

初 等 数 学 研 究

算 术 原 理

(第 二 分 册)

安 諫 庵 著

吉 林 人 民 出 版 社

初 等 数 学 研 究

算 术 原 理

(第 二 分 册)

安 諫 庵 著

吉 林 人 民 出 版 社

1 9 5 7 • 長 春

初等数
学研究 算术原理 (第二分册) 安諫庵 著

吉林人民出版社出版 (长春市斯大林大街) 吉林省书刊出版业营业登记证出字第1号

长春新生企业公司印刷 新华书店吉林省分店发行

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ 印张: $15 \frac{1}{4}$ 字数: 405,000字 印数: 7,000册

1957年8月第1版

1957年8月第1版第1次印刷

统一书号: 13091·12 定价(8): 1.45元

目次

第二編

第七章 定理.....	(1)
第八章 定理.....	(22)
第九章 定理.....	(53)
第十章 定理.....	(73)
第十一章 定理.....	(96)
第十二章 定理.....	(125)
第十三章 定理.....	(150)
第十四章 定理.....	(175)
第十五章 定理.....	(209)

第 二 編

(I) 与 (II) 互相配合共九章，第七章——第十五章。

第七章 定 理

§ 73. (A) 中的四种关系与 (D) 中的四种关系互相配合而得到的定理。

(A) 二变量或二数間的直接关系:

- (一) 和——A 与 B 的和为 S ,
- (二) 差——A 比 B 多 d (或少 d),
- (三) 商——A 为 B 的 m 倍,
- (四) 商余——A 比 B 的 m 倍多 f (或少 f).

(D) 二变量或二数間の半間接关系:

- (十三) 和——A 与 B' 的和为 S ,
- (十四) 差——A 比 B' 多 d (或少 d),
- (十五) 商——A 为 B' 的 m 倍,
- (十六) 商余——A 比 B' 的 m 倍多 f (或少 f).

附出广义算术的关系——改变和的关系为商余形式的关系。

- (i) 已知 A 与 B 的和为 S , 则改为: A 比 B 的 (-1) 倍多 S .
- (ii) 已知 A 与 B' 的和为 S , 则改为: A 比 B' 的 (-1) 倍多 S .
- (iii) 已知 A' 与 B' 的和为 S , 则改为: A' 比 B' 的 (-1) 倍多 S .

多变量間算术关系的傳遞律

(G) 多变量关系間, 商 (倍数) 与商 (倍数) 的傳遞律。

- (1) 若 A 为 B 的 m_1 倍, B 为 C 的 m_2 倍; 则 A 为 C 的 $m_1 m_2$ 倍。
- (2) 若 A 为 B 的 $\frac{1}{m_1}$ 倍, B 为 C 的 $\frac{1}{m_2}$ 倍; 则 A 为 C 的 $\frac{1}{m_1 m_2}$ 倍。
- (3) 若 A 为 B 的 m_1 倍, B 为 C 的 $\frac{1}{m_2}$ 倍; 则 A 为 C 的 $\frac{m_1}{m_2}$ 倍。

(H) 多变量关系間, 商余与商的傳遞律。

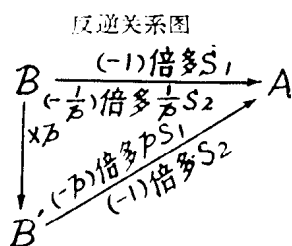
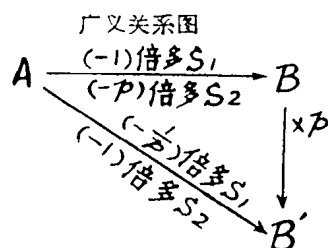
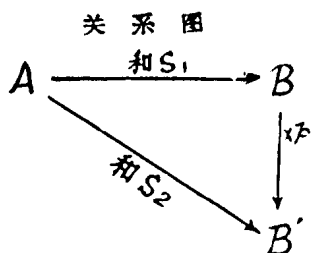
- (1) 若 A 比 B 的 m 倍多 f (或少 f), B 为 C 的 n 倍; 则 A 比 C 的 mn 倍多 f (或少 f).
- (2) 若 A 比 B 的 $\frac{1}{m}$ 倍多 f (或少 f), B 为 C 的 $\frac{1}{n}$ 倍; 则 A 比 C 的 $\frac{1}{mn}$ 倍多 f (或少 f).
- (3) 若 A 比 B 的 m 倍多 f (或少 f), B 为 C 的 $\frac{1}{n}$ 倍; 则 A 比 C 的 $\frac{m}{n}$ 倍多 f (或少 f).

以上两个傳遞律与以前的傳遞律, 都必须灵活的去掌握。

由 (A) 中的四种关系与 (D) 中的四种关系互相配合, 共得十六种不同的情形, 其中选出九种为定理。其关系图都是三角形, 包含兩条关系綫。每个定理都有四个不同的結論。

§ 74. 定理 41. 由 (一) 与 (十三) 配合而得。

設关系数字 S_1, S_2 , 参变数 P 及二变量 A, B 都是实数; 又設 A 与 B 的和为 S_1 . 当 B 乘



以 p 时, A 与 B' 的和为 S_2 . 则有二个结论或四个结论, 其中主要的两个结论为:

- (1) $B = f_1(S_1, S_2, p) = (S_2 - S_1) \div (p - 1)$;
- (2) $B = f_2(S_1, S_2, p) = (S_2 - S_1) \div (1 - \frac{1}{p}) \times \frac{1}{p}$;
- (3) — (4) 从略。

证明: 已知 A 的 1 倍与 B 的 1 倍的和为 S_1 ; 又 A 的 1 倍与 B 的 p 倍的和为 S_2 . $\therefore S_2 - S_1$ 为 B 的 $(p - 1)$ 倍。我们有

$$B = (S_2 - S_1) \div (p - 1) \dots\dots\dots (1)$$

又 已知 B' 为 B 的 p 倍, 则 B 为 B' 的 $\frac{1}{p}$ 倍。于是, A 的 1 倍与 B' 的 1 倍的和为 S_2 ; 又 A 的 1 倍与 B' 的 $\frac{1}{p}$ 倍的和为 S_1 . $\therefore S_2 - S_1$ 为 B' 的 $(1 - \frac{1}{p})$ 倍。我们有

$$B = (S_2 - S_1) \div (1 - \frac{1}{p}) \times \frac{1}{p} \dots\dots\dots (2)$$

由广义算术关系出发可以得出四个结论。

已知 A 与 B 的和为 S_1 , 则改为 A 比 B 的 (-1) 倍多 S_1 。

又知 A 与 B' 的和为 S_2 , 则改为 A 比 B' 的 (-1) 倍多 S_2 。

由 A 比 B' 的 (-1) 倍多 S_2 , B' 为 B 的 p 倍, 则 A 比 B 的 $(-p)$ 倍多 S_2 。

设 $p > 1 \quad \therefore -p < -1$, 因而 $S_2 > S_1$ (商余的基本性质)。根据商余与商余原理, 则有

$$B = (S_2 - S_1) \div [-1 - (-p)] \dots\dots\dots (i) \text{ 与 } (1) \text{ 相同。}$$

由 A 比 B 的 (-1) 倍多 S_1 , B 为 B' 的 $\frac{1}{p}$, 则 A 比 B' 的 $(-\frac{1}{p})$ 倍多 S_1 。

$$\therefore -p < -1 \quad \therefore -\frac{1}{p} > -1, \text{ 因而 } S_2 > S_1.$$

根据相同的原理, 则有

$$B = (S_2 - S_1) \div [-\frac{1}{p} - (-1)] \times \frac{1}{p} \dots\dots\dots (ii) \text{ 与 } (2) \text{ 相同。}$$

