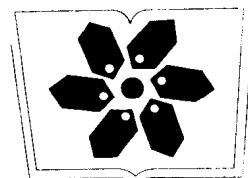


天文地球动力学原理

高布锡 著



科学出版社



中国科学院科学出版基金资助出版

天文地球动力学原理

高布锡 著

科学出版社

1997

内 容 简 介

本书系统地论述了天文地球动力学的基本理论,全书共分九章,内容包括地球引力场、刚体地球的动力学、潮汐和勒夫数、激发函数与地球自转变化、液核地球的动力学、地球弹性运动方程、地球自转速率变化及其地球物理机制、极移运动及其地球物理机制、基本常数系统与计算模型等。

本书理论体系完整,内容较新,反映了此学科领域的最新进展,本书可供测绘、天文、地球物理等专业的高年级大学生、研究生、教师及科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

天文地球动力学原理/高布锡著. - 北京:科学出版社,1997
ISBN 7-03-005749-X

I. 天… II. 高… III. 地球动力学 IV. P541

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 22614 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1997年5月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

1997年5月第一次印刷 印张: 11 3/4

印数: 1—1 000 字数: 265 000

定价: 32.00元

序

天文地球动力学是最近发展起来的一门新学科,主要研究地球的自转运动及其动力学机制。

地球自转是地球相对于某地固参考系的整体旋转运动,地球自转速率及自转轴方向都是变化的,而这种变化是地球外部天体运动和地球内部物质运动共同作用的结果。因此,地球自转既是一个天文学更是一个地球物理学问题。近几十年来,随着空间大地测量技术的发展,尤其是 VLBI、SLR 及 GPS 等高精度测量手段的问世,地球自转参数的测定有了飞速的进步,观测精度已经好于 $\pm 0.^\circ 0001$ (对日长)和 $\pm 0''001$ (对极位置),观测分辨率已达小时的量级,在这样的精度和分辨率的情况下,人们可以观测出地球内部各种动力学效应对地球自转变化的影响。这些动力学效应既反映了地球的局部物质运动,如地壳运动、海洋及大气运动,又与地球深部(包括地幔及地核)的物理性质与运动密切相关,因此反过来,地球自转参数的变化又可成为地球的动力学机制的重要约束依据,从而使得天文动力学研究成为当今国际上的热点之一。

高布锡先生所著《天文地球动力学原理》一书是继芒克与麦克唐纳的经典著作《地球自转》及兰伯克的《地球自转的变化》两书问世后,由我国学者撰写的一部比较系统的专著。首先,该书全面阐述了天文地球动力学的理论基础,包括弹性地球的潮汐形变以及刚体、形变和液核地球的自转动力学理论;其次,详细讨论了地球自转速率变化及极移运动以及它们的物理学机制,最后,对国际采用的基本常数系统、模型和计算规范标准作了说明与讨论,特别是,书中还总结了作者和其他中国学者在这一领域所作的有价值的研究成果。本书的出版,将大大有助于我国天文地球动力学研究的深入与发展。

许厚泽

中国科学院院士

前 言

以前天体测量学的主要任务是测定地面点位及天体的坐标或方位,今天这个任务已经被大大地发展和改变了。过去使用的光学测角仪器,由于大气折射与仪器结构稳定度等的限制,一次观测精度很难超过 $0.''05$ (即相当 2×10^{-7})。现代测量技术是以测距与干涉方法为主的,测量精度可以达到电磁波波长的几分之一,已经达到了分米或厘米级的精度。设基线长度为地球半径(6378 km),即已达到 5×10^{-9} 精度。对于如此精密的观测结果,过去许多被忽略的效应都必须考虑。现在已不单单是测量,还必须研究许多有关地球动力学的问题,如地幔、液核、大气和海洋的地球物理学效应,地幔的弹性在月日引力和负荷力的作用下而引起的各种效应,改进岁差、章动及有关动力学模型,定义并确定更加精确的空间及地面参考系,确定更加精确的天文及地球物理常数,考虑相对论效应等等。对这些问题的研究大大丰富了地球物理学、天文学和大地测量学等学科的内容,促进了它们的发展。

