报考研究生丛书之六

结构力学复习纲要

沈鹏程 主编

合肥工业大学学报编辑部

报考研究生丛书之六

结构力学复习纲要

沈鹏程 主编

合肥工业大学学报编辑部

一九八三年九月

编 辑 说 明

《报考研究生丛书》是为了帮助广大青年学生复习有关课程，应考研究生，根据部颁教学大纲和招考研究生的要求而编写的，包括政治、英语、化工、数学、物理、力学等类课程。力求使同学们通过学习，进一步掌握基本原理、明确基本概念、提高分析问题和解决问题的能力。本丛书可作为在校学生辅导读物，也可供有关教师和工程技术人员参考。

《报考研究生丛书》主编宋权、副主编席庆义。

* * *

丛书之六《结构力学复习纲要》由沈鹏程、张裕怡、李永霞编写。其中第一、二、三、六、七、九、十章由沈鹏程编写；第四、五章由张裕怡编写；第八章由李永霞编写。沈鹏程为主编，张裕怡协助作了些定稿工作。

由于编者水平所限，书中难免有缺点和错误，欢迎批评指正。

一九八三年九月

目　　录

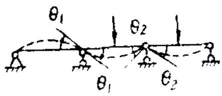
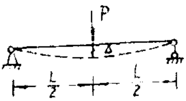
第一章　引　论

在结构力学中，主要有两类计算方法。一类为静力法，它是从平衡、几何、物理三方面的条件直接建立结构内力与位移为基本未知量的代数方程组或微分方程的边值与初值问题，求解这些方程即可得到问题的解答。另一类为能量法，它将平衡、几何、物理三方面的条件统一在能量原理的方程中，从而求得各种问题的精确解与近似解。自从本世纪六十年代有限元法的诞生与发展以来，能量原理在结构分析中又进一步获得了新的生命力。这两类方法都是结构分析中广泛应用的基本方法。

一、静力法概念

静力法是由平衡、几何、物理三方面条件直接建立起来的结构分析方法。

表1—1

平衡条件		几何条件	物理条件
$F=0\quad M=0$		位移变形的协调性	力与位移的关系或应力应变关系
平面问题	空间问题		虎克定律$\sigma=E\varepsilon$  
$F=\begin{Bmatrix}\sum\limits_{i=1}X_i\\ \sum\limits_{i=1}^{m}y_i\end{Bmatrix}$	$F=\begin{Bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{m}X_i\\ \sum\limits_{i=1}^{m}y_i\\ \sum\limits_{i=1}^{m}Z_i\end{Bmatrix}$	$\theta_1=\theta_1'$位移协调 $\theta_2\neq\theta_2'$位移非协调	

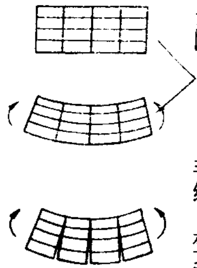
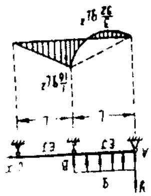
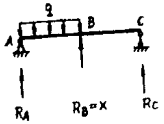
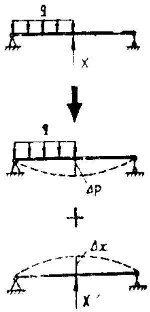
$M=\sum_{i=1}^{m}M_{0\,i}$	$M-\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}(M_x)_i\\ \sum_{i=1}^{m}(M_y)_i\\ \sum_{i=1}^{m}(M_z)_i\end{cases}$		连续或变形协调 非连续或变形非协调	由材料力学 $\Delta=\frac{pL^3}{48EI}=f\cdot P$ 其中 $f=\frac{L^3}{48EI}$ 或 $P=k\cdot\Delta$ 其中 $k=\frac{48I}{L^3}$ f、k 分别称柔度系数和刚度系数。且 $f\cdot k=1$

表1—2

简单超静定梁	应用平衡条件	应用物理条件	应用几何条件
 M图	 $\Sigma y=0$ R_A+X+R_C $-qL=0$ $\Sigma M_A=0$ $XL+2LR_C$ $-\frac{qL^2}{2}=0$ 二个方程式包含三个未知量X、R_A R_C结构为一次超静定、必须应用物理条件和几何条件，才能求解。	 由材料力学可知 $\Delta_p=-\frac{5q(2L)^4}{768EI}$ $=-\frac{5qL^4}{48EI}$ $\Delta_x'=\frac{x(2L)^3}{48EI}$	$\Delta_B=\Delta_x+\Delta_p$ 考虑到B支座线位移Δ_B为零， 即 $\Delta_B=0$ $\frac{X(2L)^3}{48EI}-\frac{5qL^4}{48EI}=0$ 解出： $X=\frac{5}{8}qL\uparrow$