由 B 为 B' 的 $\frac{1}{p}$ 倍, B' 比 A 的 (-1) 倍多 S_2 , 则 B 比 A 的 $(-\frac{1}{p})$ 倍多 $\frac{S_2}{p}$;

又 B 比 A 的 (-1) 倍多 $S_1 \quad \therefore -\frac{1}{p} > -1 \quad \therefore S_1 > \frac{S_2}{p}$. 同理, 则有

$$A = (S_1 - \frac{S_2}{p}) \div [-\frac{1}{p} - (-1)], \text{ 即}$$

$$A = (S_1 - \frac{S_2}{p}) \div (1 - \frac{1}{p}) \dots\dots\dots (iii)$$

由 B' 为 B 的 p 倍, B 比 A 的 (-1) 倍多 S_1 , 则 B' 比 A 的 $(-p)$ 倍多 pS_1 又 B' 比 A 的 (-1) 倍多 S_2 ;

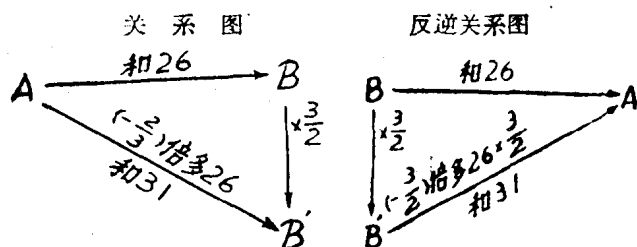
$$\therefore -1 > -p \quad \therefore pS_1 > S_2. \text{ 同理, 则有 } A = (pS_1 - S_2) \div [-1 - (-p)], \text{ 即}$$

$$A = (pS_1 - S_2) \div (p - 1) \dots\dots\dots (iv)$$

根据一般的算术关系, 只能决定两个结论; 如果引用广义的算术关系, 就可以求出此定理应有的结论数目。

【例题201】某铁工厂有师徒两工人, 他们每天所完成的工作共计 26 件。后来徒弟努力学习他师傅的先进操作方法, 每天所完成的工作, 已提高 50%。于是他们师徒二人每天可以完成 31 件。问师徒二人原来每天各完成多少件?

$$\text{解: } 50\% + 100\% = 150\% = \frac{150}{100} = \frac{3}{2}.$$



已知A与B的和为26, 又知A与B'的 $\frac{3}{2}$ 倍的和为31. 于是 $31-26$ 为B'的 $(\frac{3}{2}-1)$ 倍.

$$\therefore \text{徒弟原来每天完成的件数为} \\ (31-26) \div (\frac{3}{2}-1) = 5 \div \frac{1}{2} \\ = 5 \times 2 = 10 \text{件.}$$

师傅原来每天完成的件数为 $26-10=16$ 件.

又知B'为B的 $\frac{3}{2}$ 倍, 则B为B'的 $\frac{2}{3}$. 则有, A与B'的和为31, 又A与B'的 $\frac{2}{3}$ 的和为26. 于是 $31-26$ 为B'的 $(1-\frac{2}{3})$ 倍,

$$\therefore \text{徒弟原来每天完成的件数为} (31-26) \div (1-\frac{2}{3}) \times \frac{2}{3} = 5 \div \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 5 \times 3 \times \frac{2}{3} = 10 \text{件.}$$

师傅原来每天完成的件数为 $31-10=21$ 件.

按广义算术关系的解法:

由A比B的 (-1) 倍多26, B为B'的 $\frac{2}{3}$, 则A比B'的 $(-\frac{2}{3})$ 倍多26;

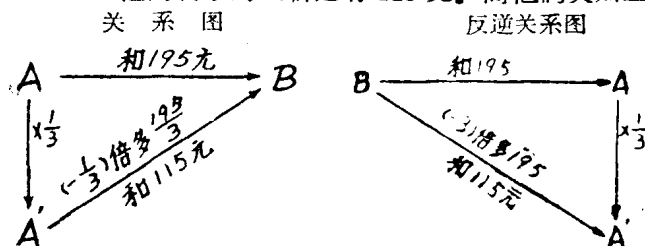
又知A与B'的和为31. 根据和与商余原理, 则有

$$\text{徒弟原来每天完成的件数为} (31-26) \div [1+(-\frac{2}{3})] \times \frac{2}{3} = 5 \div \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 5 \times 3 \times \frac{2}{3} \\ = 10 \text{件.}$$

师傅原来每天完成 $31-10=21$ 件.

【例题202】某学校有夫妇二位教师, 共领工薪195元. 男教师领薪后以其工薪的 $\frac{2}{3}$ 做了一套西服.

他们剩余的工薪还有115元. 问他们夫妇二人的工薪每月各多少元?



解: 花去其工薪的 $\frac{2}{3}$, 还剩其 $\frac{1}{3}$.

已知A与B的和为195元, 又A的 $\frac{1}{3}$ 与B的和为115元, 于是 $195-115$ 为A的 $(1-\frac{1}{3})$ 倍, 则有

$195-115$ 为A的 $(1-\frac{1}{3})$ 倍, 则有

$$\text{男教师每月工薪为} (195-115) \div (1-\frac{1}{3}) = 80 \div \frac{2}{3} = 80 \times \frac{3}{2} = 40 \times 3 = 120 \text{元.}$$

女教师每月工薪为 $195-120=75$ 元.

又A'与B的和为115元, A'的3倍与B的和为195元, 于是 $195-115$ 为A'的 $(3-1)$ 倍, 则有

$$\text{男教师每月工薪为} (195-115) \div (3-1) \times 3 = 80 \div 2 \times 3 = 120 \text{元.}$$

女教师每月工薪为 $115-40=75$ 元.

按广义算术原理的解法:

A'为A的 $\frac{1}{3}$, A比B的 (-1) 倍多195, 则A'比B的 $(-\frac{1}{3})$ 倍多 $\frac{195}{3}$;

又知A'与B的和为115元. 根据和与商余原理, 则有

$$\text{女教师每月工薪为} (115-\frac{195}{3}) \div [1+(-\frac{1}{3})] = (115-65) \div (1-\frac{1}{3}) = 75 \text{元.}$$

男教师每月工薪为 $195-75=120$ 元.

又A为A'的3倍, A'比B的 (-1) 倍多115元, 则A比B的 (-3) 倍多 115×3 .

又知A与B的和为195元根据和与商余原理, 则有

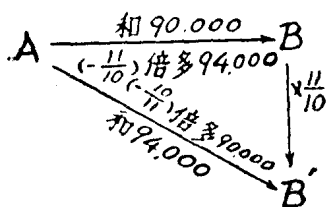
$$\text{女教师每月工薪为} (195-115 \times 3) \div [1+(-3)] = -150 \div (-2) = 150 \div 2 = 75 \text{元.}$$

男教师每月工薪为 $(115-75) \times 3 = 40 \times 3 = 120$ 元。

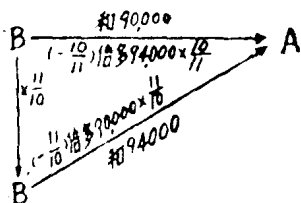
【例题203】有甲乙两个合作社于1954年，两社的总产值为90,000元至1955年甲社的总产值与1954年的相等，而乙社的总产值比1954年提高10%。于是两社在1955年的总产值为94,000元。问1954年甲乙两社的总产值各为多少元？