地球是个具有大气、海洋、地壳、地幔和地核的行星,形状近似于旋转椭球体,结构复杂。月亮和太阳对旋转地球赤道隆起部分的吸引,使地球产生复杂的岁差和章动。同时月、日对地球不同地点的引力差,在海洋中引起海潮,在大气中引起大气潮,在陆地上引起固体潮。早在上个世纪已经研究了地幔弹性和液核的地球动力学效应,理论上预言的近周日自由摆动近年来已经得到了观测证实。虽然地壳相对于地球而言只是薄薄的一层,但它却反映了几十亿年来地球的演化过程。地质资料和空间大地测量观测结果表明,各个大陆之间仍以每年几厘米的速度在运动着。大气和海洋是地球上最具有流动性的部分,它们的运动影响了地球自转速度及自转轴方向在地球体内的变化,这种变化可以达到 5×10^{-7} 量级。现代观测技术精度比它高两个数量级,对地球自转参数变化的分析可以很好地反映出全球大气和海洋的运动。因此对天文地球动力学的研究反过来又促进了大气科学、海洋学和全球变化的研究。

对天体及地面坐标定位的概念也有极大的突破,现在采用河外射电源作为更加接近于惯性的空间参考系基点,人造卫星激光测距和全球定位系统需要更加方便的动力学参考系。地面上固定的及流动的观测台站组成了不同的地面台站网,不同的观测手段及观测网定义了不同的地面参考系。由于地球的公转与自转运动,在不同的观测地点进行的测量,或者坐标系之间的转换,在精确到 1×10^{-9} 或厘米级精度时,需要考虑月亮及各大行星的运动,人造卫星的各种摄动以及其他的天文因素。这样便需要建立更精确而自恰的天文常数系统,规定统一的天文及地球物理模型,制定统一的计算规范。由巴黎天文台主持,美国著名天文学家 MaCarthy 作为主席,联合许多大地测量学家、天文学家和地球物理学家共同编写的“*IERS STANDARDS*”,可以作为这方面的技术规范,它给出了有关的常数、模型和计算数据,是现代天文及大地测量数据规算工作的基础。

本书将主要就与天文有关的地球动力学问题作较全面的介绍。前六章是天文地球动力学的理论基础,除了介绍基本概念之外,主要的公式都给出了理论推导。所采用的符号尽量与 IERS STANDARDS(1992)一致,公式形式也尽量与其统一,以便于从事这方面工作的科技工作者和研究生能系统地学习和理解。本书的第七章到第九章简略地介绍了这方面有关课题的研究动态。作者希望本书的理论体系尽量完整、内容较新,能反映当前这一学科领域的进展。在本书的附录中列出了有关的常数系统、计算模型及数据,为专业人员将此书作为计算手册使用提供了方便。

在本书的写作过程中,得到国家自然科学基金委员会对有关研究课题基金的支持,同时还得到了中国科学院测量与地球物理研究所及其所属动力大地测量学开放研究实验室的大力支持。朱耀仲研究员仔细审阅了全书,并提出了宝贵意见;许厚泽院士审阅全书并作序;刘光鼎院士对本书的出版给予了大力支持;施东方等为本书的修改和排版作了许多具体工作。作者在此一并表示衷心的感谢。

高布锡

1996年5月

目 录

序

前 言

第 1 章 地球的引力场	(1)
1.1 引力位函数	(1)
1.2 引力位的一般表达形式	(4)
1.3 地球的重力场	(8)
1.4 引潮力位	(10)
第 2 章 刚体地球的动力学	(13)
2.1 刚体的自转运动	(13)
2.2 刚体地球的自由摆动	(15)
2.3 若干天文概念和欧拉角	(17)
2.4 章动和岁差	(19)
2.5 Woolard 的章动理论	(21)
2.6 Kinoshita 的章动理论	(25)
2.7 协议空间参考系与协议地球参考系	(28)
第 3 章 潮汐和勒夫数	(31)
3.1 潮汐频谱	(31)
3.2 潮汐与章动的关系	(35)
3.3 勒夫数	(39)
3.4 负荷勒夫数	(41)
3.5 与潮汐有关的地球物理现象	(43)
3.6 长期勒夫数	(45)
3.7 带谐潮引起的地球自转速率变化	(48)
第 4 章 激发函数与地球自转变化	(50)
4.1 刘维方程	(50)
4.2 激发函数	(52)
4.3 转移函数和有效激发函数	(53)
4.4 大气激发函数的计算	(55)
4.5 水分布激发函数的计算	(58)
4.6 地球自转变化与激发函数的关系	(60)
第 5 章 液核地球的动力学	(62)
5.1 庞加莱的理论	(62)
5.2 液核地球运动的基本方程	(65)

