

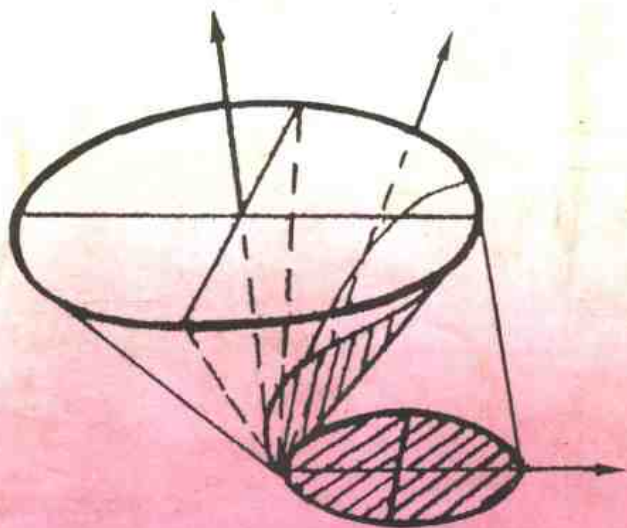


大学本科·大专·教学同步参考书

(下卷)

高等数学 解题方法指导

汪荷仙 编著



成都科技大学出版社

高等数学解题方法指导

(下 卷)

——大学本科、大专数学同步参考书

成都科技大学出版社

(川)新登字015号

责任编辑 梁式梅

封面设计 梁式朋

高等数学解题方法指导 (下卷)

——大学本科、大专教学同步参考书——

汪荷仙 编著

成都科技大学出版社 出版发行

(通讯处:成都科技大学 391 信箱,邮编:610065)

全国各新华书店 经 销

成都市武侯区金川彩印厂 胶 印

开本:787×1092毫米 1/32 印张:23.375

字数:505千字 印数:5001 7000

1995年12月第2版 1995年12月第1次印刷

ISBN7-5616-0415-7/O·39

定价:19.80

再 版 前 言

《高等数学解题方法指导》(上、下卷)出版以来,深受广大读者喜爱,作者和责任编辑都不断收到读者来信,纷纷赞扬它“编写方法新颖,内容丰富”(沈阳·东北大学沈其国);“读后深感获益匪浅”(上海·复旦大学宋 凯);“内容编排合理,讲解通俗易懂,是一本十分难得的指导书”(山东临沂第一职业中等专业学校段景伦);“题目的确选得不错,解法精辟,很有启发性,即使我考不起研究生,也要仔细拜读您的佳作!”(湖南常德邓××);“顿如一个久在沙漠中行走的旅人遇上一股甘泉,心里欣喜高兴之情可想而知——这正是我一直在苦苦寻找的书!”(武汉·华中农业大学方 军),……溢美之辞,希冀之情,不乏篇篇。

为了满足读者的不同需求,我们将此书采用两种方式再版:一种仍分上、下两卷平装,另一种将上、下两卷精装合订。本次再版,除对初版中的问题进行了修正以外,增加了常用数学公式,并补齐了我国(1986—1995年)历届研究生全国统考试题,使本书更趋完美。

趁本书再版的机会,出版者、作者和责任编辑对广大读者的支持和厚爱深表谢意,同时希望大家继续来信把你们的意见、建议和要求告诉我们。

[本书责任编辑联系地址:四川联合大学(东区)中文系办公室
邮编:610064]

出版者 1995年10月

目 次

第六章 空间解析几何和矢量代数	(1)
§ 6-1 空间直角坐标系、矢量代数	(1)
I. 内容提要	(1)
1. 空间直角坐标系	(1)
2. 矢量代数	(2)
II. 解题方法分类指导与范例	(5)
1. 根据有关定义,直接进行计算的题	(6)
2. 根据矢量的有关定义进行判断的题	(7)
3. 用矢量的方法证明图形的几何性质	(10)
4. 应用矢量的运算性质进行计算和证明的题	(12)
III. 课堂练习题及其说明	(14)
IV. 补充题	(17)
§ 6-2 空间平面的方程与直线的方程	(18)
I. 内容提要	(18)
1. 空间平面的方程	(18)