解： $10\% + 100\% = 110\% = \frac{110}{100} = \frac{11}{10}$ 。

关系图



反逆关系图



(I) 由A比B'的 (-1) 倍多94,000, B'为B的 $\frac{11}{10}$ 倍,

则A比B的 $(-\frac{11}{10})$ 倍多94,000。

又知A与B的和为90,000, 根据和与商余原理, 则有乙社的总产值为 $(90,000 - 94,000) \div [1 + (-\frac{11}{10})]$

$$= -4000 \div (-\frac{1}{10}) = 4000 \div \frac{1}{10} = 40,000 \text{ 元。}$$

甲社的总产值为 $90,000 - 40,000 = 50,000$ 元。

(II) A比B的 (-1) 倍多90,000, B为B'的 $\frac{10}{11}$ 倍, 则A比

B'的 $(-\frac{10}{11})$ 倍多90,000; 又知A与B'的和为94,000。

同理, 则有

$$\begin{aligned} \text{乙社的总产值为 } & (94000 - 90000) \div [1 + (-\frac{10}{11})] \times \frac{10}{11} \\ & = 4000 \div \frac{1}{11} \times \frac{10}{11} = 40,000 \text{ 元。} \end{aligned}$$

甲社的总产值为 $94000 - 44000 = 50,000$ 元。他法从略。

§ 75. 定理42. 由关系(一)与(十四)配合而得。

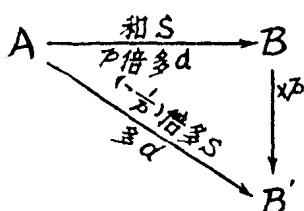
设关系数字S、d, 参变数p及二变量A、B都是实数; 又设A与B的和为S, 当B乘以p时, A比B'多d。则有四个结论, 其中主要的两个结论为:

(1) $B = f(S, d, p) = (S - d) \div (1 + p);$

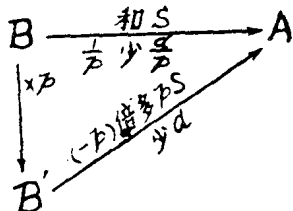
(2) $A = g(S, d, p) = (S + \frac{d}{p}) \div (1 + \frac{1}{p});$

(3) — (4) 从略。

关系图



反逆关系图



证明: (I) 已知A比B'多d, B'

为B的p倍, 则A比B的p倍多d;

又知A与B的和为S。根据和与商余原理, 则有

$$B = (S - d) \div (1 + p) \dots \dots \dots (1)$$

反之, B比A的 $\frac{1}{p}$ 少 $\frac{d}{p}$, 其和为S。

同理

$$A = (S + \frac{d}{p}) \div (1 + \frac{1}{p}) \dots \dots \dots (2)$$

(II) 已知A比B的 (-1) 倍多S, B为B'的 $\frac{1}{p}$, 则A比B'的 $(-\frac{1}{p})$ 倍多S;

又知A比B'多d, 设 $p > 1$, $-\frac{1}{p} < +1$, $\therefore S > d$ 。根据差与商余原理, 则有

$$B' = (S - d) \div [1 - (-\frac{1}{p})], \text{ 即}$$

$$B = (S - d) \div (1 + \frac{1}{p}) \times \frac{1}{p} \dots \dots \dots (3)$$

反之, B'比A的 $(-p)$ 倍多pS, 又知B'比A少d同理, 则有

$$A = (pS + d) \div [1 - (-p)], \text{ 即}$$

$$A = (pS + d) \div (1 + p) \dots\dots\dots (4)$$

【例题204】某仓库里有大小两个仓，共存大米380石。如果小仓的米数增多了50%以后，大仓的存米还比小仓的存米多30石。问大小二仓原来各存米多少？

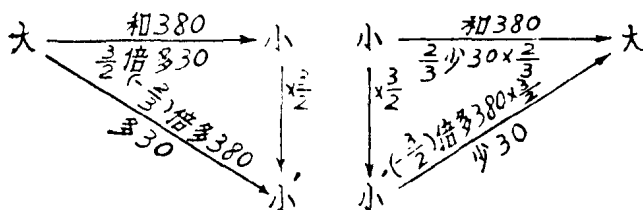
解：(I) $50\% + 100\% = 150\% = \frac{150}{100} = \frac{3}{2}$ 。已知大仓比小仓'多30，小仓'为小仓的 $\frac{3}{2}$ ，则大

仓比小仓的 $\frac{3}{2}$ 多30；又知大仓与小仓的和为380。根据和与商余原理，则有

$$(1) \text{ 小仓的存米为 } (380 - 30) \div (1 + \frac{3}{2}) = 350 \div \frac{5}{2} = 350 \times \frac{2}{5} = 70 \times 2 = 140 \text{ 石。}$$

关系图

反逆关系图



反之，小仓比大仓的 $\frac{2}{3}$ 少 $30 \times \frac{2}{3}$ ，

又知其和为380。同理，则有

(2) 大仓的存米为

$$(380 + 30 \times \frac{2}{3}) \div (1 + \frac{2}{3}) = 400 \div \frac{5}{3} = 400 \times \frac{3}{5} = 240 \text{ 石。}$$

(II) 大仓比小仓的 (-1) 倍多380，小仓为小仓'的 $\frac{2}{3}$ ，则大仓比小仓'的 $(-\frac{2}{3})$ 倍多380；

又知大仓比小仓'多30。同理，则有

$$(3) \text{ 小仓的存米为 } (380 - 30) \div [1 - (-\frac{2}{3})] \times \frac{2}{3} = 350 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = 140 \text{ 石。}$$

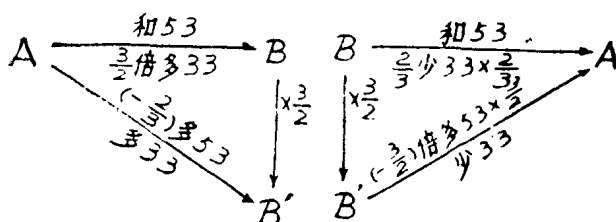
反之，小仓'比大仓的 $(-\frac{3}{2})$ 多 $380 \times \frac{3}{2}$ ，又知小仓'比大仓少30。同理，则有

$$(4) \text{ 大仓的存米为 } (380 \times \frac{3}{2} + 30) \div [1 - (-\frac{3}{2})] = 600 \div \frac{5}{2} = 600 \times \frac{2}{5} = 240 \text{ 石。}$$

【例题205】一火轮船在长江中往返于A、B两码头之间。当顺流而下时其每小时的速度为53里/时；当逆流而上时，水流又每小时增速50%，于是其速度为33里/时。问此船在静水中每小时的速度多少？水流原来每小时的速度多少？

关系图

反逆关系图



解：(I) $50\% + 100\% = \frac{3}{2}$ 。

已知A比B'多33，B'为B的 $\frac{3}{2}$ ，则A

比B的 $\frac{3}{2}$ 倍多33，又知A与B的和为53。根据和与商余原理，则有

$$(1) \text{ 水速为 } (53 - 33) \div (1 + \frac{3}{2}) = 20 \div \frac{5}{2} = 20 \times \frac{2}{5} = 8 \text{ 里/时。}$$

反之，B比A的 $\frac{2}{3}$ 少 $33 \times \frac{2}{3}$ ，又其和为53。同理，则有

$$(2) \text{ 船静水速为 } (53 + 33 \times \frac{2}{3}) \div (1 + \frac{2}{3}) = 75 \div \frac{5}{3} = 75 \times \frac{3}{5} = 15 \times 3 = 45 \text{ 里/时。}$$

(II) 已知A比B的 (-1) 倍多53，B为B'的 $\frac{2}{3}$ ，则A比B'的 $(-\frac{2}{3})$ 多53；又知A比B'多33。同理，则有

$$(3) \text{ 水速为 } (53 - 33) \div [1 - (-\frac{2}{3})] \times \frac{2}{3} = 20 \div \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} = 20 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = 8 \text{ 里/时。}$$

