高等学校试用教材

数学分析

下册

华东师范大学数学系　编

人民教育出版社

高等学校试用教材

数学分析

下册

华东师范大学数学系 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

数学分析

下　册

华东师范大学数学系　编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

青浦任屯印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 14　字数 337,000

1981 年 6 月第 1 版　1983 年 3 月第 3 次印刷

印数 46,001—65,000

书号 13012·0627　　定价 1.25 元

目　录

第十五章 傅里叶级数

第十六章 多元函数的极限与连续

第十七章 多元函数微分学

第十八章　隐函数定理及其应用

第十九章　含参量积分

第二十章　重积分

第二十一章　曲线积分与曲面积分

第十一章 数项级数

§1 级数的收敛性及其性质

从本章开始，我们将讨论无穷多个数相加求和的问题，并研究它们的性质.

设

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots \tag{1}$$

是一个无穷数列，对数列(1)的各项依次用加号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{2}$$

称为**数项级数**，或**无穷级数**. 表达式(2)也常写作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

其中 u_n 称为级数(2)的**通项**. 级数(2)前 n 项的和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

称为级数(2)的**第 n 个部分和**(或简称**部分和**).

例如，把等比数列

$$a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots,\ ar^n,\ \cdots\quad (a\neq 0) \tag{3}$$

各项依次相加可得数项级数

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots \tag{4}$$

这个级数常称为**等比级数**或**几何级数**. 它的部分和($r\neq 1$)

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=a\frac{1-r^n}{1-r} \tag{5}$$

对于无穷级数(2)，我们要研究是否也有一个数，它象有限数的和一样，可以作为无穷级数(2)的"和". 为此，我们不难设想，若

无穷级数(2)的部分和 S_n，当 n 无限增大时其极限存在，则这极限值应当可以充当这个角色. 例如几何级数 (4) 的部分和 (5)，当 $|r|<1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\,\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

因此，当 $|r|<1$ 时，可把数 $\frac{a}{1-r}$ 规定为几何级数(4)的和.

一般地，无穷级数(2)的和的定义为：

定义 若级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

则称级数(2)**收敛**. 极限值 S 称为级数(2)的和，记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

若部分和数列 $\{S_n\}$ 没有极限，则称级数(2)**发散**.

按上述定义，几何级数(4)当 $|r|<1$ 时收敛，且

$$\frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots \tag{6}$$

当 $|r|>1$ 时，由于 $\lim_{n\to\infty}|r|^n=\infty$，所以部分和 $S_n = a\,\frac{1-r^n}{1-r}$ 的极限不存在；当 $r=\pm 1$ 时其部分和分别为 $S_n = na$ 与

$$S_n = [1+(-1)^{n-1}]a/2$$

容易看到当 $n\to\infty$ 时，它们的极限都不存在. 于是可见，几何级数(4)当 $|r|\geqslant 1$ 时是发散的.

再考察下面一个例子.

例 1 讨论级数

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots \tag{7}$$

的收敛性.

解 级数(7)的部分和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

由于
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$
所以级数(7)收敛,且其和为1.

注意:由于级数(2)的收敛或发散(简称敛散性)是由它的部分和数列 $\{S_n\}$ 来确定,因而可把级数(2)作为数列 $\{S_n\}$ 的另一种表现形式. 反之,任一数列 $\{a_n\}$ 若令

$$u_1=a_1,\ u_n=a_n-a_{n-1}\quad(n=2,\ 3,\ \cdots)$$

则无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+\cdots\qquad(8)$$

与数列 $\{a_n\}$ 具有相同的敛散性,且当数列 $\{a_n\}$ 收敛时,其极限值就是级数(8)的和.

基于级数与数列这种密切的联系,读者不难自行由数列的某些结果证明下列关于级数的一些定理.