5.3	液核内的物质流动与地幔的形变	(67)
5.4	液核地球的激发函数	(69)
5.5	对章动理论的改进	(71)
第6章	地球弹性运动方程	(75)
6.1	理论依据与假设	(75)
6.2	用球坐标表示的各参量的表达式	(77)
6.3	地球弹性运动方程的推导	(79)
6.4	边界条件与地球模型	(85)
6.5	勒夫数的理论值	(87)
6.6	地球的自由振荡	(91)
6.7	Wahr-Smith 的理论	(94)
第7章	地球自转速率变化及其地球物理机制	(96)
7.1	原子时、历书时和世界时	(96)
7.2	对不同观测方法的讨论	(99)
7.3	地球自转速率与大气角动量变化	(102)
7.4	潮汐引起的地球自转速率变化	(105)
7.5	地球自转速率的长期变化	(106)
第8章	极移运动及其地球物理机制	(112)
8.1	钱德勒摆动的周期和 Q 值	(112)
8.2	钱德勒摆动周期的变化	(116)
8.3	地球的惯量变化与台站位移	(119)
8.4	长期极移与板块运动模型	(124)
8.5	古地质时期的钱德勒摆动	(128)
第9章	基本常数系统与计算模型	(130)
9.1	基本天文及测地常数系统	(130)
9.2	地球引力场模型和其他模型	(133)
9.3	狭义和广义相对论改正	(136)
9.4	关于 IERS STANDARDS	(140)
9.5	关于 IERS Convention (1996)	(143)
附录 A	弹性理论基础	(145)
附录 B	基本天文与测地常数	(148)
附录 C	GEM-T3 引力场模型(到 50 阶)	(151)
附录 D	章动模型(IAU, 1980)	(162)
附录 E	Schwiderski 海潮改正模型	(165)
附录 F	小于和大于 35 天的带谐潮改正	(166)
附录 G	地球参考系(TRS)与惯性参考系(CRS)之间的坐标转换	(167)
附录 H	海洋函数	(170)
附录 I	PREM 地球模型(参考于周期 1s)	(172)
	主要参考文献	(174)

第 1 章 地球的引力场

早在公元前 6 世纪毕达哥拉斯已经提出地球是一个圆球, 公元前 3 世纪希腊天文学家埃拉托斯特尼首次用三角测量法测定了阿斯旺到亚历山大城之间的子午线长。公元 724 年我国唐朝时僧一行领导了全国的大地测量, 给出南北差一度, 相差 351 里 80 步的结论。1670 年法国科学院进行的大地测量证明了地球的椭球性。牛顿首先从理论上预言了地球的椭率。

地球的形状主要是由引力和旋转离心力所确定的, 引力是保守力, 因此它可以用位场唯一地表示。18 世纪勒让德 (Legendre, 1785) 提出了用球谐函数描述地球引力场的概念。取矢径 r 和地心经纬度 λ, ψ 为主变量, 可十分方便地表示引力位。引力位不能直接被测定, 需要通过对重力 (或引力) 的分析而求得。在人造卫星上天以前, 由于全球只有部分地区有重力观测结果, 因此只能给出地球引力位不够精确的很少几阶。1967 年的 IUGG 大会上, 确定了对卫星观测求得的计算结果; 取四个地球物理基本常数为:

- 地球半长径 $a = 6378160\text{m}$
- 地心引力常数 $GM = 3.98603 \times 10^{14} \text{m}^3/\text{s}^2$
- 动力学扁率 $J_2 = 1.0827 \times 10^{-3}$
- 地球自转角速度 $\Omega = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{rad/s}$

现在的引力位函数已经给到 360 阶, 它是根据对人造卫星的观测资料、全球重力资料、卫星海洋测高及地形资料等共同分析求得的。最新的引力位模型是 GEM-T3, 它的精度达到分米级。本书附录 C 中给出了到 50 阶的地球引力位模型, 是引用 IERS STANDARDS(1992) 中给出的 GEM-T3 模型。如上所述的引力位实际上是地球外部的引力位, 在地球表面上的重力位还包含由于地球自转引起的离心力位。本章将介绍引力场、大地水准面、重力、引潮力位和平衡潮的基本概念, 这些都是学习以后各章必需的理论基础。