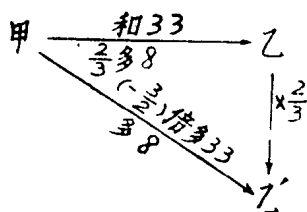
反之，B'比A的 $(-\frac{3}{2})$ 倍多 $53 \times \frac{3}{2}$ ，又知B'比A少33。同理，则有

$$(4) \text{ 船静水速为 } (53 \times \frac{3}{2} + 33) \div [1 - (-\frac{3}{2})] = \frac{225}{2} \div \frac{5}{2} = 45 \text{ 里/时。}$$

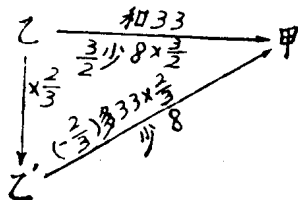
【例题206】从合作社里买来两瓶酒，共计33两。从乙瓶里喝去其 $\frac{1}{3}$ ，剩余的酒比甲瓶的酒少8

兩。問甲乙二瓶原有酒多少？

关系图



反逆关系图



$$\text{解: } 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

(I) 已知甲比乙'多8, 乙'为乙的 $\frac{2}{3}$, 则甲比乙的 $\frac{2}{3}$ 多

8; 又知和为33. 根据和与商余原理, 则有

(1) 乙瓶的酒为

$$(33 - 8) \div (1 + \frac{2}{3})$$

$$= 25 \div \frac{5}{3} = 25 \times \frac{3}{5} = 15 \text{ 兩.}$$

反之, 乙比甲的 $\frac{3}{2}$ 倍少 $8 \times \frac{3}{2}$, 和为33. 同理, 则有

$$(2) \text{ 甲瓶的酒为 } (33 + 8 \times \frac{3}{2}) \div (1 + \frac{3}{2}) = 45 \div \frac{5}{2} = 45 \times \frac{2}{5} = 18 \text{ 兩.}$$

(II) 甲比乙的 (-1) 倍多33, 乙为乙'的 $\frac{3}{2}$, 则甲比乙'的 $(-\frac{3}{2})$ 倍多33. 同理,

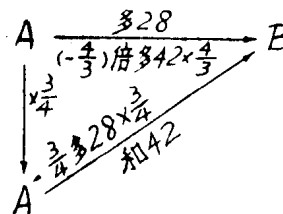
$$(3) \text{ 乙瓶的酒为 } (33 - 8) \div [1 - (-\frac{3}{2})] \times \frac{3}{2} = 25 \div \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} = 25 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{2} = 15 \text{ 兩.}$$

反之, 乙'比甲的 $(-\frac{2}{3})$ 倍多 $33 \times \frac{2}{3}$, 又知乙'比甲少8. 根据差与商余原理,

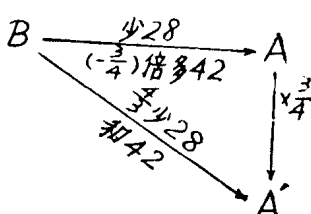
$$(4) \text{ 甲瓶的酒为 } (33 \times \frac{2}{3} + 8) \div [1 - (-\frac{2}{3})] = 30 \div \frac{5}{3} = 30 \times \frac{3}{5} = 18 \text{ 兩.}$$

【例题207】某学校的一班学生, 男生比女生多28名. 根据学年的考试成绩, 女生全部都列入优良而男生还有25%未能够得到优良成绩. 全班优良学生共计42名. 問此班男女生各几名?

关系图



反逆关系图



$$\text{解: } 100\% - 25\% = 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}.$$

(I) 已知A'为A的 $\frac{3}{4}$, A比B多28,

则A'比B的 $\frac{3}{4}$ 多 $28 \times \frac{3}{4}$; 又知A'

与B的和为42. 根据和与商余原理, 则有

$$(1) \text{ 女生数为 } (42 - 28 \times \frac{3}{4}) \div (1 + \frac{3}{4}) = 21 \div \frac{7}{4} = 21 \times \frac{4}{7} = 12 \text{ 名.}$$

反之, B比A'的 $\frac{4}{3}$ 少28, 又其和为42. 同理, 则有

$$(2) \text{ 男生数为 } (42 + 28) \div (1 + \frac{4}{3}) \times \frac{4}{3} = 70 \div \frac{7}{3} \times \frac{4}{3} = 70 \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{3} = 40 \text{ 名.}$$

(II) A为A'的 $\frac{4}{3}$, A'比B的 (-1) 倍多42, 则A比B的 $(-\frac{4}{3})$ 倍多 $42 \times \frac{4}{3}$; 又知A比B多28. 根据差与商余原理, 则有

$$(3) \text{ 女生数为 } (42 \times \frac{4}{3} - 28) \div [1 - (-\frac{4}{3})] = 28 \div \frac{7}{3} = 28 \times \frac{3}{7} = 12 \text{ 名.}$$

反之, B比A的 $(-\frac{3}{4})$ 倍多42, 又B比A少28. 同理, 则有

$$(4) \text{ 男生数为 } (42 + 28) \div [1 - (-\frac{3}{4})] = 70 \div \frac{7}{4} = 70 \times \frac{4}{7} = 40 \text{ 名.}$$

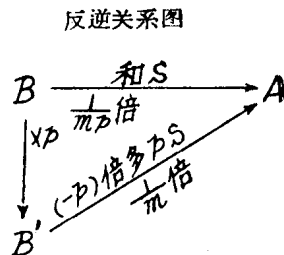
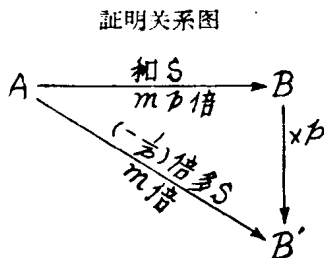
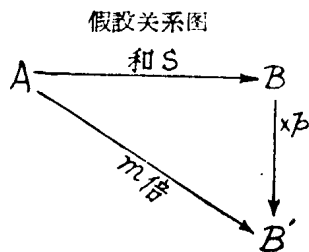
§ 76. 定理43. 由关系(一)与(十五)配合而得.

設关系数字S、m, 参变数p及二变量A、B都是实数; 又設A与B的和为S. 当B乘以p时, A为B'的m倍. 則有四个結論, 其中主要的两个結論为:

$$(1) B = f(S, m, p) = S \div (1 + mp);$$

$$(2) A = g(S, m, p) = S \div (1 + \frac{1}{mp});$$

(3) — (4) 从略。



证明: (I) 已知 A 为 B' 的 m 倍, B' 为 B 的 p 倍, 则 A 为 B 的 mp 倍;

又知 A 与 B 的和为 S。根据和与商原理, 则有

$$B = S \div (1 + mp) \dots\dots\dots (1)$$

反之, B 为 A 的 $\frac{1}{mp}$ 倍, 其和为 S, 同理则有

$$A = S \div (1 + \frac{1}{mp}) \dots\dots\dots (2)$$

(II) 已知 A 比 B 的 (-1) 倍多 S, B 为 B' 的 $\frac{1}{p}$, 则 A 比 B' 的 $(-\frac{1}{p})$ 倍多 S;

又知 A 为 B' 的 m 倍。根据商与商余原理, 则有 $B = S \div [m - (-\frac{1}{p})] \times \frac{1}{p}$ 。即

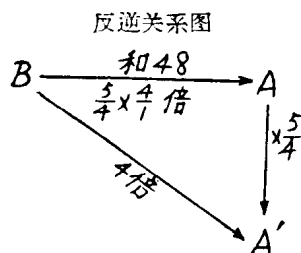
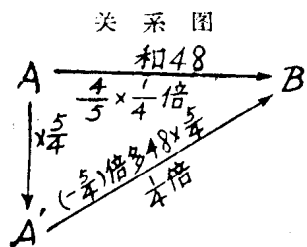
$$B = S \div (m + \frac{1}{p}) \times \frac{1}{p} \dots\dots\dots (3)$$

反之, B' 比 A 的 $(-p)$ 倍多 pS, 又 B' 为 A 的 $\frac{1}{m}$ 倍。同理, 则有

$$A = pS \div [\frac{1}{m} - (-p)]。即$$

$$A = pS \div (\frac{1}{m} + p) \dots\dots\dots (4)$$

【例题208】一輪船在水流每小时 8 里的河中往返行駛。它順流而下的速度每小时为 48 里; 当水流每小时增加 25% 的速度时, 则水流的速度为輪船在靜水中的速度的 $\frac{1}{4}$ 。問輪船在靜水中的速度及原来水流的速度各多少?



