SHIYANSHEJI YU SHUJUCHULI

试验设计与数据处理

何少华
文竹青 编著
娄涛

国防科技大学出版社
NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY PRESS

试验设计与数据处理

何少华　文竹青　娄　涛　编著

国防科技大学出版社
·湖南长沙·

图书在版编目(CIP)数据

试验设计与数据处理/何少华等编著.—长沙:国防科技大学出版社,2002.10

ISBN 7-81024-952-5

Ⅰ.试…　Ⅱ.何…　Ⅲ.①试验设计(数学)②数据处理　Ⅳ.O212.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 033310 号

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4572640 邮政编码:410073

E-mail:gfkdcbs@public.cs.hn.cn

责任编辑:何晋　责任校对:罗青

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本:787×1092　1/16　印张:16.5　字数:402 千

2002 年 10 月第 1 版第 1 次印刷　印数:1—1000 册

*

定价:24.00 元

前　言

试验设计方法始于20世纪20年代，至今已有70多年的历史。20世纪20年代，英国的生物统计学家及数学家费歇提出了方差分析法，最开始主要应用于农业、生物学、遗传学等方面，取得了大量的成果。用于田间试验，使农业大幅度增产，从而开创了一门新的应用技术学科。20世纪40年代末，日本的一大批研究人员对早期的方差分析方法进行了大量的研究，发现了它的一些不足之处，对其进行了改进，创建了正交试验设计方法，这种方法在日本得以迅速推广后，创造了极大的经济效益。我国从20世纪50年代开始研究这门学科，20世纪60年代末，中国科学院编制了一套适用的正交表，简化了试验程序与试验结果分析方法，20世纪70年代后，在正交设计理论研究上有了新的突破，不少设计和科研生产单位，应用正交试验设计方法，解决了许多问题，取得了明显的效果。

环境科学与工程和市政工程都是以试验为基础的学科，其工程设计、科学研究、生产管理都离不开试验，但目前，环境科学与工程、市政工程学科尚没有一本完整的关于试验设计与数据处理方面的书籍，虽可参考其它专门书籍，但其它书籍所列举的应用例子使本专业的技术人员难以理解，从而不利于本专业的技术人员对试验设计与数据处理方法的掌握与灵活应用。

本书主要介绍环境科学与工程学科、市政工程学科及相关学科在工程设计、科学研究、生产管理中常用的试验设计与数据处理方法，内容包括单因素实验设计方法、正交试验设计方法、方差分析、回归分析、误差分析等。本书内容丰富，总结了国内外最新试验设计与数据处理方法。书中所列举的例题与环境科学与工程学科、市政工程学科及相关学科专业知识紧密联系，对实际应用有较大的参考价值。书后的附表中列举了常用的正交表及其它统计数表，便于查阅与使用。

本书第一章由何少华、熊正为编写，第二章由何少华、黄仕元编写，第三章由何少华、文竹青编写，第四章由何少华、娄涛编写，第五章由何少华编写，第六章由何少华、文竹青编写，附录由何少华、娄涛编写。在本书的编写工作中，参考了大量的文献资料，谨向原作者表示最真诚的感谢。

本书可供环境科学与工程、市政工程、给水排水及其相关学科的科研、教学、设计人员阅读，亦可作为相关专业大学生、研究生的教材。

由于编者学识有限，不妥之处在所难免，敬请批评指正。

编著者

2002年7月

目　　录

第一章　常用分布

第二章　单因素试验设计与分析

第五章　误差分析

第六章　回归分析

第一章　常用分布

1.1 正态分布

1.1.1 正态分布的概率密度函数

设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\quad -\infty<x<\infty \tag{1-1}$$

则称 X 服从参数为 μ、σ 的正态分布或高斯分布。记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。参数 $\mu,\sigma>0$ 为常数。