1.1 引力位函数

任意形状的物体, 其外部是某一点 M 处的引力位 V 可以用下列公式表示

$$V = G \int_E \frac{dm}{s} \quad (1.1)$$

如图 1.1, 利用余弦定理, 将 s 用 d, r 和 ψ 表示。

$$s = (d^2 + r^2 - 2dr \cos \psi)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

因此

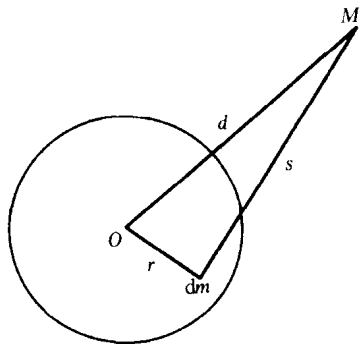


图 1.1

$$V = \frac{G}{d} \int_E \left[1 + \left(\frac{r}{d} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{d} \right) \cos \psi \right]^{-\frac{1}{2}} dm \quad (1.3)$$

上式积分括号中的式子正好是勒让德母函数形式, 设 $\mu = \cos \psi$, 则有

$$\left[1 + \left(\frac{r}{d} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{d} \right) \mu \right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d} \right)^n P_n(\mu) \quad (1.4)$$

$P_n(\mu)$ 被称为勒让德函数, 其一般表达式形式为

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n \quad (1.5)$$

常用的直到 3 阶的勒让德函数表达式为

$$\begin{cases} P_0(\mu) = 1 \\ P_1(\mu) = \mu \\ P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) \\ P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu) \end{cases} \quad (1.6)$$

对应于 n 阶勒让德函数的引力位被称为 n 阶引力位。可将引力位写为

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n + \dots \quad (1.7)$$

以 $\mu = \cos \psi$ 代入, 可将不同阶引力位写为:

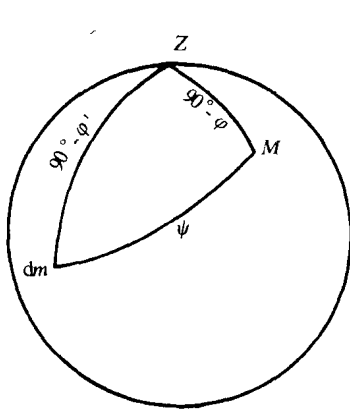


图 1.2

$$\begin{cases} V_0 = \frac{G}{d} \int_E dm = \frac{GM}{d} \\ V_1 = \frac{G}{d^2} \int_E r \cos \psi dm \\ V_2 = \frac{G}{d^3} \int_E \frac{r^2}{2} (3 \cos^2 \psi - 1) dm \\ V_3 = \frac{G}{d^4} \int_E \frac{r^3}{2} (5 \cos^3 \psi - 3 \cos \psi) dm \\ \dots \end{cases} \quad (1.8)$$

由上式可以看出, V_0 实际上表示了地球质量全部集中于地球质心(或者地球当作一个密度分层均匀的球)时, 在地球外部一点 M 的引力位。 V_1 是与地球质心位置有关的量, 当把坐标原点选在地球质心时, 可以证明 $V_1 = 0$ 。二阶位是与地球的扁率及对称性有关的量, 二阶位约为 10^{-3} 和 10^{-6} 量级。对地球而言, 高阶位的数量级随阶数增高而减小。设 (d, λ, φ) 为天体的地心坐标, (r, λ', φ') 为地球内部质量元 dm 的地心坐标, 则可导出

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda') \quad (1.9)$$

将坐标原点选在地球质心,可消去一阶位。由(1.9)式,给出更加实用的位函数形式

$$V = \frac{GM}{d} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{GR^n}{d^{n+1}} P_n^m(\cos\varphi)(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda) \quad (1.10)$$

上式中 R 为地球半径。 $P_n^m(\mu')$ ($\mu' = \cos\varphi'$) 是连带勒让德函数,其一般表达式为

$$P_n^m(\mu') = (1 - \mu'^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\mu')}{d\mu'^m} \quad (1.11)$$