解: $100\% + 25\% = 125\% = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$ 。

(I) 已知 A 为 A' 的 $\frac{4}{5}$, A' 为 B 的

$\frac{1}{4}$, 则 A 为 B 的 $\frac{4}{5} \times \frac{1}{4}$ 。又知 A

与 B 的和为 48。根据和与商原理, 则有

$$(1) \text{ 船靜水速为 } 48 \div (1 + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4}) = 48 \div \frac{24}{20} = 48 \times \frac{5}{6} = 8 \times 5 = 40 \text{ 里/时。}$$

反之, B 为 A 的 $\frac{5}{4} \times \frac{4}{1}$ 倍, 其和为 48。同理, 则有

$$(2) \text{ 原来水速为 } 48 \div (1 + \frac{5}{4} \times \frac{4}{1}) = 48 \div 6 = 8 \text{ 里/时。}$$

(II) A' 为 A 的 $\frac{5}{4}$ 倍, A 比 B 的 (-1) 倍多 48, 则 A' 比 B 的 $(-\frac{5}{4})$ 倍多 $48 \times \frac{5}{4}$;

又 A' 为 B 的 $\frac{1}{4}$ 倍。由商与商余原理,

$$(3) \text{ 船靜水速为 } (48 \times \frac{5}{4}) \div [\frac{1}{4} - (-\frac{5}{4})] = 60 \div \frac{6}{4} = 60 \times \frac{4}{6} = 10 \times 4 = 40 \text{ 里/时。}$$

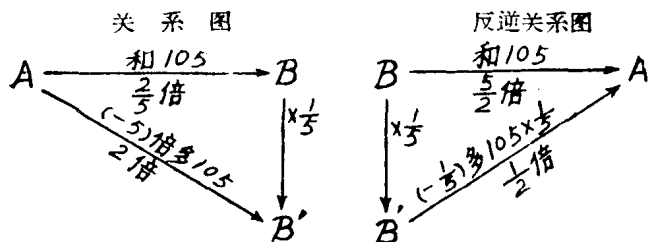
反之, B 为 A' 的 4 倍, 又 B 比 A' 的 $(-\frac{4}{5})$ 倍多 48。同理, 则有

$$(4) \text{ 原来水速为 } 48 \div [4 - (-\frac{4}{5})] \times \frac{4}{5} = 48 \div \frac{24}{5} \times \frac{4}{5} = 48 \times \frac{5}{24} \times \frac{4}{5} = 8 \text{ 里/时。}$$

【例题209】某教师所領的工薪为1元和5元的两种人民券共計105元。但知1元的張数为5元的張数的2倍。問两种人民券各几張？

解：(I) 已知A为B'的2倍，B'为B的 $\frac{1}{5}$ ，则A为B的 $\frac{2}{5}$ ；又A与B的和为105。根据和

与商原理，则有



(1) 5元的張数为

$$105 \div (1 + \frac{2}{5}) \times \frac{1}{5} = 105 \div \frac{7}{5} \times \frac{1}{5} \\ = 105 \times \frac{5}{7} \times \frac{1}{5} = 15 \text{張}.$$

反之，B为A的 $\frac{5}{2}$ 倍，其和为105。

同理，则有

(2) 1元的張数为 $105 \div (1 + \frac{5}{2}) = 105 \div \frac{7}{2} = 105 \times \frac{2}{7} = 15 \times 2 = 30 \text{張}.$

(II) 已知A比B的(-1)倍多105，B为B'的5倍，则A比B'的(-5)倍多105；

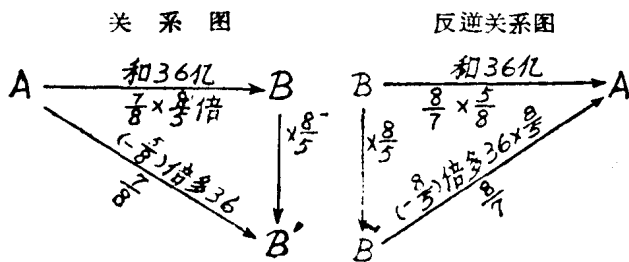
又A为B'的2倍。根据商与商余原理，则有

(3) 5元的張数为 $105 \div [2 - (-5)] = 105 \div 7 = 15 \text{張}.$

反之，B'为A的 $\frac{1}{2}$ ，又B'比A的 $(-\frac{1}{5})$ 多 $105 \times \frac{1}{5}$ ，同理则有

(4) 1元的張数为 $(105 \times \frac{1}{5}) \div [\frac{1}{2} - (-\frac{1}{5})] = 21 \div \frac{7}{10} = 21 \times \frac{10}{7} = 30 \text{張}.$

【例题210】有甲乙兩工厂，于1954年它們的总产值的和为36亿元；于1955年甲工厂的总产值沒有增减依然如旧。而乙工厂的总产值提高60%。于是甲工厂的总产值反而为乙工厂的 $\frac{7}{8}$ 。問于1954年甲乙二工厂的总产值各为多少？



解： $60\% + 100\% = 160\% = \frac{160}{100} = \frac{8}{5}.$

(I) 已知A为B'的 $\frac{7}{8}$ ，B'为B的 $\frac{8}{5}$ ，则A为B的 $\frac{7}{8} \times \frac{8}{5}$ ；又A与B的和为36。根据与商原理，则有

(1) 乙厂总产值为 $36 \div (1 + \frac{7}{8} \times \frac{8}{5}) = 36 \div \frac{12}{5} = 36 \times \frac{5}{12} = 15 \text{亿元}.$

反之，B为A的 $\frac{8}{7} \times \frac{5}{8}$ ，其和为36。同理，则有

(2) 甲厂总产值为 $36 \div (1 + \frac{8}{7} \times \frac{5}{8}) = 36 \div \frac{12}{7} = 36 \times \frac{7}{12} = 21 \text{亿元}.$

(II) A比B的 $(-\frac{1}{8})$ 多36，B为B'的 $\frac{5}{8}$ ，则A比B'的 $(-\frac{5}{8})$ 倍多36；

又A为B'的 $\frac{7}{8}$ 。根据商与商余原理，则有

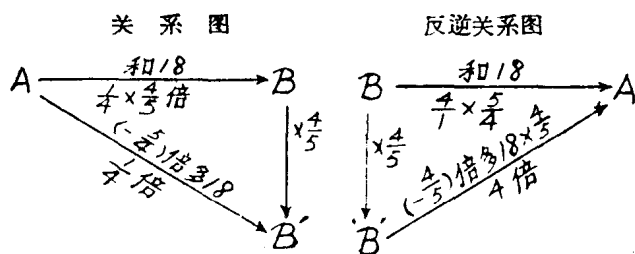
(3) 乙厂总产值为 $36 \div [\frac{7}{8} - (-\frac{5}{8})] \times \frac{5}{8} = 36 \div \frac{12}{8} \times \frac{5}{8} = 36 \times \frac{8}{12} \times \frac{5}{8} = 15 \text{亿元}.$

反之，B'为A的 $\frac{8}{7}$ ，又B'比A的 $(-\frac{8}{5})$ 倍多 $36 \times \frac{8}{5}$ 。同理，则有

(4) 甲厂总产值为 $(36 \times \frac{8}{5}) \div [\frac{8}{7} - (-\frac{8}{5})] = \frac{36 \times 8}{5} \div \frac{96}{35} = \frac{36 \times 8}{5} \times \frac{35}{96} = 21 \text{亿元}.$

【例题211】某学生准备买布鞋与皮鞋各一双，按定价需要18元可以办到。后来听说皮鞋价格降低

20%。于是布鞋的价格仅当皮鞋的 $\frac{1}{4}$ 。问布鞋和皮鞋原价各多少？



解: $100\% - 20\% = 80\% = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$.

