 2 已证明级数是收敛的. 当 $p > 2$ 时, 由于 $\frac{1}{n^p} < \frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 根据定理 2 知道 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 也收敛. 证毕

在实际使用上, 比较原则的下述极限形式常常更为方便.

推论 1 设

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (5)$$

和

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \quad (6)$$

是两个正项级数, 且存在某自然数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时有 $v_n \neq 0$, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (7)$$

则:

- (i) 当 $0 < l < \infty$ 时, 级数 (5)、(6) 同时收敛或同时发散;
- (ii) 当 $l=0$ 且级数 (6) 收敛时, 级数 (5) 也收敛;
- (iii) 当 $l=\infty$ 且级数 (6) 发散时, 级数 (5) 也发散.

证 由 (7), 对任给正数 ε , 存在某自然数 $N (\geq N_0)$, 当 $n > N$

时,恒有

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon$$

或

$$(l - \varepsilon) v_n < u_n < (l + \varepsilon) v_n \quad (8)$$

由定理 2 及 (8) 式推得, 当 $0 < l < \infty$ (这里设 $\varepsilon < l$) 时, 级数 (5) 与 (6) 同时收敛或同时发散. 这就证得 (i).

对于 (ii), 当 $l = 0$ 时, 由 (8) 式右半部分及比较原则可得: 若级数 (6) 收敛, 则级数 (5) 也收敛.

对于 (iii), 若 $l = \infty$, 即对任给的正数 M , 存在相应的自然数 N , 当 $n > N$ 时, 都有

$$\frac{u_n}{v_n} > M$$

或

$$u_n > M v_n \quad (9)$$

于是由比较原则知道, 若级数 (6) 发散, 则级数 (5) 也发散. 证毕

例 2 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n} \quad (10)$$

是收敛的. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n - n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}} = 1$$

以及几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 所以根据推论 1, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$ 也收敛.

例 3 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} = \sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \cdots + \sin \frac{1}{n} + \cdots \quad (11)$$

是发散的. 因为