	先由几何条件解出未知力X后，再将X值代回入平衡方程，解出$R_A=\frac{7}{16}qL\uparrow$，$R_C=\frac{1}{16}qL\downarrow$最后作出M图。

二、能量法概念

能量法是将平衡、几何、物理三方面条件统一在能量原理方程中所建立起来的结构分析方法。

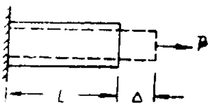
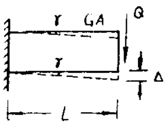
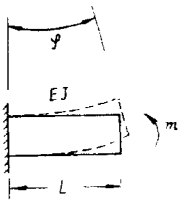
1. 外力功与应变能（或称变形能）

根据能量守恒原理，结构在变形过程中，省略能量的各种损耗，则应变能在数值上等于外力功。

现将各种受力形式的杆件的外力功、应变能及结构的应变能分别表示在表（1－3）（1－4）中。

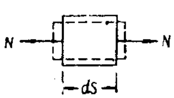
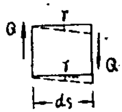
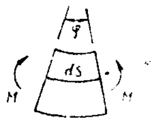
对于线弹性体，余外力功与外力功相等，余应变能与应变能相等。

表1—3

	轴力状态	剪切状态	弯曲状态
受力形式			

外力功W	$W_P=\frac{1}{2}P\cdot\Delta$ 由物理关系 $\Delta=\frac{PL}{EA}$ 则有 $W_P=\frac{P^2L}{2EA}$	$W_Q=\frac{1}{2}Q\cdot\Delta$ 由物理关系 $\Delta=\frac{QL}{GA}$ 则有 $W_Q=\frac{Q^2L}{2GA}$	$W_m=\frac{1}{2}m\cdot\varphi$ 由物理关系 $\varphi=\frac{mL}{EI}$ 则有 $W_m=\frac{m^2L}{2EI}$

表(1—4)

	轴力单元	剪切单元	弯曲单元
受力图			
应变能	$dU_N=\frac{N^2dS}{2EA}$	$dU_Q=\frac{Q^2dS}{2GA}$	$dU_m=\frac{M^2dS}{2EI}$

结构的变形能

$$U=\Sigma\int_S\frac{N^2dS}{2EA}+\Sigma\int_S\frac{M^2dS}{2EI}+\Sigma\int_S\frac{\mu Q^2dS}{2GA}$$

式中：μ——不均匀剪应力修正系数。

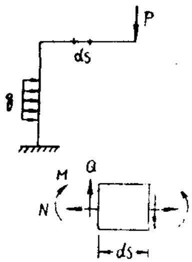


图1-1

由能量守恒原理，结构的外力功等于其应变能　　$W=U$

2. 能量法

能量法分两种，一种是将平衡、物理方面的条件统一在余能方中，再由余能极小原则（即几何条件）建立基本未知量方程。求解此方程，即得问题的解答。这叫余能法或最小应变能法。另一种是将物理、几何方面的条件统一在势能方程中，再由势能极小原则（即平衡条件）建立基本未知量方程，求解此方程，即得问题的解答，这叫势能法（各种算例可详见第二章）。

现以上述简单超静定梁为例来说明如何应用最小应变能法来求解问题。

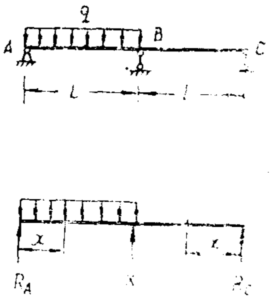


图1-2

（1）平衡条件

取B支座反力为基本未知量X，由梁的平衡条件求得A、C支座反力，

$$R_A=\frac{3qL}{4}-\frac{X}{2}\text{，}R_c=\frac{qL}{4}\frac{X}{2}\text{。}$$

（2）物理条件

由应变能公式（略去剪切效应）$U=\Sigma\int_s\frac{M^2ds}{2EI}$（在导出应变能公式时，已用了虎克定律，即物理条件）。然后列出M方程，计算出应变能，

$$U=\int_0^L\frac{(R_Ax-\frac{1}{2}qx^2)^2dx}{2EI}+\int_0^L\frac{(R_Cx)^2dx}{2EI}$$

$$=\frac{1}{2EI}\left(R_A^2\frac{L^3}{3}-R_A\frac{qL^4}{4}+\frac{qL^5}{20}+\frac{R_c^2L^3}{3}\right)$$