正态分布概率密度曲线 $f(x)$ 的图形如图 1—1 所示。它具有如下特点：

(1)曲线关于 $x=\mu$ 对称，这表明对于任意 $h>0$

$$P\{\mu-h<X\leqslant\mu\}=P\{\mu<X\leqslant\mu+h\} \tag{1-2}$$

(2)它是单峰曲线，在 $x=\mu$ 处有极大值 $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$。$x$ 离 μ 越远，$f(x)$ 的值越小。这表明对于同样长度的区间，当区间离 μ 越远，X 落在这个区间上的概率越小(如图 1—2 所示的阴影面积越小)。

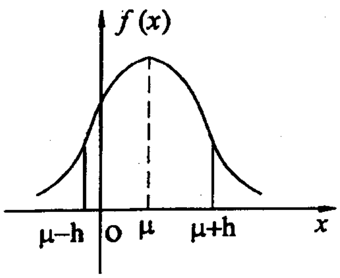

图 1—1　正态分布的概率密度曲线

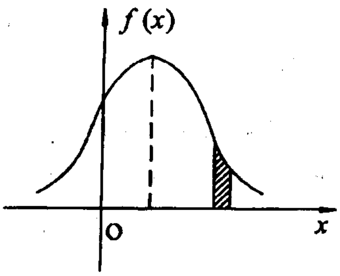

图 1—2　用正态分布概率密度曲线计算概率示意

(3)曲线有两个拐点，位于 $x=\mu\pm\sigma$ 处。

(4)当 $x\to\infty$ 时，曲线以 x 轴为渐近线。

(5)曲线与 x 轴所围面积为 1，代表各种样本值出现概率的总和。

(6)μ 决定曲线的中心位置，称为位置参数，σ 决定曲线的形状，称为形状参数。如果固定 σ，改变 μ 的值，则 $f(x)$ 的图形沿着 x 轴平行移动，而不改变其形状，如图 1—3 所示。如果固定 μ，改变 σ 的值，则曲线形状改变，而不改变曲线的中心位置，如图 1—4 所示。σ 越小时，由于极大值 $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ 增大，则曲线的图形越尖，因而 X 落在 μ 附近的概率越大。σ 越大

时，曲线越平缓。

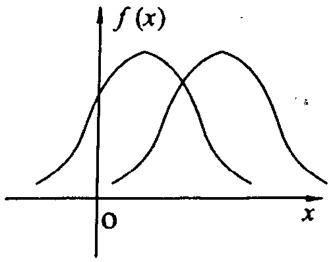

图1—3　μ对正态分布概率密度曲线位置的影响

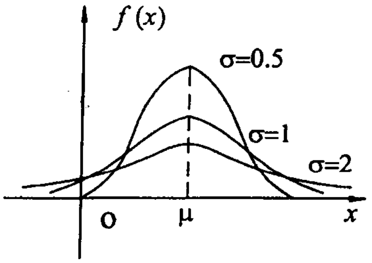

图1—4　σ对正态分布概率密度曲线形状的影响

1.1.2　正态分布的分布函数

如果随机变量 X 服从参数为 μ、σ 的正态分布，则其落在区间$(-\infty, x)$的概率即 X 的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}t \qquad (1-3)$$

它的图形如图 1—5 所示。

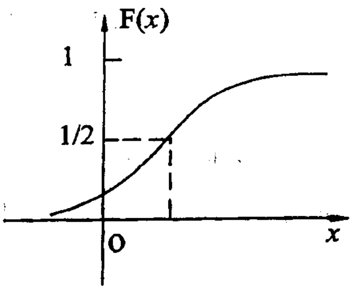

图1—5　正态分布的分布函数

1.1.3　标准正态分布

当正态分布概率密度函数中的参数 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时，称 X 服从标准正态分布。设其概率密度函数和分布函数分别用 $\varphi(x)$、$\Phi(x)$表示，则

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \qquad (1-4)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]\mathrm{d}t \qquad (1-5)$$