(I) 已知A为B'的 $\frac{1}{4}$, B'为B

的 $\frac{4}{5}$, 则A为B的 $\frac{1}{4} \times \frac{4}{5}$;

又知A与B的和为18. 根据和与商原理, 则有

(1) 皮鞋价格为 $18 \div (1 + \frac{1}{4} \times \frac{4}{5}) = 18 \div \frac{6}{5} = 18 \times \frac{5}{6} = 15$ 元.

反之, B为A的 $\frac{4}{1} \times \frac{5}{4}$ 倍, 其和为18. 同理, 则有

(2) 布鞋价格为 $18 \div (1 + \frac{4}{1} \times \frac{5}{4}) = 18 \div 6 = 3$ 元.

(II) A比B的 (-1) 倍多18, B为B'的 $\frac{5}{4}$, 则A比B'的 $(-\frac{5}{4})$ 倍多18; 又知A为B'的 $\frac{1}{4}$. 根据商与商余原理, 则有

(3) 皮鞋价格为 $18 \div [\frac{1}{4} - (-\frac{5}{4})] \times \frac{5}{4} = 18 \div \frac{6}{4} \times \frac{5}{4} = 18 \times \frac{4}{6} \times \frac{5}{4} = 15$ 元.

反之, B'为A的4倍, 又B'比A的 $(-\frac{4}{5})$ 倍多 $18 \times \frac{4}{5}$. 同理, 则有

(4) 布鞋价格为 $(18 \times \frac{4}{5}) \div [4 - (-\frac{4}{5})] = \frac{72}{5} \div \frac{24}{5} = 3$ 元.

§ 77. 定理44. 由关系(一)与(十六)配合而得.

设关系数字S、m、f, 参变数p及二变量A、B都是实数; 又设A与B的和为S. 当B乘以p时, A比B'的m倍多f. 则有四个结论, 其中主要的两个结论为:

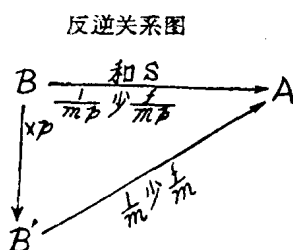
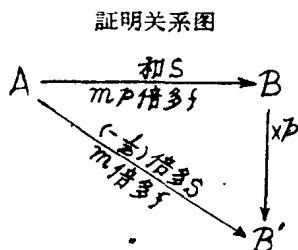
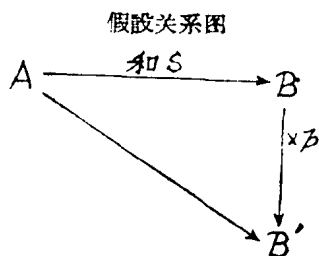
(1) $B = f(S, m, f, p) = (S - f) \div (1 + mp)$;

(2) $A = g(S, m, f, p) = (S + \frac{f}{mp}) \div (1 + \frac{1}{mp})$;

(3)-(4) 从略.

证明: (I) 已知A比B'的m倍多f, B'为B的p倍, 则A比B的mp倍多f; 又知A与B的和为S. 根据和与商余原理, 则有

$B = (S - f) \div (1 + mp)$ (1)



反之, B比A的 $\frac{1}{mp}$ 少 $\frac{f}{mp}$, 和为S. 同理, 则有

$A = (S + \frac{f}{mp}) \div (1 + \frac{1}{mp})$ (2)

(II) 已知A比B的 (-1) 倍多S, B为B'的 $\frac{1}{p}$, 则A比B'的 $(-\frac{1}{p})$ 倍多S;

又A比B'的m倍多f. 根据商余与商余原理, 则有

$$B = (S - f) \div [m - (-\frac{1}{p})] \times \frac{1}{p}, \text{ 即}$$

$$B = (S - f) \div (m + \frac{1}{p}) \times \frac{1}{p} \dots\dots\dots (3)$$

反之, B' 比 A 的 $\frac{1}{m}$ 少 $\frac{f}{m}$, 又 B' 比 A 的 $(-p)$ 倍多 $S \times p$. 同理, 则有

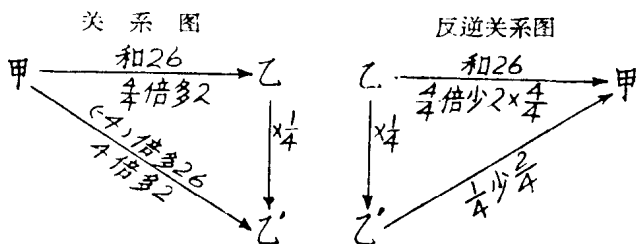
$$A = (S \times p + \frac{f}{m}) \div [\frac{1}{m} - (-p)], \text{ 即}$$

$$A = (S \times p + \frac{f}{m}) \div (\frac{1}{m} + p) \dots\dots\dots (4)$$

【例题212】有二根竹竿共長26尺。如果將乙竿截去 $\frac{3}{4}$ 以后, 則甲竿比乙的剩余部分的4倍还多2尺。問兩竹竿原長多少?

解: $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

(I.) 已知甲比乙'的4倍多2, 乙'为乙的 $\frac{1}{4}$, 則甲比乙的 $\frac{4}{4}$ 倍多2; 又甲与乙的和为



26. 根据和与商余原理,

则有

(1) 乙竿之長为 $(26 - 2)$

$$\div (1 + \frac{4}{4}) = 24 \div 2 = 12 \text{ 尺.}$$

反之, 乙比甲的 $\frac{4}{4}$ 倍少

$2 \times \frac{4}{4}$, 又乙与甲的和为26. 同理, 则有

(2) 甲竿之長为 $(26 + 2 \times \frac{4}{4}) \div (1 + \frac{4}{4}) = 28 \div 2 = 14 \text{ 尺.}$

(II.) 已知甲比乙的 (-1) 倍多26, 乙为乙'的4倍, 則甲比乙'的 (-4) 倍多26; 又甲比乙'的4倍多2. 根据商余与商余原理, 则有

(3) 乙竿之長为 $(26 - 2) \div [4 - (-4)] \times 4 = 24 \div 8 \times 4 = 3 \times 4 = 12 \text{ 尺.}$

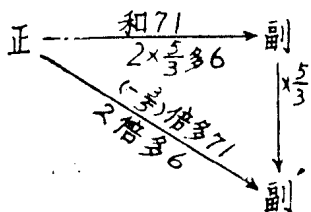
反之, 乙'比甲的 $(-\frac{1}{4})$ 倍多 $26 \times \frac{1}{4}$, 又乙'的甲的 $\frac{1}{4}$ 少 $\frac{2}{4}$. 同理, 则有

(4) 甲竿之長为 $(26 \times \frac{1}{4} + \frac{2}{4}) \div [\frac{1}{4} - (-\frac{1}{4})] = \frac{28}{4} \div \frac{2}{4} = 14 \text{ 尺.}$

【例题213】某合作社的一社員, 每月正业与副业共收入71元。如果副业收入能够提高 $\frac{2}{3}$, 則正业收入比副业收入的2倍还多6元。問他的正业与副业收入原来各多少?

关系图

解: $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.