定理1(级数的柯西(Cauchy)准则) 级数(2)收敛的充要条件是:任给正数 ε,总存在某一自然数 N,使得当 $n>m>N$ 时,都有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n|<\varepsilon\qquad(9)$$

定理1也可写成下述形式:

定理1′ 级数(2)收敛的充要条件是:任给正数 ε,总存在某自然数 N,使得当 $m>N$ 时,对一切自然数 p,都有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon\qquad(10)$$

若级数(2)收敛,则对任一正数 ε,让(9)中 $m=n-1$,就有

$$|u_n|<\varepsilon$$

从而有下面结论.

推论(级数收敛的必要条件) 级数(2)收敛的必要条件是:

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0$$

注意:通项趋于零仅仅是级数收敛的必要条件,而不是充分条件. 例如,**调和级数**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \tag{11}$$

的通项 $\frac{1}{n}$ 虽然趋于零,但它却是发散的. 因为令 $p=m$ 时,由(10)式有

$$\begin{aligned}|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{2m}|&=\left|\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|\\&\geqslant\left|\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

它对任何自然数 m 都成立,由定理 1′ 知调和级数(11)是发散的.

例 2 应用柯西收敛准则证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的收敛性.

证 由(10)式

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|=\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+p)^2}$$

$$<\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(m+p-1)(m+p)}$$

$$=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{m+p-1}-\frac{1}{m+p}\right)$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+p}<\frac{1}{m}$$

因此对任给的正数 ε, 只须取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 使得当 $m>N$ 及任何自然数 p, 都有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\frac{1}{m}<\varepsilon$$

由定理 1′ 就证得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的. 证毕

定理 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛, 且其和分别为 S 与 T, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛, 且其和为 $S\pm T$. 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$

因之, 我们常称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$ 分别为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的和与差.

定理 3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 其和为 S, c 为任一常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$ 也收敛, 且其和为 cS, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

定理 4 去掉、增加或改变级数的有限项并不改变级数的敛散性.

证 由级数收敛的柯西准则(定理 1′)知道, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛与否, 在于对任给的正数 ε, 是否存在一个充分大的正整数 N, 使得在第 N 项以后的任一片段的绝对值 ($n>N$, p 为任一自然数) $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$. 由此可见, 级数的敛散性与级数的前面有限项的取值是无关的. 证毕

由此定理知道, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 其和为 S, 则级数

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots \tag{12}$$

也收敛，且其和为 $R_n=S-S_n$. (12)式称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**第 n 个余项**(或简称余项)，它表示以部分和 S_n 代替 S 时所产生的误差.

同样可由级数的柯西准则推得:

定理 5 在收敛级数的项中任意加括号，既不改变级数的收敛性，也不改变它的和.

例如：当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛时，下面的两个级数也都收敛且其和不变.

$$\underbrace{(u_1+u_2)}_{u_1'}+\underbrace{(u_3+u_4)}_{u_2'}+\cdots+\underbrace{(u_{2n-1}+u_{2n})}_{u_n'}+\cdots$$

$$\underbrace{(u_1)}_{u_1''}+\underbrace{(u_2+u_3)}_{u_2''}+\underbrace{(u_4+u_5+u_6+u_7)}_{u_3''}+\cdots$$

$$+\underbrace{(u_{2^{n-1}}+u_{2^{n-1}+1}+\cdots+u_{2^n-1})}_{u_n''}+\cdots$$

注意：从级数加括号后的收敛性不能推断它在未加括号前也收敛. 例如

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots+0+\cdots=0$$

收敛，但级数
$$1-1+1-1+\cdots$$
却是发散的.

习　题

1. 验证下列级数的收敛性，并求其和数:

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

(2) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2. 已知级数的部分和 $S_n=\frac{n+1}{n}$，写出这个级数.

3. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

4. 证明：若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$，则

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 发散；

(2) 当 $b_n\neq 0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$.

5. 应用第 3, 4 题的结果求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

6. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^n}{2^n}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

---

7. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是：任给正数 ε，存在某自然数 N，对一切 $n>N$ 总有

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon$$

8. 举例说明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 对每一个自然数 p 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+p})=0$$

则这级数不一定收敛.