C_{nm} 和 S_{nm} 被称为斯托克斯系数或引力位系数:

$$\begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} = \frac{1}{MR^n} \int_E r^n P_n^m(\cos\varphi') \begin{bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{bmatrix} dm$$

勒让德函数有如下正交性质:

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^{m'}(\mu) d\mu = \begin{cases} (n+m)! \frac{(2-\delta_{0,m})}{(2n+1)(n-m)!} & \text{当 } n' = n, \quad m' = m \text{ 时} \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \quad (1.12)$$

由于引力场是保守力场,故引力位 V 满足拉普拉斯方程,用另一方法可证明引力场能用球谐函数表示。由于

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1.13)$$

这里,

$$\begin{cases} x = d \sin\theta \cos\lambda \\ y = d \sin\theta \sin\lambda \\ z = d \cos\theta \end{cases} \quad (1.14)$$

式中 θ 是余纬, $\theta = 90^\circ - \varphi$, 采用分离变量法,设解的形式为

$$V(d, \varphi, \lambda) = D(d)\Theta(\theta)\Lambda(\lambda) \quad (1.15)$$

将(1.15)式代入(1.13)式,分离变量并引入系数 n 和 m ,可得三个方程

$$d^2 D''(d) + 2dD'(d) - n(n+1)D(d) = 0 \quad (1.16)$$

$$\sin\theta \frac{d^2 H(\theta)}{d\theta^2} + \cos\theta \frac{dH(\theta)}{d\theta} + [n(n+1)\sin\theta - \frac{m^2}{\sin\theta}]H(\theta) = 0 \quad (1.17)$$

$$\frac{d^2 \Lambda(\lambda)}{d\lambda^2} + m^2 \Lambda(\lambda) = 0 \quad (1.18)$$

以上三式的解分别为

$$D(d) = d^n \quad \text{或} \quad D(d) = d^{-n-1}$$

$$\Theta(\theta) = P_n^m(\sin\theta)$$

$$\Lambda(\lambda) = \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases}$$

由于引力位随 d 增大而变小, 显然 $D(d) = d^n$ 不合解的要求, 从而求得解的一般形式

$$V(d, \varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{GM}{d^{n+1}} Y_n^m(\theta, \lambda) \quad (1.19)$$

上式中

$$Y_n^m(\theta, \lambda) = P_n^m(\sin\theta)(C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \quad (1.20)$$

被称为面球谐函数, $\frac{1}{d^{n+1}} Y_n^m(\theta, \lambda)$ 被称为体球谐函数。面球谐函数有如下正交性质:

$$\int_{\omega} Y_n^m(\theta, \lambda) Y_{n'}^{m'}(\theta, \lambda) d\omega = \begin{cases} \frac{2\pi(n+m)!(2-\delta_{0m})}{(2n+1)(n-m)!} & \text{当 } n = n', m = m' \text{ 时} \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \quad (1.21)$$

在这 δ_{0m} 为克罗内克符号

$$\delta_{0m} = \begin{cases} 1 & \text{当 } m = 0 \\ 0 & \text{当 } m \neq 0 \end{cases}$$

1.2 引力位的一般表达式

1. 一般形式

引力位的一般表达式中不需再写出零阶和一阶位, 其形式为:

$$V = \frac{GM}{d} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{d}\right)^n Y_n^m(\theta, \lambda) \quad (1.22)$$

或者写为归一化的球谐函数形式

$$V = \frac{GM}{d} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{d}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_n^m(\cos\theta) \quad (1.23)$$

取 C_{nm} 和 S_{nm} 为归一化的球谐系数, \bar{P}_n^m 是归一化的勒让德函数, 归一化的球谐函数和球谐系数的表达式分别为

$$\bar{P}_n^m(\mu) = N_{nm} (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}$$

$$\begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} = N_{nm} \frac{1}{MR^n} \int_E r^n \bar{P}_n^m(\cos\varphi') \begin{bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{bmatrix} dm \quad (1.24)$$

上式中

$$N_{nm} = \sqrt{\frac{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0m})}{(n+m)!}} \quad (1.25)$$

