College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

浙江大学　盛　骤　谢式千　潘承毅　编

# 概率论与数理统计
# 学习辅导与习题选解

浙大·二、三版

高等教育出版社

大学数学学习辅导丛书

# 概率论与数理统计
# 学习辅导与习题选解

浙大·二、三版

浙江大学　盛　骤　谢式千　潘承毅　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

**图书在版编目（CIP）数据**

概率论与数理统计学习辅导与习题选解/盛骤，谢式千，潘承毅编. —北京：高等教育出版社，2003.4

ISBN 7-04-011955-2

Ⅰ.概… Ⅱ.①盛…②谢…③潘… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 014546 号

**责任编辑**：徐　可　　**封面设计**：王凌波

**版式设计**：杨　明　　**责任印制**：杨　明

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-64054588 |
| 社　　址 | 北京市东城区沙滩后街 55 号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100009 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn<br>http://www.hep.com.cn |
| 传　　真 | 010-64014048 | | |

经　　销　新华书店北京发行所

印　　刷　中国农业出版社印刷厂

| | | | |
|---|---|---|---|
| 开　　本 | 850×1168　1/32 | 版　　次 | 2003 年 4 月第 1 版 |
| 印　　张 | 11.25 | 印　　次 | 2003 年 4 月第 1 次印刷 |
| 字　　数 | 280 000 | 定　　价 | 15.00 元 |

# 前　言

本书是编者所编的《概率论与数理统计》(第三版)(高等教育出版社 2001 年出版)(以下简称《教材》或教材)和《概率论与数理统计》(第二版)(高等教育出版社 1989 年出版)的配套学习辅导教材.

本书旨在帮助读者掌握概率论与数理统计课程的基本内容和解题方法;帮助读者提高学习效率.

本书的内容与《教材》的内容平行,紧扣教材.分十三章:第一章至第五章为概率论部分,第六章至第九章为数理统计部分,第十章至第十二章为随机过程部分,最后一章是《教材》"选做习题"的全解.前十二章每章内容分为四节:1.内容提要　便于读者在学习时提纲挈领地掌握课程内容.2.例题　通过典型例题的示范,指导读者解题,帮助读者掌握解题步骤与方法,指出易犯的错误,并究其原因,澄清不正确的想法.3.练习题　数量不多,其中有判断题,能考查读者对一些基本概念是否清楚,读者通过解这些题目还能自我评价对课程内容的掌握程度以增强学习效果.4.《教材》习题选解　对二版、三版习题中较为复杂或概念性较强的或不易搞清楚的题目做了题解.第十三章是《教材》中"选做习题"的全解,这部分习题内容涉及课程的多个部分,其中有少数题目有点难.

通过我们对例题和习题的解题示范,使读者对于如何着手解题,如何思考有所启发.通过对本书的学习能提高读者的分析问题、解决实际问题的能力,加深对基本内容的理解和掌握,并能开阔视野,还会增强学好这门课程的信心和兴趣.

关于题解,我们希望读者先自行思考,自己解题,然后与题解

进行对照.如果自己不动手去做题,只是照抄,那是无益的.

由于二版、三版书页次和习题编号不同,在书末附有引文中涉及两本书的页码的对照表,以及习题题号的对照表.教材第三版中的“选做习题”本书中有题目和题解,持第二版教材的读者同样可以参阅.

本书可作为大学理科、工科学生学习概率论与数理统计课程的辅导教材,可供报考研究生的读者作为参考书,也可供工程技术人员作参考.

本书第一章至第九章以及第十三章由盛骤、谢式千编写;第十章至十二章由潘承毅编写.

本书承浙江大学范大茵教授详细地审阅,她提出许多宝贵意见,对此我们表示衷心的感谢.

本书不足之处,诚恳地希望读者批评指正.

盛 骤 谢式千 潘承毅

2003年2月

# 目　　录

# 第一章　概率论的基本概念

## 一、内容提要

1. **随机试验、样本空间**

具有以下特点的试验称为**随机试验**，简称**试验**.

试验可以在相同的条件下重复进行；每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

随机试验 $E$ 的所有可能结果组成的集合称为 $E$ 的**样本空间**，记为 $S$. 样本空间的元素，即 $E$ 的每个结果，称为**样本点**.