标准正态分布的 $\Phi(x)$函数值表见本书后面的附表 1，当计算标准正态分布的概率时可直接查用。

在进行标准正态分布的概率计算时，可利用其对称性，如对某一正数 z_0，下面的几个关系成立：

$$P[|X| > z_0] = 2P[X > z_0] = 2P[X < -z_0] = 2\Phi(-z_0) = 2 - 2\Phi(z_0)$$

$$P[-z_0 < X < z_0] = \Phi(z_0) - \Phi(-z_0) = 2\Phi(z_0) - 1 = 1 - 2\Phi(-z_0)$$

$$P[0 \leqslant X] = P[X \geqslant 0] = \frac{1}{2}$$

例 1－1 某随机变量 X 服从标准正态分布，试查表求该随机变量落在区间(1.2,2.2)的概率。

解 $P\{1.2<X<2.2\}=\Phi(2.2)-\Phi(1.2)=0.9861-0.8849=0.1012$

为了便于以后的应用，对于标准正态随机变量，可引入上 100α 百分位点的定义。设 $X\sim N(0,1)$，若 z_α 满足

$$P[X>z_\alpha]=\alpha,\quad 0<\alpha<1$$

则称点 z_α 为标准正态分布的上 100α 百分位点(如图 1－6)。例如，由查表可知，$z_{0.05}=1.645$，$z_{0.005}=2.57$，$z_{0.001}=3.10$。

对于标准正态分布，还可引入双侧 100α 百分位点的定义，设 $X\sim N(0,1)$，若满足

$$P[|X|>z_{\frac{\alpha}{2}}]=\alpha,\quad 0<\alpha<1$$

则称 $z_{\frac{\alpha}{2}}$ 点为标准正态分布的双侧 100α 百分位点(如图 1－7)。例如，$z_{\frac{0.05}{2}}=1.96$，$z_{\frac{0.005}{2}}=2.81$。

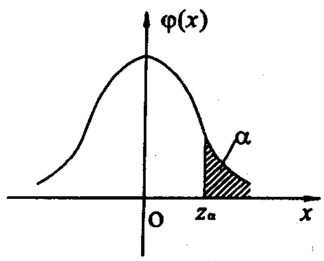

图 1－6 上 100α 百分位点示意图

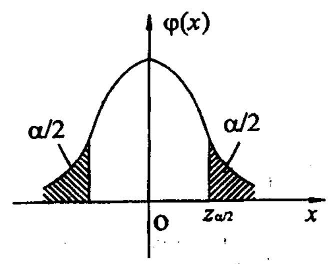

图 1－7 双侧 100α 百分位点示意图

1.1.4 利用标准正态分布的 $\Phi(x)$ 函数值表求正态分布的概率

若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 X 具有分布函数

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}t$$

则通过变量替换，可将 $F(x)$ 化成公式(1－5)所示的标准形式。转换过程如下：

由

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}t$$

得

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\exp\left[-\frac{\mu^2}{2}\right]\mathrm{d}u=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

则

$$P\{x_1<X<x_2\}=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)\qquad(1-6)$$

例 1－2 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试分别求得 X 落在 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$，$(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ 和 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 的概率。

解 $P\{\mu-\sigma<X<\mu+\sigma\}=\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)$

$=0.8413-0.1587=0.6826=68.26\%$

$$P\{\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\}=\left(\frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(2)-\Phi(-2)$$
$$=0.9772-0.0228=0.9544=95.44\%$$
$$P\{\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\}=\left(\frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(3)-\Phi(-3)$$
$$=0.99863-0.00135=0.9973=99.73\%$$

例 1－3　设随机变量 $X\sim N(1,4)$，试分别求得 X 落在(0,2.0)的概率。

解　$P\{0<X<2.0\}=\left(\frac{2.0-1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{0-1}{2}\right)=\Phi(0.5)-\Phi(-0.5)$
$$=0.6915-0.3085=0.3835=38.35\%$$

1.1.5　正态分布的数字特征——数学期望与方差

设 X 服从正态分布，其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\quad \sigma>0,\ -\infty<x<\infty$$

X 的数学期望为

$$\mathrm{E}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x \qquad (1-7)$$

令 $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$，得

$$\mathrm{E}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)\exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]\mathrm{d}t=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]\mathrm{d}t=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\mu$$

而方差

$$\mathrm{D}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x \quad (1-8)$$

令 $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$，得

$$\mathrm{D}(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]\mathrm{d}t=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right]=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\sigma^2$$