对于归一化面球谐函数有如下正交性质

$$\int_{\omega} Y_n^m(\theta, \lambda) Y_{n'}^{m'}(\theta, \lambda) d\omega = \begin{cases} 2\pi(\delta_{0m} + 1) & \text{当 } n = n', m = m' \text{ 时} \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \quad (1.26)$$

定义在球面上的函数可以用球谐函数的展开式来表达。采用适当的方法可以确定球谐系数 C_{nm} 和 S_{nm} ，不同阶(n)和级(m)的球谐函数表示了不同的数学及物理意义。以下给出直到四阶的归一化球谐函数表达式：

$$Y_0^0 = 1$$

$$Y_1^0 = \cos\theta$$

$$Y_1^1 = \cos\theta \left(\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}\right)$$

$$Y_2^0 = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}$$

$$Y_2^1 = 3\sin\theta\cos\theta \left(\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}\right)$$

$$Y_2^2 = 3\sin^2\theta \left(\frac{\cos 2\lambda}{\sin 2\lambda}\right)$$

$$Y_3^0 = \frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta$$

$$Y_3^1 = \left(\frac{5}{2}\cos^2\theta - \frac{3}{2}\right)\sin\theta \left(\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}\right)$$

$$Y_3^2 = 15\cos\theta\sin\theta \left(\frac{\cos 2\lambda}{\sin 2\lambda}\right)$$

$$Y_3^3 = 15\sin^3\theta \left(\frac{\cos 3\lambda}{\sin 3\lambda}\right)$$

$$Y_4^0 = \frac{35}{8}\cos^4\theta - \frac{15}{4}\cos^2\theta + \frac{3}{8}$$

$$Y_4^1 = \left(\frac{35}{2}\cos^2\theta - \frac{15}{2}\cos\theta\right)\sin\theta \left(\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}\right)$$

$$Y_4^2 = \left(\frac{75}{2}\cos^2\theta - \frac{15}{2}\right)\sin^2\theta \left(\frac{\cos 2\lambda}{\sin 2\lambda}\right)$$

$$Y_4^3 = 75\cos\theta\sin^3\theta \left(\frac{\cos 3\lambda}{\sin 3\lambda}\right)$$

$$Y_4^4 = 75\sin^4\theta \left(\frac{\cos 4\lambda}{\sin 4\lambda}\right)$$

归一化勒让德函数的一般表达式为：

$$P_n^m(\cos\theta) = (\sin\theta)^2 \sum_{s=0}^m (-1)^s \frac{(2n-2m)!}{2^n s! (n-s)! (n-2s-m)!} (\cos\theta)^{n-2s-m} \quad (1.27)$$

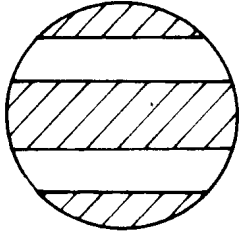


图 1.3 带谐潮

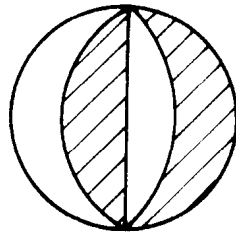


图 1.4 扇谐潮

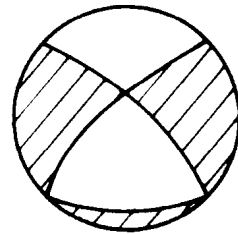


图 1.5 田谐潮

在此 $E(\frac{n-m}{2})$ 表示 $\frac{n-m}{2}$ 中的最大整数值。可以看出直到 n 阶的球谐函数具有 $(n+1)^2$ 项。当 $m=0$ 时称之为带谐函数, 共有 n 项, 带谐函数值 $Y_n^0(\mu)$ 的分布如图 1.3; 当 $m=n$ 时, 称之为扇球谐函数, 共有 $2n$ 项, 扇球谐函数 $Y_n^n(\mu)$ 的数值分布如图 1.4; 当 $0 < m < n$ 时, 称之为田球谐函数, 共有 $n(n+1)$ 项, $Y_n^m(\mu)$ 数值的分布如图 1.5。由此可以看出带、扇和田球谐函数分别代表了不同的分布。

2. 当地球为旋转椭球体时, 扇谐和田谐函数的引力位系数都等于零, 只保留带谐函数。即

$$C_{nm} = S_{nm} = 0 \quad \text{当 } m \neq 0 \text{ 时}$$

用 C_n 表示 C_{n0} , 则引力位的表达式为

$$V = \frac{GM}{d} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} C_n \left(\frac{R}{d} \right)^n P_n(\cos\theta) \right] \quad (1.28)$$

