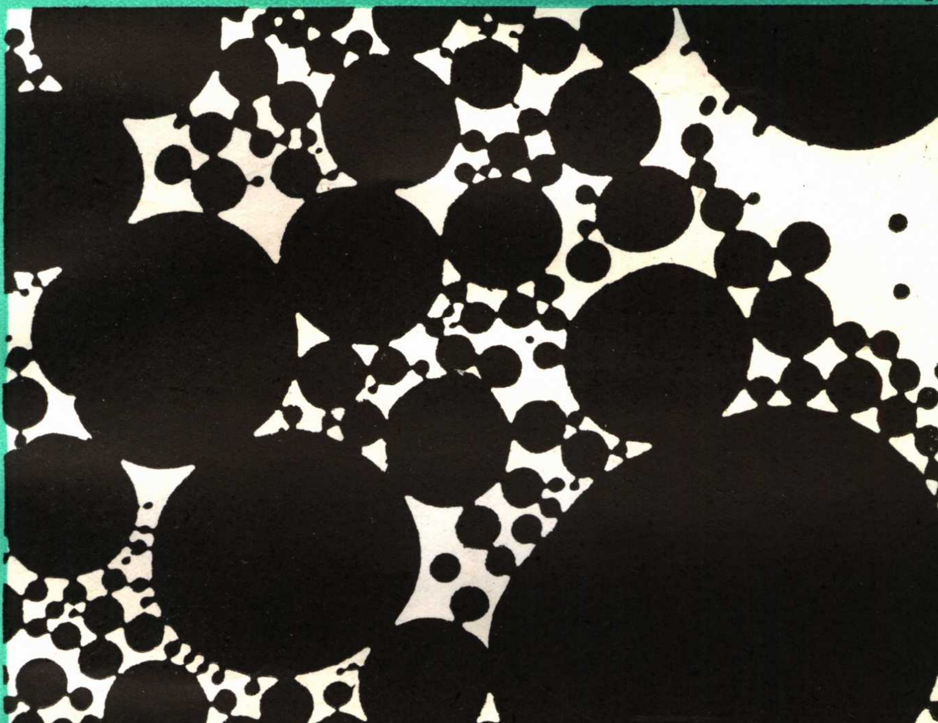
分形集几何学

THE GEOMETRY OF FRACTAL SETS

[英]K. J. Falconer 著　张永平　徐汉涛　译



189.3
F383

中国矿业大学出版社

CHINA UNIVERSITY OF MINING AND TECHNOLOGY PRESS

(苏)新登字第010号

内容提要

本书详细介绍了分形集几何学的数学基础和理论模型，给出了各种分形集的数学构造和测度与维数的计算方法。内容主要包括：集合的Hausdorff测度与维数，整数维数和分数维数的集合的局部结构，网测度、有限测度子集与分形集的笛卡尔积，分形集的投影性质，Besicovitch集和kakeya集，以及各种类型的分形集的例子。书中内容丰富、论述严谨、条理清楚，每章之后都附有一定数量的习题。凡是具有一定数学分析基础的读者都能阅读此书。

本书可作为数学和应用数学专业大学高年级本科生、研究生的教材和物理、化学、力学、地学等专业研究生的数学参考书。也可供从事分形理论和应用研究的广大科技工作者参考。

责任编辑 周立吾

技术设计 关湘雯

分形集几何学

〔英〕K. J. Falconer 著

张永平 徐汉涛 译

中国矿业大学出版社出版

新华书店经销 中国矿业大学印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/16 印张9.75 字数234千字

1992年7月第一版 1992年7月第一次印刷

印数：1—1000册

ISBN 7-81021-701-1

O·36 定价：12.00元

译 者 的 话

分形这一概念是由法国数学家Mandelbrot于本世纪70年代提出来的，从80年代初开始这一数学分支引起了人们的广泛兴趣，从而促进了分形几何的发展，它被广泛地应用于自然科学和社会科学的众多领域。然而，分形几何的数学基础可追溯到本世纪初期Hausdorff、Besicovitch等人的工作；早在2000多年前，我国古代中医学中就包含了分形的思想。可以说分形几何学不仅对现代科学的发展起了很大的促进作用，而且早已被人们用来造福于人类。