2. **随机事件**

试验 $E$ 的样本空间 $S$ 的子集称为 $E$ 的**随机事件**，简称**事件**. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**.

一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 样本空间 $S$，它是 $S$ 自身的子集，它包含所有的样本点，在每次试验中它总是发生的，称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 也作为样本空间的子集，它不包含任何样本点，在每次试验中它都不发生，称为**不可能事件**.

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然按集合论中集合之间的关系和集合的运算来处理. 这些关系与运算在概率论中的提法和含义如下：

设试验 $E$ 的样本空间为 $S$，$A$、$B$ 是 $S$ 的子集.

1° 若 $A \subset B$,则称事件 $B$ 包含事件 $A$,这指的是事件 $A$ 发生必导致事件 $B$ 发生.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,即 $A = B$,则称事件 $A$ 与事件 $B$ **相等**.

2° 事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**和事件**.

当且仅当 $A,B$ 中至少有一个发生时,事件 $A \cup B$ 发生.

3° 事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**积事件**.

当且仅当 $A,B$ 同时发生时,事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 也记为 $AB$.

4° 事件 $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**差事件**,当且仅当 $A$ 发生且 $B$ 不发生时事件 $A - B$ 发生.

5° 若 $A \cap B = \varnothing$,则称事件 $A$ 与 $B$ 是**互不相容的,或互斥的**.这指的是事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生.基本事件是两两互不相容的.

6° 若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$,则称事件 $A$ 与事件 $B$ 互为**逆事件**.又称事件 $A$ 与事件 $B$ 互为**对立事件**.这指的是,对每次试验,事件 $A$、$B$ 中必有一个发生,且仅有一个发生. $A$ 的对立事件记为 $\bar{A}$, $\bar{A} = S - A$.

**3. 频率与概率**

在相同的条件下,进行了 $n$ 次试验,在这 $n$ 次试验中,事件 $A$ 发生的次数 $n_A$ 称为事件 $A$ 发生的**频数**.比值 $n_A/n$ 称为事件 $A$ 发生的**频率**,记为 $f_n(A)$.当试验次数 $n$ 较小时,频率 $f_n(A)$ 在 0 与 1 之间随机波动,其幅度较大;而当 $n$ 逐渐增大时,频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数,这种"频率的稳定性",即通常所说的**统计规律性**.

**概率的定义** 设 $E$ 是随机试验, $S$ 是它的样本空间.对于 $E$ 的每一个事件 $A$ 赋于一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 $A$ 的**概率**,

如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

$1^\circ$ 非负性:对于每一个事件 $A$,有 $P(A)\geqslant 0$;

$2^\circ$ 规范性:对于必然事件 $S$,有 $P(S)=1$;

$3^\circ$ 可列可加性:设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件,即对于 $i\neq j$,$A_iA_j=\varnothing$,$i,j=1,2,\cdots$,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

概率有以下的一些重要性质:

性质 i $P(\varnothing)=0$.

性质 ii(有限可加性) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 iii 设 $A,B$ 是两个事件,若 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A);$$

$$P(B)\geqslant P(A).$$

性质 iv 对于任一事件 $A$,

$$P(A)\leqslant 1.$$

性质 v(逆事件的概率) 对于任一事件 $A$,有

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

性质 vi(加法公式) 对于任意两事件 $A,B$,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

### 4. 等可能概型(古典概型)

具有以下两个特点的试验称为**等可能概型**,也称**古典概型**.

$1^\circ$ 试验的样本空间 $S$ 的元素只有有限个;

$2^\circ$ 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

在古典概型中事件 $A$ 的概率的计算公式是

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}.$$

5. **条件概率**

设 $A,B$ 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 $A$ 发生的条件下事件 $B$ 发生的**条件概率**.

6. **三个重要公式**

1° **乘法公式** 设 $A,B,C$ 是三个事件，且有 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(B\mid A)P(A).$$

设 $P(AB)>0$，则有

$$P(ABC)=P(C\mid AB)P(B\mid A)P(A).$$

2° **全概率公式** 设试验 $E$ 的样本空间为 $S$. $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 $E$ 的事件，且 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S, B_iB_j=\varnothing$, $i\neq j, P(B_i)>0, i,j=1,2,\cdots,n$，则有

$$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)+\cdots+P(A\mid B_n)P(B_n).$$

3° **贝叶斯公式** 设试验 $E$ 的样本空间为 $S, A, B_1, B_2,\cdots, B_n$ 是 $E$ 的事件，且 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S, B_iB_j=\varnothing$, $i\neq j, P(A)>0, P(B_i)>0, i,j=1,2,\cdots,n$，则有

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}, i=1,2,\cdots,n.$$

7. **事件的独立性**

设 $A,B$ 是两个事件，如果满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件 $A,B$ **相互独立**，简称 $A,B$ **独立**.