从上述推导可知：正态分布的概率密度函数中的两个基本参数 μ 和 σ^2 分别为随机变量的数学期望和方差，前者决定了正态分布的中心位置，后者决定了正态分布的形状。数学期望 μ 和方差 σ^2 都是总体的参数，数学期望 μ 又可称为总体均值。但在实际测量中，只能对样本进行有限次测量，不能得到总体均值 μ 和方差 σ^2，只能得到样本均值 $\bar{x}$ 和样本方差 S^2。那么样本均值 $\bar{x}$ 和样本方差 S^2 与总体均值 μ 和方差 σ^2 有何关系呢？这将在下一节讨论。

1.2　正态分布特征参数 μ 和 σ^2 的点估计

1.2.1　最大似然法

在正态总体中，随机抽取容量为 n 的样本，独立进行测量，得到 n 个测量值 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n$，若测试设备的最小测量单位为 Δx，则测定值 x_i 出现的概率 P_i 等于随机变量 X 落在中心为 x_i，幅度为 Δx 区间内的概率，即

$$P_i = P\left[\left(x_i - \frac{\Delta x}{2}\right) < X < \left(x_i + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] = f(x_i)\Delta x \tag{1-9}$$

因为 X 服从正态分布,其分布函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{1-10}$$

故

$$P_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\Delta x \tag{1-11}$$

则根据概率乘法定理,$x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n$ 同时出现的概率为

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^2 \prod_{i=1}^{n}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right](\Delta x)^n \tag{1-12}$$

上式可进一步整理成

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^2 \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2\right](\Delta x)^n \tag{1-13}$$

此概率值,对于不同的 μ 和 σ^2 值,有不同的数值,但必定能够找到一组($\hat{\mu}$,$\hat{\sigma}^2$),使此概率值达到最大,以此求出总体特征参数 μ 和 σ^2 的方法,称为最大似然法。

为便于计算,求式(1-13)的最大值时可以用以下表达式,令

$$L(\mu,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}\ln[P(x_i;\mu,\sigma)] \tag{1-14}$$

对于正态分布,将式(1-11)代入上式,可得

$$L(\mu,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}\ln\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\right\} \tag{1-15}$$

通过对数运算,整理上式可得:

$$L(\mu,\sigma) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - n\ln\sigma - \frac{n}{2}\ln(2\pi) \tag{1-16}$$

要使式(1-13)计算出来的概率达到最大,也就是要让式(1-16)的计算值达到最大。根据这一方法,就可以求得总体特征参数 μ 和 σ^2 的估计值。

1.2.2 数学期望(总体平均值)μ 的最大似然估计值和无偏估计值

求总体平均值 μ 的最大似然估计值时,首先将式(1-16)对总体平均值 μ 求偏导数,然后令此偏导数为零,即

$$\frac{\partial L(\mu,\sigma)}{\partial\mu} = 0 \tag{1-17}$$

将式(1-16)代入上式,得

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} - n\ln\sigma - \frac{n}{2}\ln(2\pi)\right] = 0 \tag{1-18}$$

解偏微分方程(1-18)式,得

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = \frac{n}{\sigma^2}(\overline{x}-\mu) = 0 \tag{1-19}$$

整理上式,可得到母体平均值 μ 的最大似然估计值为

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1-20}$$

样本算术平均值 $\bar{x}$ 同时是总体均值 μ 的无偏估计值，所谓无偏估计值是说由测定值计算的估计值 $\bar{x}$ 离被估计值很近，由不同样本得到的估计值 $\bar{x}$ 在被估计值 μ 附近波动，大量的估计值的平均值能够消除估计值对被估计值的偏离，而不是说用无偏估计值 $\bar{x}$ 来估计 μ 不产生偏差。