本书是Falconer所著"*The Geometry of Fractal Sets*"(Cambridge University Press，1985)一书的中译本。内容主要是涉及分形几何的基本理论和基本方法。阅读本书并不需要很难的数学知识。但要顺利阅读本书必须具有一定的数学分析的基础知识。本书既可作为从事分形几何理论方面研究的读者的"工具书"，也可作为从事分形几何应用研究的读者的参考书。我们希望对于一些正在或想要从事分形几何理论方面研究的读者，通过仔细阅读本书，能够掌握它的基本概念、基本理论和主要方法，而对于从事分形几何应用研究的读者或初学者，在第一次阅读本书时，可根据需要掌握其中的基本结论和方法，而对于那些复杂的定理证明则可以从略。

在本书的翻译过程中得到了中国矿业大学朱儒楷教授、中国科学院金属研究所董连科研究员的大力支持和热情关怀，原书作者Falconer还专门为本书写了中译本序言，在此我们表示衷心感谢。

由于我们水平所限，错误和不当之处，在所难免，望读者指正。

译　者

1990年11月于中国矿业大学

分形集几何学中译本序言

The Geometry of Fractal Sets 被译成中文出版我感到十分荣幸。我对张永平和徐汉涛的翻译工作深表谢意。

分形已被认为是在数学、科学和工程的众多领域中所具有的特征。自从Mandelbrot的著作*The Fractal Geometry of Nature*出版以来的最近15年的时间里，它们被从各种不同观点进行了深入细致的研究。然而，有关分形的大多数数学基础却是相当古老的，可追溯到Carathéodory、Hausdorff和Besicovitch的工作。

本书包含了一些古老的和新近的精确的论述，这些论述常被用来描述和分析那些现在被认为是分形，十分不规则的对象。我欢迎更多的读者选用本书的中译本，并希望新的读者从中获得收益。

Kenneth J Falconer

1990年10月于布里斯托尔

序

本书提供分数和整数的Hausdorff维数集合的一个较完整、精确的数学论述，其主要内容是涉及它们的几何理论而不是应用。大量的内容至今仅仅能从原始数学论文中找到，原始文献中的许多方法具有很高的技巧性、零乱而且还使用了陈旧的符号。在本书的写作过程中，我的愿望是使这些材料更容易理解并且还希望能够利用分形为这些内容和方法提供一个有用的而且是切合实际的描述。

虽然本书基本上是为纯数学家写的，但我希望或多或少对一些行家和需要的读者能有所帮助。在最基本的水平上，对那些涉及到分形的其他数学和科学学科本书可以作为参考文献。把主要的定理和结论连同基本概念一起阅读可获得已经被精确的确定了的性质的实际论述。

若只是为了了解这一课题的概况或第一次阅读本书，最好的选择可能是去掌握结论的基本注释与论述而略去详细的证明。对非数学专家的读者也可略去在1.1节中的从技巧的观点所建立起来的一般测度性质的详细论述。

细节的完整鉴赏需要读者具有数学分析和一般拓朴学的基础知识。毫无疑问其中有一些证明的主要推导过程既艰难而且又相当长，但为了洞悉其中所包含的数学美和精巧性掌握它们是值得的。

需要强调的是这一学科所运用的基本工具值得注意，例如，Vatali覆盖定理、网测度以及位势理论方法。

我们需要把测度和Hausdorff测度的性质放在第1章的1.1节和1.2节中，因为本书自始至终所强调的是利用测度正确的确定集合的体积，而不是把定义积分作为一个步骤。在第8章中，积分仅仅作为一种实用的工具；积分的一个主要的直观概念可完全适当的确定。

一个不可避免的折中方法是在通常所采用的水平上来考虑问题。我们将在n维欧氏空间上讨论问题，然而其中很多观点同样也适应更一般的度量空间。在一些情形中，我们仅在2维情况下证明定理，对于高维的情况下的证明的方法是类似的只是更复杂。类似地，如果有时所给出的1维或2维的证明包含了一般情形的基本观点，则1维或2维的证明可使符号简化。我们还限定所涉及的Hausdorff测度所对应的是一个数值维数s，而不是任何一个函数。