(I.) 已知正比副'的2倍多6, 副'为副的 $\frac{5}{3}$, 則正比副的

$2 \times \frac{5}{3}$ 倍多6; 又正与副的和为71, 根据和与商余原理, 则有

(1) 副业收入为 $(71 - 6) \div (1 + 2 \times \frac{5}{3}) = 65 \div \frac{13}{3} = 65 \times \frac{3}{13} = 5 \times 3 = 15 \text{ 元.}$

反之, 副比正的 $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$ 少 $\frac{6}{2} \times \frac{3}{5}$, 又其和为71. 同理, 则有

(2) 正业收入为 $(71 + \frac{6}{2} \times \frac{3}{5}) \div (1 + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}) = \frac{364}{5} \div \frac{13}{10} = 56 \text{ 元.}$

(II.) 已知正比副的 (-1) 倍多71, 副为副'的 $\frac{3}{5}$, 則正比

副'的 $(-\frac{3}{5})$ 倍多71;又正比副'的2倍多6。根据商余与商余原理,则有

$$(3) \text{ 副业收入为 } (71-6) \div [2 - (-\frac{3}{5})] \times \frac{3}{5} = 65 \div \frac{13}{5} \times \frac{3}{5} = 15 \text{ 元.}$$

反之,副'比正的 $(-\frac{5}{3})$ 倍多 $71 \times \frac{5}{3}$,又副'比正的 $\frac{1}{2}$ 少 $\frac{6}{2}$ 。同理,则有

$$(4) \text{ 正业收入为 } (71 \times \frac{5}{3} + \frac{6}{2}) \div [\frac{1}{2} - (-\frac{5}{3})] = \frac{364}{3} \div \frac{13}{6} = 56 \text{ 元.}$$

§ 78. 定理45.由(二)与(十四)配合而得。

设关系数字 d, d_1 , 参变数 p 及二变量 A, B 都是实数;又设 A 比 B 多 d 。当 B 乘以 p 时, A 比 B' 多 d_1 。则有四个结论,其中主要的两个结论为:

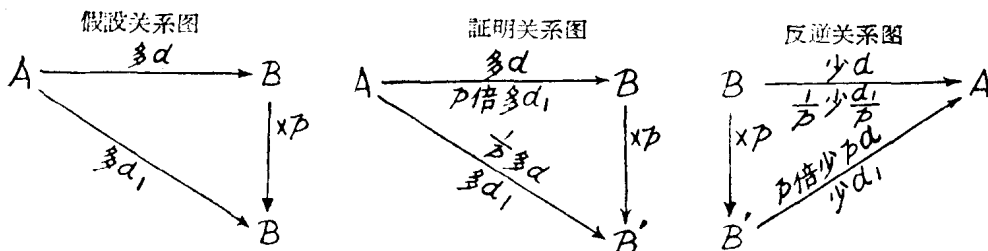
$$(1) B = f(d, d_1, p) = (d - d_1) \div (p - 1);$$

$$(2) A = \phi(d, d_1, p) = (d - \frac{d_1}{p}) \div (1 - \frac{1}{p});$$

(3) — (4) 从略。

证明: (I) 已知 A 比 B' 多 d_1 , B' 为 B 的 p 倍, 则 A 比 B 的 p 倍多 d_1 ; 又 A 比 B 多 d 。

设 $p > 1$ $\therefore d > d_1$, 根据差与商余原理, 则有



$$\therefore \frac{1}{p} < 1, \therefore d > \frac{d_1}{p}.$$

$$B = (d - d_1) \div (p - 1) \dots\dots\dots (1)$$

反之, B 比 A 少 d , 又 B 比 A 的 $\frac{1}{p}$ 少 $\frac{d_1}{p}$, 同理, 则有

$$A = (d - \frac{d_1}{p}) \div (1 - \frac{1}{p}) \dots\dots\dots (2)$$

(II) 已知 A 比 B 多 d , B 为 B' 的 $\frac{1}{p}$, 则 A 比 B' 的 $\frac{1}{p}$ 多 d ; 又 A 比 B' 多 d_1 。同理,

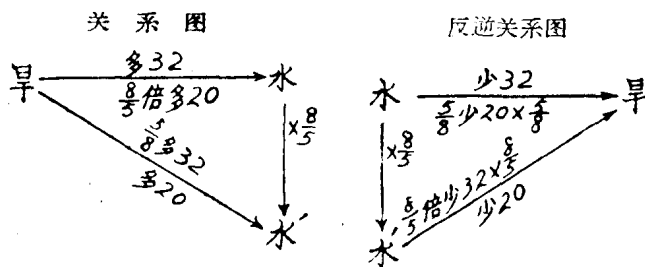
$$B = (d - d_1) \div (1 - \frac{1}{p}) \times \frac{1}{p} \dots\dots\dots (3)$$

反之, B' 比 A 少 d_1 , 又 B' 比 A 的 p 倍少 pd 。同理, 则有

$$A = (pd - d_1) \div (p - 1) \dots\dots\dots (4)$$

【例题214】广路农业生产合作社的旱田比水田多32顷; 计划把水田扩大到160%, 那时旱田还比扩大的水田多20顷。问此社原有旱田和水田各多少?

解: $\frac{160}{100} = \frac{8}{5}$.



(I) 已知旱田比水田'多20, 水田'为水田的 $\frac{8}{5}$, 则旱田比水田的 $\frac{8}{5}$ 多20; 又旱田比水田多32。根据差与商余原理, 则有

$$(1) \text{ 水田为 } (32 - 20) \div (\frac{8}{5} - 1) \\ = 12 \div \frac{3}{5} = 12 \times \frac{5}{3} = 4 \times 5 \\ = 20 \text{ 顷.}$$

反之, 水田比旱田少32, 又水田比旱田的 $\frac{5}{8}$ 少 $20 \times \frac{5}{8}$ 。同理, 则有

$$(2) \text{旱田为 } (32 - 20 \times \frac{5}{8}) \div (1 - \frac{5}{8}) = \frac{39}{2} \div \frac{3}{8} = \frac{39}{2} \times \frac{8}{3} = 13 \times 4 = 52 \text{ 顷.}$$

(II) 已知旱田比水田多 32, 水田为水田'的 $\frac{5}{8}$, 则旱田比水田'的 $\frac{5}{8}$ 多 32; 又旱田比水田'多 20. 同理, 则有

$$(3) \text{水田为 } (32 - 20) \div (1 - \frac{5}{8}) \times \frac{5}{8} = 12 \div \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = 12 \times \frac{8}{3} \times \frac{5}{8} = 20 \text{ 顷.}$$

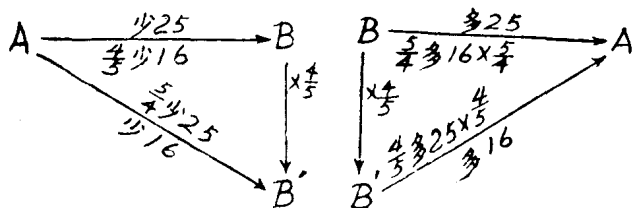
反之, 水田'比旱田少 20, 又水田'比旱田的 $\frac{8}{5}$ 少 $32 \times \frac{8}{5}$. 同理, 则有

$$(4) \text{旱田为 } (32 \times \frac{8}{5} - 20) \div (\frac{8}{5} - 1) = \frac{156}{5} \div \frac{3}{5} = 52 \text{ 顷.}$$

【例题215】家里有小米和大米各一袋, 小米比大米少 25 斤, 如果大米吃去其 $\frac{1}{5}$ 以后, 小米比剩余的大米少 16 斤. 问原有小米和大米各多少?