在消除系统误差的前提下，随机变量 X 的测量值 $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n$ 都是随机变量 X 的估计值，在总体均值附近波动，故随机变量 X 的数学期望 $\mathrm{E}(X)=\mu$，样本算术平均值 $\bar{x}$ 的数学期望

$$\mathrm{E}(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu \tag{1-21}$$

故 $\hat{\mu}=\bar{x}$ 是 μ 的无偏估计值。

1.2.3 总体方差 σ^2 的最大似然估计值

求总体方差 σ^2 的最大似然估计值时，首先将式(1－16)对 σ 求偏导数，然后令此偏导数为零，即

$$\frac{\partial L(\mu,\sigma)}{\partial \sigma} = 0 \tag{1-22}$$

将式(1－16)代入上式，得

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} - n\ln\sigma - \frac{n}{2}\ln(2\pi)\right] = 0 \tag{1-23}$$

解上述偏微分方程(1－18)式，得

$$\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) - \frac{n}{2\sigma^2} = 0 \tag{1-24}$$

整理上式，可得到母体方差 σ^2 的最大似然估计值为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \tag{1-25}$$

由于 $\hat{\mu}=\bar{x}$ 是 μ 的无偏估计值，故上式可转换成

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \tag{1-26}$$

1.2.4 总体方差 σ^2 的无偏估计值

总体方差的最大似然估计值 $\hat{\sigma}^2$ 是总体方差 σ^2 的渐近无偏估计值，而不是无偏估计值。这是因为 $\hat{\sigma}^2$ 也是一个统计量，且它的期望值为 $\frac{n-1}{n}\sigma^2$。现证明如下：

$$\mathrm{E}(\hat{\sigma}^2) = \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right] = \frac{1}{n}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\mu)^2 - 2(x_i-\bar{x})(\bar{x}-\mu) + (\bar{x}-\mu)^2\right]\right] \tag{1-27}$$

由于 $\mathrm{E}[(x_i-\mu)^2]=\sigma^2$，$\mathrm{E}[(x_i-\bar{x})(\bar{x}-\mu)]=\frac{\sigma^2}{n}$，$\mathrm{E}[(\bar{x}-\mu)^2]=\frac{\sigma^2}{n}$，则从(1－28)可得：

$$\mathrm{E}(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\left[n\sigma^2 - 2\sigma^2 + \sigma^2\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \tag{1-28}$$

由于 $E(\hat{\sigma}^2)\neq\sigma^2$，可知 $\hat{\sigma}^2$ 不是总体方差 σ^2 的无偏估计值。为了求得总体方差 σ^2 的无偏估计值，取

$$S^2=\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 \tag{1-29}$$

将式(1—26)代入式(1—29)可得：

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \tag{1-30}$$

式(1—30)即为样本方差的计算公式。从上述分析中可以看出，样本方差 S^2 是总体方差 σ^2 的无偏估计值。

样本方差的平方根叫做样本标准差，即

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \tag{1-31}$$

1.2.5 样本平均值的方差

样本平均值 $\bar{x}$ 是一个统计随机变量，它可由样本试验值求得。但由于 $\bar{x}$ 是随机变量，还必须知道 $\bar{x}$ 的散布值。

$$\sigma_{\bar{x}}^2=D(\bar{x}) \tag{1-32}$$

因为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

将上式代入(1—32)可得：

$$\sigma_{\bar{x}}^2=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(x_i) \tag{1-33}$$

式中，$D(x_i)$为试验值 x_i 用方差表示的散布，故 $D(x_i)$也称为散度，根据定义

$$D(x_i)=\sigma^2 \tag{1-34}$$

将上式代入式(1—33)可得：

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n} \tag{1-35}$$

因为样本方差 S^2 是总体方差 σ^2 的无偏估计值，将式(1—30)代入上式得到样本平均值的方差：

$$S_{\bar{x}}^2=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \tag{1-36}$$

则样本平均值的标准差为：

$$S_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \tag{1-37}$$

1.2.6 估计值好坏的评选标准

前面介绍了用样本值来估计总体参数的方法。应该指出，用不同的估计方法得到的估计值，其效果是不同的。由于估计量本身就是一个随机变量，因而可用估计量的一致性、无偏性、有效性来进行判别和评定。