一些定理的证明被从它们的原始形式作了简化。毫无疑问进一步的简化是可能的，但是，作者为了使本书的胶印本尽快出版必须在有限的时间内完成本书。

尽管本书基本是自我完善的，然而对研究内容和方法的变化和扩展也作了简短的阐述，而且还提供了完整的参考文献。进一步的变化和推广可以在每一章末尾的练习中找到。

万分高兴的对所有以任何方式为本书提供帮助的人们表示我的谢意。我特别感激Roy Davies教授对本书手稿提出的有益的意见和允许我引用他还没有发表的论文，感

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

谢 Hallard Croft 博士所提出的详细的建议以及为核对证明所提供的帮助。我更要感谢 B. B. Mandelbrot 教授、J. M. Marstrand 教授、P. Mattila 教授和 C. A. Rogers 教授的有益的评论和讨论。

我十分乐意感谢 Maureen Woodward 夫人和 Rhoda Rees 夫人打印了底稿，还要感谢剑桥大学出版社的David Tranah 和 Sheila Shepherd 对本书的出版的几个阶段所进行的监督。最后，我必须感谢我的妻子 Isobel 抽空阅读了本书最早的手稿以及她的不断的鼓励和支持。

引　言

本世纪初，数学家们发展了整数维数和分数维数集合的几何测度理论。近年来，分形几何学在科学上的地位已变得越来越重要。Mandelbrot(1975,1977,1982)开拓了这一理论在从分子到宇宙空间等各种自然科学现象上的广泛应用。例如，微粒的 Brown 运动、流动的湍流、植物的生长、地理上的海岸线和地球表面、宇宙中星团的分布、甚至供需变化时价格的波动，分数维数的集合也常出现在纯粹数学的不同分支，诸如数论和非线性微分方程等。Mandelbrot 在集科学性、哲学性和图解为一体的论著中给出了更多的实例。因此，这个从纯数学中产生的概念在科学上得到了广泛的应用，而这又反过来为数学家们提出了更多、更深入的问题。本书的基本内容是讨论这种集合的几何理论而不是应用。

“fractal(分形)”一词是由 Mandelbrot(1975)引入的，其源于拉丁文 *fractus*，意为断裂的，他给出了分形的尝试性定义：分形作为一个集合它的 Hausdorff 维数严格大于其拓朴维数。但他又指出这个定义是不能令人满意的，因为它排除了许多显然应该作为分形的不规则的集合。至今数学家们用各种方式描述这种集合，例如，“分数维数集”、“Hausdorff 测度集”、“精细结构集”或“非正则集”。这种集合的任何完善的研究也都必须用是否包含那些拓朴维数等于 Hausdorff 维数的集合来检验，但愿它们可以被包含在进一步讨论中。本书不包含这种规则(例如，光滑的曲线和曲面等)的集合。

有许多方法来估计具有“弱”或“强”的不规则性的集合的“体积”或“维数”，并且已被作为点、曲线和曲面的维数分别是 0、1、2 的概念的推广。从数学的观点看，由 Hausdorff 测度定义的 Hausdorff 维数具有它的优越性，因为 Hausdorff 测度是一种测度(即集合的不交可列并具有可加性)。不幸的是，即使对比较简单的集合，它的 Hausdorff 测度和维数也是很难计算的。特别是它们的下界常常也是很难获得的。这在物理学应用方面是一个很大的缺点，为此，Hausdorff 维数的定义采用了很多变化形式。

一些维数的选择定义是由 Hurewicz 和 Wallman(1941)、Kahane (1976)、Mandelbrot(1982，第 39节)和 Tricot(1981,1982)提出并且把它们与 Hausdorff 维数作了比较。这包括 Hawkes(1974)中的熵，Mandelbrot(1982)中的相似维数以及 Johanson 和 Rogers(1982) 的局部维数和测度。以其中的任何一种定义为基础完全可以写成一本书，但毫无疑问 Hausdorff 测度和维数是被最广泛的研究和使用。