（3）几何条件

将结构的应变能对超静定未知力X求导，亦即取应变能极小值，（这等价于变形协调性条件——即几何条件）有

$$\frac{\partial U}{\partial X}=\frac{\partial U}{\partial R_A}\cdot\frac{\partial R_A}{\partial X}+\frac{\partial U}{\partial R_B}\frac{\partial R_B}{\partial X}=0\quad，\quad 得$$

$$(qL-X)\frac{L^3}{6}=\frac{qL^4}{16}$$

解出X值　$X=\frac{5}{8}qL$

将上述X值回代入R_A、R_c式中，就得

$$R_A=\frac{7}{16}qL\qquad R_c=\frac{1}{16}qL$$

这个结果与上面用静力法求出解答完全相同。

三、复习要点

1．结构分析中的静力法是由平衡、几何、物理三方面条件直接建立以位移或应力为基本未知量的线性代数方程组，未知量数目等于方程数目。且可获得唯一性解答。静力法适用于结构的静力、动力、稳定性问题。

2．在结构分析中，若精确满足上述三个方面条件的，则得到的解答是问题的精确解。若其中有些条件被放松，不能严格满足，则所得到的解为近似解答。

3．若结构是静定的，取力作为基本未知量，只需要平衡条件即可求解，无需使用物理，几何条件。若取位移为基本未知量，则上述三方面条件都必须要用上。

在静力法中，可分为力法、位移法、混合法三种。取力作为基本未知量的，称力法；取位移作为基本未知量的，称位移法；同时选取力和位移二类基本未知量的，称混合法。

4．结构分析中的能量法是将平衡、几何、物理三方面条件统一在能量原理方程式中从而求得问题的解。它和静力法在本质上是等价（详见后面章节）的。

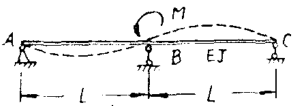
5．应用余能法或最小应变能法求解问题时，首先选取超静定未知

力作为基本未知量，利用平衡条件和应变能公式，计算出整个结构的应变能值（以超静定未知力为函数），然后将总的应变能分别对各个超静定未知力求导並令其为零，即可得超静定未知力系的线性方程组。求解此方程组，就得到各超静定未知力值，再利用平衡方程式可求出其它各未知力。能量法也同样适用于结构的静力、动力、稳定性问题。

6．若结构是静定的，並取力作为基本未知量，利用平衡条件，即可求出问题的解。此时无需用能量法。若取位移作为基本未知量，则需要用势能法来求解。在能量法中，和静力法一样，可取力、位移或同时取力与位移为基本未知量来求解问题。

练习题

1．试用静力法与最小应变能法求解图示连续梁。並作出M图。

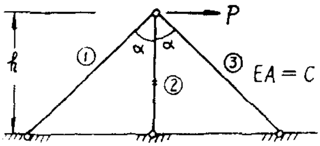


题1-1

〔答案〕 $M_{BA}=+\frac{M}{2}$

$M_{BC}=-\frac{M}{2}$

2．试用静力法与最小应变能法，求解图示桁架的内力。提示：取②杆内力X作为基本未知量。



题1-2

〔答案〕 $N_2=X=0$

$N_1=\frac{P}{2\sin\alpha}$（拉力）

$N_3=-\frac{P}{2\sin\alpha}$（压力）

第二章　能量原理

一、　主要内容

（一）结构分析中的能量原理及其相互关系

变形体的虚功原理

变形体的虚功原理是：若变形连续体处于平衡状态，则外力虚功等于虚变形能（或虚应变能）。它是结构力学中的一个基础性的原理。虚功原理又可表现为虚位移原理与虚力原理等形式表2—1，它们的关系见表2—1。