2. 空间直线的方程	(19)
I. 解题方法分类指导与范例	(21)
1. 由已知条件写出平面或直线的方程	(21)
2. 点、平面、直线间的位置关系	(26)
3. 点到直线或平面的距离、两直线间的距离	(30)
4. 综合题	(36)
II. 课堂练习题及其说明	(44)
IV. 补充题	(50)
§ 6-3 二次曲面	(52)
I. 内容提要	(52)
1. 球面	(53)
2. 椭球面	(53)
3. 锥面	(53)
4. 椭球抛物面	(53)
5. 单叶双曲面	(53)
6. 双叶双曲面	(53)
7. 双曲抛物面	(53)
8. 柱面	(53)
9. 旋转曲面	(53)
I. 解题方法分类指导与范例	(53)
II. 课堂练习题及其说明	(61)
IV. 补充题	(65)
第七章 多元函数微分学	(68)
§ 7-1 函数、极限、连续	(68)
I. 内容提要	(68)
1. 有关平面点集的简单知识	(68)

2.	二元函数的定义	(68)
3.	二元函数极限的定义	(69)
4.	二元函数极限的运算法则	(69)
5.	二元函数连续性的定义	(70)
6.	在有界闭区域上的二元连续函数的性质	(70)
7.	二元函数的运算性质	(71)
I.	解题方法分类指导与范例	(71)
1.	建立函数表达式	(71)
2.	求定义域	(73)
3.	二元函数的极限	(76)
4.	讨论二元函数的连续性	(80)
5.	综合题	(82)
II.	课堂练习题及其说明	(85)
IV.	补充题	(87)
§ 7-2	偏导数、全微分及其在近似计算中的应用	(87)
I.	内容提要	(87)
1.	偏导数的意义	(88)
2.	偏导数与连续的关系	(88)
3.	全增量的意义	(88)
4.	全微分的定义	(88)
5.	可微与偏导数的关系	(89)
6.	高阶偏导数	(89)
7.	可微函数全增量的近似表达式	(90)
II.	解题方法分类指导与范例	(90)
1.	求一阶偏导数、高阶偏导数	(90)

2. 证明偏导数满足给定的方程	(94)
3. 全微分及应用全微分进行近似计算	(95)
4. 连续、可导、可微之间关系的讨论	(98)
5. 综合题	(101)
III. 课堂练习题及其说明	(105)
IV. 补充题	(107)
§ 7-3 多元函数的微分法	(108)
I. 内容提要	(108)
1. 复合函数微分法	(108)
2. 全微分的微分形式不变性	(109)
3. 隐函数的微分法	(109)
4. 用参数方程表示的函数的微分法	(110)
I. 解题方法分类指导与范例	(111)
1. 复合函数微分法	(111)
2. 隐函数的微分法	(118)
3. 由参数方程所表示之函数的微分法	(136)
4. 综合题	(138)
III. 课堂练习题及其说明	(142)
IV. 补充题	(145)
§ 7-4 偏导数的应用	(147)
I. 内容提要	(147)
1. 空间曲线的切线及法平面	(147)
2. 空间曲面的切平面及法线	(147)
3. 方向导数、梯度	(148)
4. 二元函数的泰勒展式	(149)
5. 极值、最大值和最小值	(150)

I. 解题方法分类指导与范例	(151)
1. 空间曲线的切线与法平面	(151)
2. 空是曲面的切平面与法线	(154)
3. 方向导数、梯度	(157)
4. 二元函数的泰勒展式	(160)
5. 极值、最大值和最小值	(164)
6. 综合题	(174)
II. 课堂练习题及其说明	(179)
IV. 补充题	(184)
第八章 重积分	
§ 8-1 二重积分	(187)
1. 内容提要	(187)
1. 定义	(187)
2. 存在定理	(187)
3. 几何意义	(187)
4. 性质	(188)
5. 计算方法——累次积分法	(189)
6. 二重积分的变量替换公式	(190)
I. 解题方法分类指导与范例	(191)
1. 二重积分的计算	(191)
2. 二重积分计算中的几个技巧问题	(194)
3. 综合题	(201)
II. 课堂练习题及其说明	(211)
IV. 补充题	(218)
§ 8-2 三重积分	(220)
1. 内容提要	(220)