通过定义一个外测度把区间的长度概念推广到更一般的实数集的观点，最近引起了人们的重视。Borel(1895)利用测度来估计集合的体积，使得他能够构造出确实病态的函数。Lebesgue(1904)采用这种观点作为他的积分结构的基础。Carathéodory (1914) 引入了更一般的“Carathéodory 外测度”。特别是，他在n维空间中定义了“1 维测度”或“线性测度”，并且对其他的整数 s，s 维测度可类似的定义。Hausdorff(1919) 指出 Carathéodory 的定义对非整数的 s 同样是有意义的。他用著名的 Cantor“中三分集”具有正的有限的s 维测度来说明这一点，其中 $s=\log 2/\log 3=0.6309\cdots$。从而集合的分数维数

概念就这样产生了，并且人们把 Hausdorff 的名字与这种维数和测度联系起来。

从那时起，有关 Hausdorff 测度和 Hausdorff 可测集的几何性质的大量信息被人们发现。Rogers(1970)的书中对内蕴测度理论给予很好的论述，有关测度几何的更一般的方法可在 Federer(1969) 的学术卷中找到，它使我们可将表面积的覆盖问题与调和积分理论区分开。

涉及 Hausdorff 测度理论及其在几何方面的许多成果应归功于 Besicovitch，他的名子在本书中将经常出现。事实上，多年来与 Hausdorff 测度有关的论文大部分以他的名字出现，其中很多论文包含非常天才的观点。最近，他的学生又做出了许多重大贡献。由 Burkill(1971)和 Talor(1975) 所致的悼念词概括了 Besicovitch 在这门学科上的影响。

显然Besicovitch准备写一本题为：《点集几何学》(*The Geometry of Sets of Points*)的书，其中所讨论的几何测度理论在许多方面可能与本书相似。Besicovitch 去逝后，Roy Davies 教授和他的助手 Helen Alderson 博士写了相当于 Besicovitch 的书的“第 1 章”。这章虽然不是注定无续集，但它对本书开始部分有相当大的影响。

在本书的第 1 章中，我们定义了 Hausdorff 测度并且研究了它的基本性质。我们阐述了在一些简单的情况下如何去求一个集合的 Hausdorff 维数和测度。我们特别感兴趣的是被称为 s- 集的维数为 s 的集合，这是一种具有非零有限的 s 维 Hausdorff 测度的集合。被这样一种微弱条件约束的一类集合的几何特征必然是由对它们的任意点的领域的研究组成。第 2 章至第 4 章讨论了集合的局部性质：集合在一点的密度、集合在它的每一点的方向分布，即切线存在问题。分数维数和整数维数的集合被分开讨论。分数维数的集合必为分形，而在整数维数的情形，正则的“曲线型”或者“曲面型”集与非正则的分形集之间有明显的差异。

第 5 章介绍了网测度的许多技巧，这些技巧使我们能证明任意具有无限 s 维 Hausdorff 测度的集合都包含 s- 集，可将 s- 集的理论推广到所要求的更一般的集合。网测度也用来研究集合的笛卡尔积的 Hausdorff 测度。

第 6 章所涉及的是集合到低维子空间上的投影，位势理论方法作为一种直接使用的几何方法之一。

第 7 章讨论了 Kakeya 问题”，寻找使得单位长度的直线能在其内部连续转动的最小测度子集。讨论了许多方法，并且通过对偶将这一课题与前一章的投影定理以及调和分析联系起来。

第 8 章包含了各种各样的例子，它们是用来解释前几章中所涉及的一些观点。

本书的末尾列出了参考文献和引证材料。读者如有需要，还可进一步查阅 Federer (1947,1969)、Rogers(1970)和 Mandelbrot(1982)等重要文献。

符　　号

要完整地列出全书(尤其是最后一章)所使用的符号是不可能的。通常，一个符号在第一次引入时都给出了它的定义；以下这些记号只是作为一个粗略的指南。

我们仅限于在 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中讨论问题。$\mathbb{R}^n$ 中的点用小写字母 x，y，z 等表示(有时也用向量形式)。偶尔我们把笛卡尔坐标记为(x,y). 大写字母 E,F,Γ 等表示 $\mathbb{R}^n$ 的子集而草体 $\mathscr{B},\mathscr{V},\varphi$ 等表示集族。我们所涉及的集合包含符号允许相等。用 $|E|$ 表示集合 E 的直径，且在什么情况下模符号是表示一个向量的长度是清楚的，从而 $|x-y|$ 是点 x 与 y 之间的距离。$b,c,c_t,\varepsilon,\delta$ 表示常数且指标 i,j,k 也用小写字母表示。黑体字母通常表示向量。符号□表示“证毕”。