设 $A,B,C$ 是三个事件，如果满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称事件 $A,B,C$ **相互独立**.

一般,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 个事件,如果对于其中任意 2 个,任意 3 个,…,任意 $n$ 个事件的积事件的概率,都等于各事件概率之积,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

由定义,可以得到以下两点推论.

1° 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立,则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件也是相互独立的.

2° 若 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立,则将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件,所得的 $n$ 个事件仍相互独立.

## 二、例　题

**例 1** 设 $A,B,C,D$ 是四个事件,用 $A,B,C,D$ 的运算关系表示下列事件.

(1)$G_1$:"$A,B,C,D$ 中仅有 $A$ 发生"

注意到仅有 $A$ 发生,即为 $A$ 发生而 $B,C,D$ 均不发生,故

$$G_1=A\overline{B}\overline{C}\overline{D}.$$

(2)$G_2$:"$A,B,C,D$ 中恰有一个发生"

注意到恰有一个发生,但未指定为哪一个发生,于是可以恰为 $A$ 发生,也可恰为 $B$ 发生,也可恰为 $C$ 发生,也可恰为 $D$ 发生,故

$$G_2=A\overline{B}\overline{C}\overline{D}\cup\overline{A}B\overline{C}\overline{D}\cup\overline{A}\overline{B}C\overline{D}\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}D.$$

(3)$G_3$:"$A,B$ 中至少有一个发生而 $C,D$ 均不发生"

$A,B$ 中至少有一个发生即为 $A \cup B$ 发生，而同时 $C,D$ 均不发生，故

$$G_3 = (A \cup B)\overline{C}\overline{D}.$$

(4) $G_4$:"$A,B,C$ 中不多于一个发生，但 $D$ 发生"

"$A,B,C$ 中不多于一个发生"，即为 $A,B,C$ 中恰有一个发生或者是 $A,B,C$ 都不发生，故

$$G_4 = (A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C})D.$$

也可以这样想，"$A,B,C$ 不多于一个发生"也就是"$A,B,C$ 中至少有两个不发生"，于是 $G_4$ 也可以表示为

$$G_4 = (\overline{A}\overline{B} \cup \overline{B}\overline{C} \cup \overline{C}\overline{A})D.$$

(5) $G_5$:"$A,B$ 中至少有一个发生，$C,D$ 中至少有一个不发生"应为

$$G_5 = (A \cup B)(\overline{C} \cup \overline{D}),$$

或

$$G_5 = (A \cup B)\overline{CD}.$$

(6) $G_6$:"$A,B,C$ 中至少有一个不发生，$D$ 发生"

$$G_6 = (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})D, \quad 或 \quad G_6 = \overline{ABC}D.$$

(7) 将 $G_7 = A \cup B \cup C \cup D$ 表示成两两互不相容的事件的和事件. 表示的方法不是唯一的，例如可表示为

$$\begin{aligned} G_7 &= A \cup (B - A) \cup (C - A - B) \cup (D - A - B - C) \\ &= A \cup B\overline{A} \cup C\overline{A}\overline{B} \cup D\overline{A}\overline{B}\overline{C}. \end{aligned}$$

(8) 将 $G_8 = A \cup B \cup C \cup D$ 表示成 $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$，其中 $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset M_4$. 表示的方法不是唯一的，例如可表示为

$$G_8 = A \cup (A \cup B) \cup (A \cup B \cup C) \cup (A \cup B \cup C \cup D),$$

取 $M_1 = A, M_2 = A \cup B, M_3 = A \cup B \cup C, M_4 = A \cup B \cup C \cup D$.