Jeffreys 用 J, D 表示球谐函数的二阶和四阶项,

$$V = \frac{GM}{d} \left[\frac{R}{d} + J \frac{R^2}{d^3} \left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi \right) + \frac{8}{35} D \frac{R^5}{d^5} P_4 \right] \quad (1.29)$$

在这

$$P_4 = \frac{1}{8} (35\sin^4\varphi - 30\sin^2\varphi + 3) \quad (1.30)$$

许多人用 $J_n = -C_n$ 表示球谐函数中的带谐项, 二阶球谐系数 J_2 被取作为地球物理基本常数, 现在取 $J_2 = 0.00108263$ 。

3. 以地球的动力学参数表示二阶位。

设用 (x, y, z) 表示天体质心坐标, (ξ, η, ζ) 表示地球上体元 dm 的坐标。则地球在天体质心处的二阶引力位可以表示为

$$V_2 = \frac{G}{d^3} \int_E \left(\frac{3}{2} \cos^2\psi - 1 \right) dm \quad (1.31)$$

在这

$$\begin{cases} r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \\ d^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \cos\psi = \frac{1}{rd}(x\xi + y\eta + z\zeta) \end{cases} \quad (1.32)$$

将(1.32)代入到(1.31)式中,经化简和整理后有

$$\begin{aligned} V_2 = \frac{G}{2d^5} \int_E [& (\eta^2 + \zeta^2)(y^2 + z^2 - 2x^2) + (\zeta^2 + \xi^2)(z^2 + x^2 - 2y^2) \\ & + (\xi^2 + \eta^2)(x^2 + y^2 - 2z^2) + 6(xy\xi\eta + yz\eta\zeta + zx\xi\zeta)] dm \end{aligned} \quad (1.33)$$

x, y, z 与积分变量无关。将地球的惯量椭球表达为下列形式

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} C_{11} & -C_{12} & -C_{13} \\ -C_{21} & C_{22} & -C_{23} \\ -C_{31} & -C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

上式中

$$C_{11} = \int_E (\eta^2 + \zeta^2) dm, \quad C_{22} = \int_E (\zeta^2 + \xi^2) dm, \quad C_{33} = \int_E (\xi^2 + \eta^2) dm \quad (1.35)$$

$$C_{12} = C_{21} = \int_E \xi\eta dm, \quad C_{23} = C_{32} = \int_E \eta\zeta dm, \quad C_{31} = C_{13} = \int_E \zeta\xi dm \quad (1.36)$$

因而可得 MacGullagh 公式

$$\begin{aligned} V_2 = \frac{G}{2d^5} [& C_{11}(y^2 + z^2 - 2x^2) + C_{22}(z^2 + x^2 - 2y^2) \\ & + C_{33}(x^2 + y^2 - 2z^2) - 6C_{12}xy - 6C_{23}yz - 6C_{13}zx] \end{aligned} \quad (1.37)$$

在某些场合,常用 A, B, C, D, E 和 F 表达地球的动力学惯量,这时

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

因此

$$A = C_{11}, \quad B = C_{22}, \quad C = C_{33}, \quad D = C_{23}, \quad E = C_{13}, \quad F = C_{12} \quad (1.39)$$

设天体坐标为 (d, φ, λ) , 利用下式

$$\frac{x}{d} = \cos\varphi\cos\lambda, \quad \frac{y}{d} = \cos\varphi\sin\lambda, \quad \frac{z}{d} = \sin\varphi \quad (1.40)$$

可导出用地球惯量矩表示的二阶引力位

$$V_2 = \frac{G}{d^3} \left[\frac{1}{4} (2C - (A + B)) (1 - 3\sin^2 \varphi) + (D \cos \lambda + E \sin \lambda) 3 \cos \varphi \sin \varphi \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{4} (B - A) \cos 2\lambda + \frac{1}{2} F \sin 2\lambda \right) 3 \cos^2 \varphi \right] \quad (1.41)$$