以下所列出的是另一些最常用的符号。

集合

$\mathbb{R}^n$	n 维欧氏空间。
$B_r(x)$	中心在 x 点、半径为 r 的闭圆盘或球。
$S_r(x,\boldsymbol{\theta},\phi)$	角度为 ϕ 和半径为 r 的扇形。
$C_r(x,I)$	双向扇形。
$R(x,y)$	中心在 x,y 的圆对之间的公共区域。
$G_{n,k}$	$\mathbb{R}^n$ 的 k 维子空间的 Grassman 流形。
$L(a,b),L(E)$	线集。
$\overline{E}$, int$E$	分别是 E 的拓朴闭包和内部。
$[E]_\delta$	E 的 δ-平行体。
$E\backslash F$	E 与 F 的差集。

映射

$\text{proj}_\theta,\text{proj}_\Pi$	分别是到沿 θ 方向的直线和平面 Π 上正交投影。
$\hat{f},\mu$	分别是函数 f 和测度 μ 的 Fourier 变换。
$\phi\circ f$	映射 f 与 ϕ 的复合。

测度等

$\mathscr{H}^s$	s 维 Hausdoff 测度或外测度。
$\mathscr{L}^n$	n 维 Lebesgue 测度。
$\mathscr{M}^s$	s 维网测度。
$\mathscr{H}^s_\delta,\mathscr{M}^s_\delta$	用于构造$\mathscr{H}^s$ 和 $\mathscr{M}^s$ 的 δ- 外测度。
$\mathscr{L}(\Gamma)$	曲线 Γ 的长度。
$\dim E$	E 的 Hausdorff 维数。
ϕ_t,C_t,I_t	t-位势，容量，能量。

密度

$D^s(E,x)$	E 在 x 点的密度。
$\underline{D}^s(E,x),\overline{D}^s(E,x)$	下，上密度。
$\overline{D}_c^s(E,x)$	上凸密度。
$\underline{D}^s(E,x,\theta,\phi)$	下角密度。

目　　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

1 测度与维数

1.1 测度论基础

本节我们简要介绍一下所需测度理论的基础知识，这方面更完整的论述，请参阅Kingman和Taylor(1966)或Rogers(1970)。

设X为任意集(我们简单地把X取为n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$)，φ是X的一个非空子集族，如果φ对余运算和可列并运算是封闭的(若$E\in\varphi$，则$X\backslash E\in\varphi$；若$E_1, E_2, \cdots\in\varphi$，则$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\in\varphi$)，则称$\varphi$为$\sigma$-域。初等集合论表明，一个$\sigma$-域对可列交和集合的差运算也是封闭的，此外，$X$和空集$\varnothing$也属于$\varphi$。

集列$\{E_j\}$的下极限和上极限分别定义为：

$$\underline{\lim}_{j\to\infty} E_j=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j$$

和

$$\overline{\lim}_{j\to\infty} E_j=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$$

因此，$\underline{\lim}_{j\to\infty} E_j$是由属于除了有限多个外的所有$E_j$的点组成的集合；$\overline{\lim}_{j\to\infty} E_j$是由属于无穷多个集合$E_j$的点组成的集合。从上述定义可见，如果对所有$j$，$E_j$属于$\sigma$-域$\varphi$，则$\underline{\lim} E_j$、$\overline{\lim}\, E_j\in\varphi$。如果$\underline{\lim}\, E_j=\overline{\lim}\, E_j$，则将它记为$\lim E_j$；若$\{E_j\}$是递增或递减的集列必有$\underline{\lim} E_j=\overline{\lim}\, E_j$。

设$\mathscr{B}$为X的子集的任意族，由$\mathscr{B}$生成的σ-域记为$\varphi(\mathscr{B})$，它是所有包含$\mathscr{B}$的σ-域的交。因此，$\varphi(\mathscr{B})$是包含$\mathscr{B}$的最小σ-域。