§2 正项级数

一 正项级数收敛性的一般判别原则

若数项级数各项的符号都相同，则称它为**同号级数**. 对于同号级数只须研究各项都是由正数组成的级数——称为**正项级数**. 如果级数的各项都是负数，则它乘以 -1 后就得到一个正项级数，

由上节定理 3 知道它们具有相同的敛散性.

定理 1 正项级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

收敛的充要条件是：部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，即存在某正数 M，对一切自然数 n 成立

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k\leqslant M \tag{2}$$

证 必要性 由于级数(1)收敛，根据收敛性定义，级数(1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 也收敛，再根据收敛数列有界性定理推得存在正数 M 使(2)式成立.

充分性 由于 $u_n\geqslant 0(n=1, 2, \cdots)$，所以级数(1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 是递增的；又知对一切 n (2)式成立，所以 $\{S_n\}$ 是递增有界数列. 根据单调有界定理知道数列 $\{S_n\}$ 收敛，从而级数(1)也收敛. 证毕

定理 2(比较原则) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是两个正项级数，且存在某自然数 N，对一切 $n>N$ 都有

$$u_n\leqslant v_n \tag{3}$$

那么

（i）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

（ii）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散.

证 因为改变级数的有限项并不影响原有级数的敛散性，因此不妨设不等式(3)对一切自然数 n 都成立.

现分别以 S'_n 与 S''_n 记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和. 由 (3) 式推得，对一切自然数 n，都有

$$S'_n\leqslant S''_n \tag{4}$$

如若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S''_n$ 存在. 则由(4)式对一切 n 有

$$S_n' \leqslant \lim_{n\to\infty} S_n''$$

即正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n'\}$ 有界，由定理 1，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，这就证明了(i).

对于(ii)，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 由定理 1，它的部分和数列 $\{S_n'\}$ 无界. 同样由(4)式可得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和数列 $\{S_n''\}$ 也是无界的，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是发散的.

证毕

例 1 证明 p 级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

当 $p\geqslant 2$ 时是收敛的.

证 当 $p=2$ 时，上节例 2 已证明级数是收敛的. 当 $p>2$ 时，由于 $\frac{1}{n^p}<\frac{1}{n^2}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，根据定理 2 知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 也收敛.

证毕

在实际使用上，比较原则的下述极限形式常常更为方便.

推论 1 设

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{5}$$

和

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \tag{6}$$

是两个正项级数，且存在某自然数 N_0，当 $n>N_0$ 时有 $v_n\neq 0$，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l \tag{7}$$

则:

(i) 当 $0<l<\infty$ 时，级数(5)、(6)同时收敛或同时发散;

(ii) 当 $l=0$ 且级数(6)收敛时，级数(5)也收敛;

(iii) 当 $l=\infty$ 且级数(6)发散时，级数(5)也发散.

证 由(7)，对任给正数 ε，存在某自然数 $N(\geqslant N_0)$，当 $n>N$

时，恒有

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\varepsilon$$

或

$$(l-\varepsilon)v_n<u_n<(l+\varepsilon)v_n \tag{8}$$

由定理2及(8)式推得，当$0<l<\infty$(这里设$\varepsilon<l$)时，级数(5)与(6)同时收敛或同时发散．这就证得(i)．

对于(ii)，当$l=0$时，由(8)式右半部分及比较原则可得：若级数(6)收敛，则级数(5)也收敛．

对于(iii)，若$l=\infty$，即对任给的正数M，存在相应的自然数N，当$n>N$时，都有

$$\frac{u_n}{v_n}>M$$

或

$$u_n>Mv_n \tag{9}$$

于是由比较原则知道，若级数(6)发散，则级数(5)也发散．　证毕

例2　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n} \tag{10}$$

是收敛的．因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2^n-n}}{\dfrac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{n}{2^n}}=1$$

以及几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，所以根据推论1，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$也收敛．

例3　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}=\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}+\cdots \tag{11}$$

是发散的．因为