注意：(i)"两事件的差"可用"对立事件"来表示，例如 $A - B = A\overline{B}, A - BC = A\overline{BC}$. (ii) 易犯的错误是，误将 $\overline{AB}$ 与 $\overline{A}\overline{B}$ 等同

起来,误以为$\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$.事实上,$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}\neq\bar{A}\bar{B}$.又如$\overline{ABC}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}\neq\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.(iii)误以为$S=A\cup B\cup C\cup D$.例如误将$\overline{ABCD}$写成$A\cup B\cup C\cup D-ABCD$.事实上,$S-(A\cup B\cup C\cup D)$可能不等于$\varnothing$,一般$S\supset A\cup B\cup C\cup D$.

**例 2**　盒中有 9 只红球,3 只白球.

(1) 在盒中随机地取 5 只球,求其中恰有 2 只白球 3 只红球(这一事件记为 $A$)的概率.

(2) 在盒中取球 5 次,每次取 1 只,作不放回抽样,求其中恰有 2 只白球 3 只红球(这一事件记为 $B$)的概率.

(3) 在盒中取球 5 次,每次取 1 只,作放回抽样,求其中恰有 2 只白球 3 只红球(这一事件记为 $C$)的概率.

**解**　(1) 在盒中取 5 只球,每一种取法为一样本点,现不考虑取球的次序,样本点的总数为$\binom{12}{5}$.对于事件 $A$ 而言,在 3 只白球中任取 2 只共有$\binom{3}{2}$种取法,又在 9 只红球中任取 3 只共有$\binom{9}{3}$种取法,由乘法原理得 $A$ 中包含的样本点的总数为$\binom{3}{2}\binom{9}{3}$.于是

$$P(A)=\binom{3}{2}\binom{9}{3}\Big/\binom{12}{5}=7/22.$$

若考虑取球的次序,样本点的总数为 $A_{12}^5$,对于事件 $A$ 而言,先不考虑取球的次序共有$\binom{3}{2}\binom{9}{3}$种取法,再将取出的 5 只球进行全排列,故若考虑取球的次序取球的方法有$\binom{3}{2}\binom{9}{3}\times 5!$种.于是

$$P(A)=\binom{3}{2}\binom{9}{3}\times 5!\Big/A_{12}^5=7/22.$$

也可以这样来考虑,先在 5 个位置中挑出 2 个位置放白球,共有$\binom{5}{2}$种挑选法.再者白球有 $3\times 2=A_3^2$ 种取法,而红球有 $9\times 8\times 7$

$=A_9^3$ 种取法，故 $A$ 中包含的样本点数为 $\binom{5}{2}A_3^2A_9^3$. 于是

$$P(A)=\frac{\binom{5}{2}A_3^2A_9^3}{A_{12}^5}=\frac{\binom{5}{2}3\cdot2\cdot9\cdot8\cdot7}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}=7/22.$$

(2) 这种取球方法与(1)中考虑次序的取球方法一样，故 $P(B)=P(A)$，即有

$$P(B)=\frac{\binom{5}{2}3\cdot2\cdot9\cdot8\cdot7}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}=7/22.$$

(3) 在盒中取 5 只球，每一种取法为一样本点，考虑取球的次序，因第 1 次有 12 只球可供抽取，第 2 次，…，第 5 次均有 12 只球可供抽取，由乘法原理共有 $12\times12\times12\times12\times12=12^5$ 种取法，即样本空间中样本点的总数为 $12^5$. 在 5 个位置中挑出 2 个位置放白球，共有 $\binom{5}{2}$ 种挑选法，再者白球有 $3\times3=3^2$ 种取法，红球有 $9\times9\times9=9^3$ 种取法，故 $C$ 中包含 $\binom{5}{2}3^2\times9^3$ 个样本点，因而

$$P(C)=\frac{\binom{5}{2}\cdot3^2\cdot9^3}{12^5}=\frac{135}{512}.$$

本题(1)或(2)易犯的错误是将 $P(A)$ 或 $P(B)$ 误写成 $\dfrac{\binom{3}{2}\binom{9}{3}}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}$(即分母考虑取球次序，而分子未考虑次序)；或误写成 $\dfrac{3\cdot2\cdot9\cdot8\cdot7}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}$(即分子未考虑白球与红球之间的排列次序).

**例3** (1) 将 8 只球随机地放入编号为 1,2,3,4 的四只盒子中去，试求 1 号盒子恰有 2 只球，2 号盒子恰有 3 只球的概率.