如果定义在由X的子集所生成的σ-域φ上且在$[0,\infty]$中取值的函数μ满足：

$$\mu(\varnothing)=0 \tag{1.1}$$

且对φ中任何不交集列$\{E_j\}$，有

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j) \tag{1.2}$$

则称μ为φ上的测度。

由(1.2)可知，μ是一个递增集函数，即若$E\subset E'$且$E, E'\in\varphi$，则

$$\mu(E)\leqslant\mu(E').$$

定理 1.1(测度的连续性)

设 μ 是 X 的子集的一个 σ- 域 φ 上的测度,

(a) 如果 $E_1\subset E_2\subset\cdots$是 φ 中的一个递增集列,则:

$$\mu(\lim_{j\to\infty}E_j)=\lim_{j\to\infty}\mu(E_j).$$

(b) 如果 $F_1\supset F_2\supset\cdots$是 φ 中的一个递减集列,且 $\mu(F_1)<\infty$,则

$$\mu(\lim_{j\to\infty}F_j)=\lim_{j\to\infty}\mu(F_j).$$

(c) 对于 φ 中任意集列$\{F_j\}$,有

$$\mu(\underline{\lim}_{j\to\infty}F_j)\leqslant\underline{\lim}_{j\to\infty}\mu(F_j).$$

证明:(a) 我们可以将 $\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$ 表为集合的不交并,$E_1\cup\bigcup_{j=2}^{\infty}(E_j\backslash E_{j-1})$,则由(1.2)式,得

$$\begin{aligned}\mu(\lim_{j\to\infty}E_j)&=\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)\\&=\mu(E_1)+\sum_{j=2}^{\infty}\mu(E_j\backslash E_{j-1})\\&=\lim_{k\to\infty}[\mu(E_1)+\sum_{j=2}^{k}\mu(E_j\backslash E_{j-1})]\\&=\lim_{k\to\infty}\mu\left(E_1\cup\bigcup_{j=2}^{k}(E_j\backslash E_{j-1})\right)\\&=\lim_{k\to\infty}\mu(E_k).\end{aligned}$$

(b) 记 $E_j=F_1\backslash F_j$,则$\{E_j\}$满足(a)中的条件。由于 $\bigcap_j F_j=F_1\backslash\bigcup_j E_j$,则

$$\begin{aligned}\mu(\lim_{j\to\infty}F_j)&=\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}F_j\right)\\&=\mu(F_1)-\mu\left(\bigcup_j E_j\right)\\&=\mu(F_1)-\lim_{j\to\infty}\mu(E_j)\\&=\lim_{j\to\infty}[\mu(F_1)-\mu(E_j)]\\&=\lim_{j\to\infty}\mu(F_j).\end{aligned}$$

(c) 设 $E_k=\bigcap_{j=k}^{\infty}F_j$,则$\{E_k\}$是 φ 中递增集列。因而,根据(a),有

$$\mu(\underline{\lim}_{j\to\infty}F_j)=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{k\to\infty}\mu(E_k)\leqslant\underline{\lim}_{j\to\infty}\mu(F_j).\qquad\square$$

下面我们来介绍外测度,它是将性质(1.2)减弱为次可加性的基本测度。若定义在 X

的所有子集上且在$[0,\infty]$中取值的函数 ν 满足：

$$\nu(\varnothing)=0 \tag{1.3}$$

如果 $A\subset A'$，有

$$\nu(A)\leqslant\nu(A') \tag{1.4}$$

对 X 的任意子集列$\{A_j\}$，有

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\nu(A_j) \tag{1.5}$$

则称 ν 为外测度。

外测度是非常有用的，因为总存在子集的一个 σ- 域，它在该域上具有测度性质，而为了实用性，定义了外测度的 σ- 域可以是非常大的。

X 的子集 E 称为 ν-可测的或关于外测度 ν 是可测的，如果它对于 X 的任何子集 A 的分解具有可加性，即对一切"测试集"$A\subset X$，有

$$\nu(A)=\nu(A\cap E)+\nu(A\backslash E) \tag{1.6}$$

需注意的是，要验证一个集合 E 是否 ν- 可测，只须验证：

$$\nu(A)\geqslant\nu(A\cap E)+\nu(A\backslash E) \tag{1.7}$$

因为相反的不等式已包含在(1.5)式中。显然易证：若 $\nu(E)=0$，则 E 是 ν- 可测的。

定理 1.2

设 ν 为一个外测度，则所有 ν 可测集所组成的集簇$\mathscr{M}$是一个 σ- 域，且 ν 在$\mathscr{M}$ 上的限制是一个测度。

证明：显然 $\varnothing\in\mathscr{M}$，故 $\mathscr{M}$ 非空。其次，根据(1.6)式的对称性知，$A\in\mathscr{M}$ 的充要条件是$X\backslash A\in\mathscr{M}$，故 $\mathscr{M}$ 对取余运算是封闭的。