由(1.23)式可以写出地球二阶引力位

$$V_2 = \frac{GM}{d} \left[C_{20} \times \frac{1}{2} (1 - 3\sin^2 \varphi) + (C_{21} \cos \lambda + S_{21} \sin \lambda) \times 3 \cos \varphi \sin \varphi \right. \\ \left. + (C_{22} \cos 2\lambda + S_{22} \sin 2\lambda) \times 3 \cos^2 \varphi \right] \quad (1.42)$$

用 H 表示地球的动力学椭率

$$H = \frac{2C - (A + B)}{2C}$$

将(1.41)和(1.42)式进行比较,可以给出地球的二阶引力位系数与地球的二阶惯量矩和动力学椭率的关系,设 \bar{C}_{20} 是归一化球谐系数

$$\begin{cases} C = -\frac{R^2 M}{H} C_{20} = -\frac{\sqrt{5} R^2 M}{H} \bar{C}_{20} \\ A + B = -\frac{2(1-H)}{H} R^2 M C_{20} \\ A - B = 4R^2 M C_{22} \\ D = R^2 M C_{21} \\ E = R^2 M S_{21} \\ F = -2R^2 M S_{22} \end{cases} \quad (1.43)$$

设地球为旋转椭球体,则 $A = B, D = E = F = 0$, 利用 $\zeta = d \sin \varphi$, 由(1.41)式可导出

$$V_2 = \frac{3G(C-A)}{2d^5} \zeta^2 - \frac{G}{2d^3} (C-A) \quad (1.44)$$

1.3 地球的重力场

地球表面上的物体,除受引力作用之外,还受到地球自转离心力的作用。用 U 表示地球的自转离心力位

$$U = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi \quad (1.45)$$

故地球表面上某处的重力加速度

$$\mathbf{g} = \text{grad}(V + U) \quad (1.46)$$

若地球表面处处都是水,只考虑引力及离心力位的作用,当水面处于平衡状态静止不

动时,地球表面的形状为等位面,又被称为大地水准面,大地水准面的形状由下式定义

$$V + U = \text{常数} \quad (1.47)$$

设地球赤道半径为 a ,且地球为旋转椭球体,即 $A = B$ 。只考虑二阶位,由于在大地水准面上位是常数,取地球表面上任意点的位等于在赤道表面点上的位,可有

$$\frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3}(C - A)(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2 r^2}{2}\cos^2\varphi = \frac{GM}{a} + \frac{G}{2a^3}(C - A) + \frac{\omega^2 a^2}{2}$$

精确到二阶小量,由上式可解出矢径 r 。对大地水准面而言矢径 r 满足如下关系

$$r = a \left[1 + \frac{a^2}{r^2} n (1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{r^3}{2a^3} q \cos^2\varphi \right] / \left(1 + n + \frac{1}{2}q \right) \quad (1.48)$$

在这

$$\begin{cases} n = \frac{1}{2a^2M}(C - A) \\ q = \frac{\omega^2 a^3}{GM} \end{cases} \quad (1.49)$$

在(1.48)式中略去二阶以上小量,在等式右边取 $r = a$,可化简为

$$r = a \left[1 - \left(3n + \frac{1}{2}q \right) \sin^2\varphi \right] \quad (1.50)$$

由上式可知大地水准面的椭率 α

$$\alpha = 3n + \frac{1}{2}q \quad (1.51)$$

利用(1.46)式可给出重力加速度 g 的数值

$$\begin{aligned} g = & \frac{GM}{r^2} + \frac{3G}{2r^4} \left(C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3\sin^2\varphi) - \omega^2 r \cos^2\varphi \\ & + \frac{9G}{4r^4} (B - A) \cos^2\varphi \cos 2\lambda \end{aligned} \quad (1.52)$$

将 r 的关系式(1.48)代入,可得

$$g = \frac{GM}{a} \frac{1 + \frac{3a^2}{r^2} n (1 - 3\sin^2\varphi) - \frac{r^3}{a^3} q \cos^2\varphi}{\left[1 - \left(3n + \frac{1}{2}q \right) \sin^2\varphi \right]^2} \quad (1.53)$$

可化简为

$$g = g_0 (1 + \beta \sin^2\varphi) \quad (1.54)$$

在这

$$\begin{cases} g_0 = \frac{GM}{a} (1 + 3n - q) \\ \beta = \frac{5}{2}q - \alpha \end{cases} \quad (1.55)$$