关系图

反逆关系图



$$\text{解: } 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

(I) 已知 A 比 B' 少 16, B' 为 B 的 $\frac{4}{5}$, 则 A 比 B 的 $\frac{4}{5}$ 少 16; 又 A 比 B 少 25. 根据差与商余原理, 则有

$$(1) \text{大米为 } (25 - 16) \div (1 - \frac{4}{5}) = 9 \div \frac{1}{5} = 9 \times 5 = 45 \text{ 斤.}$$

反之, B 比 A 多 25, 又 B 比 A 的 $\frac{5}{4}$ 多 $16 \times \frac{5}{4}$. 同理, 则有

$$(2) \text{小米为 } (25 - 16 \times \frac{5}{4}) \div (\frac{5}{4} - 1) = 5 \div \frac{1}{4} = 5 \times 4 = 20 \text{ 斤.}$$

(II) 已知 A 比 B 少 25, B 为 B' 的 $\frac{5}{4}$, 则 A 比 B' 的 $\frac{5}{4}$ 倍少 25; 又 A 比 B' 少 16. 同理, 则有

$$(3) \text{大米为 } (25 - 16) \div (\frac{5}{4} - 1) \times \frac{5}{4} = 9 \div \frac{1}{4} \times \frac{5}{4} = 36 \times \frac{5}{4} = 45 \text{ 斤.}$$

反之, B' 比 A 多 16, 又 B' 比 A 的 $\frac{4}{5}$ 多 $25 \times \frac{4}{5}$. 同理, 则有

$$(4) \text{小米为 } (25 \times \frac{4}{5} - 16) \div (1 - \frac{4}{5}) = 4 \div \frac{1}{5} = 4 \times 5 = 20 \text{ 斤.}$$

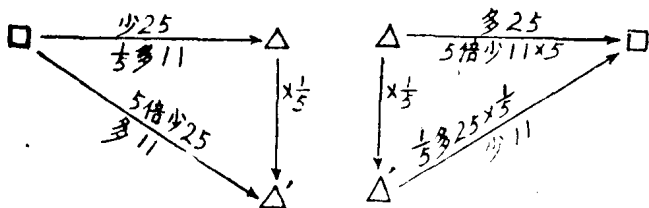
【例题216】已知正方形的面积比三角形的面积少 25 公分²; 如果把三角形缩小 5 倍, 以后, 则正方形的面积比缩小后的三角形多 11 公分². 问正方形和原三角形的面积各多少?

解: (I) 已知 □ 比 △' 多 11, △' 为 △ 的 $\frac{1}{5}$, 则 □ 比 △ 的 $\frac{1}{5}$ 多 11; 又 □ 比 △ 少 25. 根据差与商余原理, 则有

$$(1) \triangle \text{ 的面积为 } (25 + 11) \div (1 - \frac{1}{5}) = 36 \div \frac{4}{5} = 45 \text{ 公分}^2.$$

关系图

反逆关系图



反之, △ 比 □ 多 25, 又 △ 比 □ 的 5 倍少 11. 同理, 则有

$$(2) \square \text{ 的面积为 } (25 + 11 \times 5) \div (5 - 1) = 80 \div 4 = 20 \text{ 公分}^2.$$

(II) 已知 □ 比 △ 少 25, △ 为 △' 的 5 倍, 则 □ 比 △' 的 5 倍少 25; 又 □ 比 △' 多 11. 同理, 则有

$$(3) \triangle \text{ 的面积为 } (25 + 11) \div (5 - 1) \times 5 = 36 \div 4 \times 5 = 9 \times 5 = 45 \text{ 公分}^2.$$

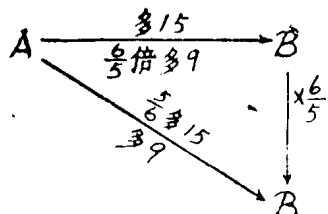
反之, △' 比 □ 少 11, 又 △' 比 □ 的 $\frac{1}{5}$ 多 $25 \times \frac{1}{5}$. 同理, 则有

$$(4) \square \text{ 的面积为 } (25 \times \frac{1}{5} + 11) \div (1 - \frac{1}{5}) = 16 \div \frac{4}{5} = 20 \text{ 公分}^2.$$

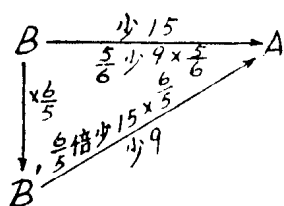
【例題217】某鐵工有師徒兩工人，師傅每天完成的件數比徒弟多15件；如果徒弟努力向師傅學習提高了操作技術，每天可以增多完成其20%。此時，師傅每天還比徒弟多完成9件。問師徒二人每天原各作多少件？

關係圖

$$\text{解： } 20\% + 100\% = 120\% = \frac{120}{100} = \frac{6}{5}.$$



反逆關係圖



(I) 已知A比B'多9，B'為B的 $\frac{6}{5}$ ，則A比B的 $\frac{6}{5}$ 多9；又A比B多15。根據差與商原理，則有

$$(1) \text{ 徒弟每天的件數為 } (15 - 9) \div (\frac{6}{5} - 1) = 6 \div \frac{1}{5} = 6 \times 5 = 30 \text{ 件}.$$

反之，B比A少15，又B比A的 $\frac{5}{6}$ 少 $9 \times \frac{5}{6}$ 。同理，則有

$$(2) \text{ 師傅每天的件數為 } (15 - 9 \times \frac{5}{6}) \div (1 - \frac{5}{6}) = \frac{15}{2} \div \frac{1}{6} = 45 \text{ 件}.$$

(II) 已知A比B多15，B為B'的 $\frac{5}{6}$ ，則A比B'的 $\frac{5}{6}$ 多15；又A比B'多9，則

$$(3) \text{ 徒弟每天的件數為 } (15 - 9) \div (1 - \frac{5}{6}) \times \frac{5}{6} = 6 \div \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 30 \text{ 件}.$$

反之，B'比A少9，又B'比A的 $\frac{6}{5}$ 少 $15 \times \frac{6}{5}$ 。同理，則有

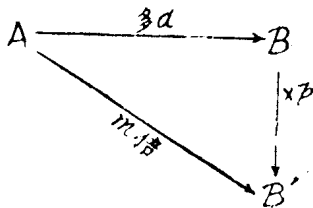
$$(4) \text{ 師傅每天的件數為 } (15 \times \frac{6}{5} - 9) \div (\frac{6}{5} - 1) = 9 \div \frac{1}{5} = 45 \text{ 件}.$$

§ 79. 定理46. 由關係(二)與(十五)配合而得。

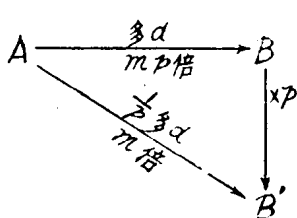
設關係數字d、m，參變數p及二變量A、B都是實數；又設A比B多d。當B乘以p時，A為B'的m倍。則有四個結論，其中主要的二結論為：

- (1) $B = f(d, m, p) = d \div (mp - 1)$;
- (2) $A = \phi(d, m, p) = d \div (1 - \frac{1}{mp})$;
- (3) — (4) 從略。

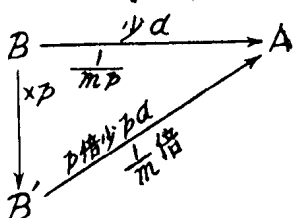
假設關係圖



證明關係圖



反逆關係圖



證明：(I) 已知A為B'的m倍，B'為B的p倍，則A為B的mp倍；又A比B多d。根據差與商原理，則有

$$B = d \div (mp - 1) \dots\dots\dots (1)$$

反之，B比A少d，又B為A的 $\frac{1}{mp}$ 。同理，則有

$$A = d \div (1 - \frac{1}{mp}) \dots\dots\dots (2)$$

(II) 已知A比B多d，B為B'的 $\frac{1}{p}$ ，則A比B'的 $\frac{1}{p}$ 多d；又A為B'的m倍