为了证明$\mathscr{M}$对可列并运算也是封闭的，假设 $E_1,E_2\cdots\in\mathscr{M}$，$A$为任意集合，对集 $E_1,E_2,\cdots$，反复应用(1.6)式并相应地改变所用测试集，得

$$\begin{aligned}\nu(A)&=\nu(A\cap E_1)+\nu(A\backslash E_1)\\&=\nu(A\cap E_1)+\nu((A\backslash E_1)\cap E_2)+\nu(A\backslash E_1\backslash E_2)\\&=\cdots\\&=\sum_{j=1}^{k}\nu\left(\left(A\backslash\bigcup_{i=1}^{j-1}E_i\right)\cap E_j\right)+\nu\left(A\backslash\bigcup_{j=1}^{k}E_j\right).\end{aligned}$$

因此，对一切 k，

$$\nu(A)\geqslant\sum_{j=1}^{k}\nu\left(\left(A\backslash\bigcup_{i=1}^{j-1}E_i\right)\cap E_j\right)+\nu\left(A\backslash\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right).$$

从而

$$\nu(A)\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\nu\left(\left(A\backslash\bigcup_{i=1}^{j-1}E_i\right)\cap E_j\right)+\nu\left(A\backslash\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right) \tag{1.8}$$

另一方面，

$$A\cap\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j=\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(\left(A\backslash\bigcup_{i=1}^{j-1}E_i\right)\cap E_j\right).$$

因此，利用(1.5)式并根据(1.8)式得：

$$\nu(A)\leqslant\nu\left(A\cap\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)+\nu\left(A\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\nu\left(\left(A\setminus\bigcup_{i=1}^{j-1}E_i\right)\cap E_j\right)+\nu\left(A\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)\leqslant\nu(A).$$

从而，$\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\in\mathscr{M}$，故 $\mathscr{M}$ 为 σ-域。

又设 $E_1,E_2,\cdots$是 μ 中不交集列，在(1.8)式中取 $A=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$，得

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\nu(E_j)$$

结合(1.5)式知 ν 是定义在 $\mathscr{M}$ 上的测度。 □

若对任意集合 A，均存在 ν- 可测集 E，使得 $E\supset A$ 且 $\nu(A)=\nu(E)$，则称外测度 ν 为**正则的**。

引理 1.3

若 ν 为正则外测度且$\{A_j\}$是一个递增集列，则

$$\lim_{j\to\infty}\nu(A_j)=\nu(\lim_{j\to\infty}A_j).$$

证明：对每个 j 取 ν- 可测集 E_j 满足 $E_j\supset A_j$ 且 $\nu(E_j)=\nu(A_j)$，利用(1.4)式和定理1.1(c)，有

$$\nu(\lim A_j)=\nu(\underline{\lim}A_j)\leqslant\nu(\underline{\lim}E_j)\leqslant\underline{\lim}\,\nu(E_j)$$

$$=\lim\nu(A_j)$$

由(1.4)式可得相反不等式。 □

设(X,d)是一个度量空间(我们通常取 X 为 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$，并具有通常距离函数 d)。由 X 的闭集族生成的 σ- 域中的集合称为空间的 Borel 集。Borel 集包含开集(作为闭集的余集)、F_σ 型集(可列个闭集的并)和 G_δ 型集(可列个开集的交)等。