1. 定义.....	(220)
2. 三重积分的存在性.....	(220)
3. 性质.....	(220)
4. 计算方法.....	(220)
5. 三重积分的变量替换公式.....	(222)
I. 解题方法分类指导与范例	(223)
1. 三重积分的计算步骤.....	(223)
2. 计算三重积分的几个技巧问题.....	(226)
3. 综合题.....	(239)
II. 课堂练习题及其说明	(246)
IV. 补充题	(251)
§ 8-3 重积分的应用.....	(252)
I. 内容提要	(252)
1. 曲面的面积.....	(252)
2. 质量.....	(253)
3. 静力矩和重心.....	(253)
4. 转动惯量.....	(254)
II. 解题方法分类指导与范例	(254)
1. 曲面的面积.....	(255)
2. 质量.....	(258)
3. 重心.....	(262)
4. 转动惯量.....	(265)
5. 综合题.....	(268)
III. 课堂练习题及其说明	(271)
IV. 补充题	(257)
第九章 曲线积分、曲面积分	(276)

§ 9-1 曲线积分	(276)
I. 内容提要	(276)
1. 第一型曲线积分(对弧长的曲线积分)	(276)
2. 第二型曲线积分(对坐标的曲线积分)	(278)
3. 两类曲线积分之间的关系	(279)
4. 格林公式·曲线积分与路径无关的条件	(280)
II. 解题方法分类指导与范例	(280)
1. 第一型曲线积分	(280)
2. 第二型曲线积分	(287)
3. 综合题	(304)
III. 课堂练习题及其说明	(311)
IV. 补充题	(317)
§ 9-2 曲面积分	(319)
I. 内容提要	(319)
1. 第一型曲面积分(对曲面的面积的曲面积分)	(319)
2. 第二型曲面积分(对坐标的曲面积分)	(320)
3. 两类曲面积分之间的关系	(322)
4. 奥、斯公式	(323)
5. 面积分与曲面(形状)无关的条件	(323)
6. 四个等价条件	(324)
II. 解题方法分类指导与范例	(324)
1. 第一型曲面积分的计算	(324)
2. 第二型曲面积分	(330)
3. 斯托克斯公式的应用	(339)
4. 空间曲线积分与路径无关问题、求原	

函数问题	(344)
5. 综合题	(347)
I. 课堂练习题及其说明	(352)
IV. 补充题	(360)
§ 9-3 矢量分析补步	(361)
I. 内容提要	(361)
1. 矢量函数的极限、连续和微商	(361)
2. 矢量场	(364)
3. 二阶微分算子	(366)
4. 几种重要的矢量场	(367)
II. 解题方法分类指导与范例	(367)
1. 通量、散度	(367)
2. 环量、旋度	(371)
3. 综合题	(376)
III. 课堂练习题及其说明	(379)
IV. 补充题	(383)
第十章 无穷级数	(385)
§ 10-1 常数项级数	(385)
I. 内容提要	(385)
1. 数项级数的基本概念和性质	(385)
2. 数项级数敛散性的判别法	(386)
II. 解题方法分类指导与范例	(388)
1. 数项级数判敛的一般步骤和方法选择	(388)
2. 一般判敛法	(390)
3. 正项级数的判敛法	(395)
4. 交错级数的判敛法	(405)

5. 任意项级数的判别法	(408)
6. 综合题	(411)
III. 课堂练习题及其说明	(418)
IV. 补充题	(424)
§ 10-2 幂级数	(426)
1. 内容提要	(426)
1. 函数项级数的基本概念	(426)
2. 幂级数的收敛半径、收敛区域及和函数	(428)
3. 展开函数为幂级数、幂级数的应用	(430)
I. 解题方法分类指导与范例	(431)
1. 求幂级数的收敛半径和收敛区间	(431)
2. 求幂级数在收敛区间内的和函数	(437)
3. 将函数展开成幂级数	(445)
4. 幂级数的应用	(462)
5. 综合题	(470)
II. 课堂练习题及其说明	(477)
IV. 补充题	(485)
§ 10-3 付里叶(Fourier)级数	(486)
I. 内容提要	(486)
1. 三角级数、三角函数系的正交性	(487)
2. 付里叶级数及其收敛定理	(487)
3. 正弦级数与余弦级数	(489)
4. 付氏级数的复数形式	(489)
I. 解题方法分类指导与范例	(489)
1. 将以 2π 为周期的函数展成付氏级数	(489)
2. 在有限区间上展开函数为付氏级数	(493)