1. 一致性

当样本容量趋于无穷大时,样本的数字特征依概率收敛于相应总体的数字特征,即随着样本容量的增大,估计值与待估参数接近的可能性就越大,这称为一致性。假设 λ 为待估参数,$\hat{\lambda}$ 为估计值,ε 为一致性精度所允许的足够小量,则一致性要求可写成

$$\lim_{n\to\infty} P[|\hat{\lambda}-\lambda|>\varepsilon]=0 \tag{1-38}$$

很明显,用容量较大的样本作出的估计比用容量较小的样本作出的估计要更为精确。样本的算术平均值 $\bar{x}$ 是总体均值 μ 的一致性估计,样本方差 S^2 是总体方差 σ^2 的一致性估计。

2. 无偏性

无偏性要求估计值在待估参数的真值附近波动,从分析测试的观点看,无偏性意味着测定的准确度。无偏性要求可写成

$$E(\hat{\lambda})=\lambda \tag{1-39}$$

前面的分析已经证明,样本的算术平均值 $\bar{x}$ 是总体均值 μ 的无偏性估计,样本方差 S^2 是总体方差 σ^2 的无偏性估计,但 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ 不是总体方差 σ^2 的无偏估计值。

3. 有效性

方差越小,估计值接近待估参数的概率越大,因此,在众多的无偏估计值中,方差越小的无偏估计值即为较好的估计值。若 $\hat{\lambda}_1$ 和 $\hat{\lambda}_2$ 都是 λ 的无偏估计值,如果

$$D(\hat{\lambda}_1)<D(\hat{\lambda}_2)$$

则称 $\hat{\lambda}_1$ 比 $\hat{\lambda}_2$ 有效。也就是说,估计值的方差越小越有效。具有最小方差的无偏估计值称为有效估计值。从分析测试的观点来看,有效估计值要求具有较好的精密度,因此用多次测定的平均值 $\bar{x}$ 比用单次测量值作为总体均值 μ 的估计值更有效。

例 1—4 对某物理量进行 10 次测量,测量值如下表所示,试求测量列的平均值、标准差和平均值的标准差。

解 依计算公式的内容,列表进行计算。

序号	x_i	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$
1	52.40	−0.04	0.0016
2	52.50	+0.06	0.0036
3	52.38	−0.06	0.0036
4	52.48	+0.04	0.0016
5	52.42	−0.02	0.0004
6	52.46	+0.02	0.0004
7	52.45	+0.01	0.0001
8	52.43	−0.01	0.0001
9	52.44	0.00	0.0000
10	52.44	0.00	0.0000
和	524.4	0.00	0.0114

(1)测量列平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{524.4}{10} = 52.44$$

(2)求测量列的标准差

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{0.0114}{9}} = 0.036$$

(3)求测量平均值的标准差

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{0.036}{\sqrt{10}} = 0.011$$

1.3 χ^2 分布

不管是无限总体,还是有限总体,都需要采用抽样检验,然后通过样本测量值来了解样本分布,并由此去推断总体。样本统计量的分布又称为抽样分布。

1.3.1 样本平均值的分布

假设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n$ 是它的一个样本,则样本算术平均值 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 也是一个随机变量,它的数学期望和方差分别按下述两式计算:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

亦即

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \tag{1-40}$$

或者

$$n\bar{X} \sim N(\mu, n\sigma^2) \tag{1-41}$$

也就是说,统计量 $\bar{X}$ 服从参数为 $\mu, \frac{\sigma^2}{n}$ 的正态分布。须注意的是,$E(\bar{X})$ 与总体均值 μ 相等,但 $D(\bar{X})$ 只有总体方差 σ^2 的 n 分之一。故 n 越大,$\bar{X}$ 越向总体均值 μ 集中。

本书中的几个抽样分布都是对正态总体而言的,由于正态总体是最常见的总体,所以它们的应用非常广泛。

1.3.2 χ^2 分布的基本概念

1990 年 Pearson 首先推导出 χ^2 分布,在中文中 χ^2 分布也被称为卡方分布。它是一个抽样分布。

若 $X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n$ 是正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 与 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 分别为样本平均值与样本方差,则 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立。设