设 ν 是定义在度量空间 X 上的外测度，若对任何**绝对分离**的集合 E 和 F，即

$$d(E,F)=\inf\{d(x,y):x\in E,y\in F\}>0,$$

有

$$\nu(E\cup F)=\nu(E)+\nu(F)\tag{1.9}$$

则称 ν 是 X 上的**度量外测度**。

可以证明，若 ν 是度量外测度，则 ν- 可测集的族包含所有 Borel 集。其证明基于下面 Carathéodory 引理。

引理 1.4

设 ν 是(X,d)上的度量外测度，$\{A_j\}_1^{\infty}$ 是 X 的一个递增子集列，记 $A=\lim_{j\to\infty}A_j$，假设对每个 j，$d(A_j,A\setminus A_{j+1})>0$，则

$$\nu(A)=\lim_{j\to\infty}\nu(A_j).$$

证明：只需证明

$$\nu(A)\leqslant\lim_{j\to\infty}\nu(A_j) \tag{1.10}$$

因为相反的不等式可以从(1.4)式推得。

记 $B_1=A_1$ 且对 $j\geqslant 2$，$B_j=A_j\setminus A_{j-1}$. 若 $j+2\leqslant i$，则 $B_j\subset A_j$，且 $B_i\subset A\setminus A_{i-1}\subset A\setminus A_{j+1}$，故 B_i 与 B_j 是绝对分离的。因而，应用(1.9)式$(m-1)$次，得

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{m}B_{2k-1}\right)=\sum_{k=1}^{m}\nu(B_{2k-1})$$

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{m}B_{2k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\nu(B_{2k}).$$

我们可以假定这两个和式都收敛（否则，必有 $\lim\limits_{j\to\infty}\nu(A_j)=\infty$），由于 $\bigcup\limits_{k=1}^{m}B_{2k-1}$ 和 $\bigcup\limits_{k=1}^{m}B_{2k}$ 均包含在 A_{2m} 中，故

$$\begin{aligned}\nu(A)&=\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)=\nu\left(A_j\cup\bigcup_{k=j+1}^{\infty}B_k\right)\\&\leqslant\nu(A_j)+\sum_{k=j+1}^{\infty}\nu(B_k)\\&\leqslant\lim_{j\to\infty}\nu(A_j)+\sum_{k=j+1}^{\infty}\nu(B_k)\end{aligned}$$

由于 $j\to\infty$ 时，$\sum\limits_{k=j+1}^{\infty}\nu(B_k)$ 趋于0，(1.10)式得证。 □

定理 1.5

设 ν 是定义在(X,d)上的度量外测度，则 X 的所有 Borel 子集都是 ν-可测的。

证明：因 ν-可测集形成一个 σ-域，而 Borel 集形成一个包含 X 的所有闭集的最小 σ-域，故只需证明对于闭集 E 和任意集 A，(1.7)式成立。

设 A_j 是 $A\setminus E$ 中到 E 的距离至少为 $1/j$ 的点组成的集合。则 $d(A\cap E,A_j)\geqslant 1/j$，因而，根根 ν 是度量外测度，对每个 j，有

$$\nu(A\cap E)+\nu(A_j)=\nu((A\cap E)\cup A_j)\leqslant\nu(A) \tag{1.11}$$

由于 $\{A_j\}$ 是递增集列且 E 是闭集，$A\setminus E=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j$。因此，对所有 j，只需证 $d(A_j,A\setminus E\setminus A_{j+1})>0$。引理 1.4 给出 $\nu(A\setminus E)\leqslant\lim\limits_{j\to\infty}\nu(A_j)$ 且从(1.11)式得(1.7)式。而若 $x\in A\setminus E\setminus A_{j+1}$，存在 $z\in E$，使得 $d(x,z)<1/(j+1)$，故若 $y\in A_j$，则 $d(x,y)\geqslant d(y,z)-d(x,z)>1/j-1/(j+1)>0$，从而 $d(A_j,A\setminus E\setminus A_{j+1})>0$. □

另一类不同于 Borel 集的一种非常重要的集类是由闭集的交和并明确地定义。设(X,d)是一个度量空间，Souslin 集是形式为

$$E=\bigcup_{i_1i_2\cdots}\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{i_1i_2\cdots i_k}\quad,$$

的集合，其中对每个有限正整数序列$\{i_1,\cdots,i_k\}$集合 $E_{i_1i_2\cdots i_k}$ 是闭集。需指出的是，虽然E是

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com