3. 奇、偶函数的付氏级数	(497)
4. 将定义在任意区间 $[-L, L]$ 上的函数 $f(x)$ 展成付氏级数	(501)
5. 将在区间 $[0, \pi]$ 或 $[0, L]$ 上定义的函 数展成正弦(或余弦)级数	(507)
6. 将函数展为复数形式的付氏级数	(515)
7. 综合题	(518)
■. 课堂练习题及其说明	(529)
N. 补充题	(529)
第十一章 广义积分和含参变量的积分	(538)
§ 11-1 广义积分	(538)
I. 内容提要	(538)
1. 无穷积分	(538)
2. 瑕积分	(541)
3. Γ -函数与 B -函数(欧拉(Euler)积分)	(543)
II. 解题方法分类指导与范例	(544)
1. 广义积分的计算方法	(544)
2. 广义积分的敛散方法	(555)
3. 综合题	(565)
■. 课堂练习题及其说明	(572)
N. 补充题	(578)
§ 11-2 含参变量的积分	(579)
I. 内容提要	(579)
1. 含参变量的积分	(579)
2. 含参变量的广义积分	(581)
II. 解题方法分类指导与范例	(582)

1. 应用连续性求含参变量积分的极限·····	(583)
2. 应用公式求含参变量积分的导数·····	(585)
3. 应用对参数的微分法计算积分·····	(588)
4. 应用积分符号下的积分法计算积分·····	(590)
5. 判别含参数广义积分的一致收敛性·····	(592)
6. 广义积分号下的微分法与积分法·····	(595)
III. 课堂练习题及其说明·····	(598)
IV. 补充题·····	(603)
附录	
附录1 计算机及应用专业教育质量评估正式试 点(1988.6)《高等数学》统考试题及其参 考解答与评分标准·····	(605)
附录2 硕士学位研究生招生考试全国统一数学 试题汇编·····	(614)

第六章 空间解析几何和矢量代数

§ 6-1 空间直角坐标系、矢量代数

I. 内容提要

1. 空间直角坐标系

(1) 空间点的直角坐标

过空间一定点 O , 作三条互相垂直的数轴 Ox, Oy, Oz , 它们都以 O 为起点(即原点), 且(一般)具有相同的单位长度, 取其正向符合右手规则. 由此就建立了空间直角坐标系. 有了坐标系, 就可以确定点 M 与一组有序的数 x, y, z 的一一对应关系, 并称 (x, y, z) 为点 M 的直角坐标.

(2) 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点, 则两点间的距离为:

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

(3) 定比分点

设 $M(x, y, z)$ 是线段 M_1M_2 的分点, 且 $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda (\lambda > 0$ 为内分, $\lambda < 0$ 为外分, $\lambda \neq -1$), 则分点的坐标为

$$M\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\right).$$

当 $\lambda=1$ 时, M 为线段 M_1M_2 的中点, 中点坐标为

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

2. 矢量代数

(1) 矢量概念

①矢量的定义: 既有大小, 又有方向的量称为矢量, 记作 $\overrightarrow{AB}$ (或 $\vec{a}$). 其中 A 是矢量的起点, B 是终点.

②矢量的模: 矢量的大小称为矢量的模, 记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\vec{a}|$.

③单位矢量: 模为 1 的矢量称为单位矢量, 记为 $\vec{a}^0$. 与 $\vec{a}$ 同向的单位矢量为 $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

④负矢量: 与矢量 $\vec{a}$ 的大小相同, 方向相反的矢量称为 $\vec{a}$ 的负矢量, 记作 $-\vec{a}$.

⑤零矢量: 模为零的矢量称为零矢量, 记作 $\vec{0}$. 零矢量的方向是任意的.

⑥矢量相等: 大小相等, 方向相同的矢量称为等矢量. 设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为等量, 则记作 $\vec{a}=\vec{b}$.

(2) 矢量的坐标表达式

设 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为直角坐标系中的坐标矢量: 分别是三个坐标轴上与坐标轴同向的单位矢量, 也称基本单位矢量. 矢量 $\vec{a}$ 在三个坐标轴上的投影为 a_x, a_y, a_z , 则

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

称为矢量 $\vec{a}$ 的分解式, 而 a_x, a_y, a_z 叫做矢量 $\vec{a}$ 的坐标, 并称表达式 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ 为矢量 $\vec{a}$ 的坐标表达式.

(3) 坐标表达矢量的模、方向余弦