虚 功 原 理

变形协调系统

$$P^T u = \int_V \sigma^T \varepsilon \, dv \qquad (2-1)$$

力的平衡系统

或 $$\int_S p^T u \, ds = \int_V \sigma^T \varepsilon \, dv$$

虚 位 移 原 理	虚 力 原 理
虚设的变形协调系统 $P^T \bar{u} = \int_V \sigma^T \varepsilon \, dv \quad (2-2)$ 实际的力的平衡系统	实际的变形协调系统 $u^T \bar{P} = \int_V \varepsilon^T \bar{\sigma} \, dv \quad (2-3)$ 虚设的力的平衡系统

虚单位位移原理	虚单位力原理
$\bar{u}=1$虚设的变形协调系统	实际的变形协调系统
$P\cdot 1=\int_V \sigma^T \bar{\varepsilon}\,dv$ （2—4）	$u\cdot 1=\int_V \varepsilon^T \bar{\sigma}\,dv$（2—5）
实际的力的平衡系统	$P=1$虚设的力的平衡系统

表2—1中：

P—平衡系统上集中荷载列阵。

σ—平衡系统上荷载列阵引起的应力列阵。对于平面问题，$\sigma=[\sigma_x\ \sigma_y\ \tau_{xy}]^T$。

u—变形协调系统上的位移列阵。

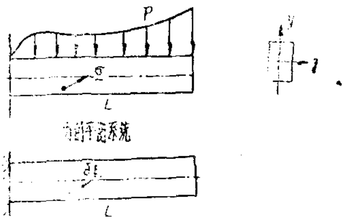


图2—1

ε—变形协调系统上由位移列阵引起的应变列阵

p—分布面力

上述虚位移原理等价于平衡条件；虚力原理等价于变形协调性条件。

2、变形体的余虚功原理

变形连续体处于平衡状态（包含域内及其边界上），若体系满足几何协调性条件，则任何偏离平衡态状的虚力和虚应力在真实位移和应变上的外力余虚功等于余虚应变能。

上述变形体的余虚功原理（虚力原理）等价于变形体协调性条件

3、最小总势能原理

变形线性连续体，在一切可能的位移状态中，那些满足平衡条件的

移位状态，能使总势能为最小值。

最小总势能原理是由虚功原理（虚位移原理）导出，它等价于平衡条件。

4、最小总余能原理

若变形线性连续体满足平衡条件的一切应力状态中，那些满足变形协调性的应力状态能使总余能有最小值。

最小总余能原理是由余虚功原理（虚力原理）导出，它等价于变形协调性条件。

5、卡氏第一定理

弹性体在荷载$P_1\ P_2\cdots\cdots P_i\cdots P_n$作用下处于平衡状态，则弹性体在荷载作用处发生相应的位移$u_1\ u_2\cdots\cdots u_i\cdots u_n$，若将此弹性体的应变能用 $u_1\ u_2\cdots\cdots u_i\cdots\cdots u_n$ 表示，则弹性体的应变能对任意一位移 u_i 的偏导数等于对应的荷载 P_i 。卡氏第一定理等价于一组平衡方程，因为它是由最小总势能原理导出来的。

6、卡氏第二定理

弹性体在荷载 $P_1P_2\cdots\cdots P_k\cdots\cdots P_n$ 作用下处于平衡状态，弹性体在荷载作用处发生相应的位移 $u_1u_2\cdots\cdots u_n$ 。若将此弹性体的应变能用$P_1\ P_2\cdots\cdots P_n$ 来表示。则弹性体的应变能对任意一个荷载 P_k 的偏导数等于对应的位移 u_k 。卡氏第二定理等价于一组位移方程。因为它是由最小总余能原理导出来的。

表2—2

7、能量原理的基本公式及其相互关系

虚功原理（虚位移原理） 虚设变形协调系统 $\int_s P^T \delta u \, ds = \int_v \sigma^T \delta e \, dv$ （2—6） 力的平衡系统 虚功原理与平衡条件具有等价性	余虚功原理（虚力原理） 变形协调系统 $\int_s u^T \delta p \, ds = \int_v e^T \delta\sigma \, dv$ （2—7） 虚设的力的平衡系统 余虚功原理与变形协调性条件具有等价性
最小总势能原理（平面问题） $\delta \pi = 0 \qquad \delta^2 \pi > 0$ （2—8） $\pi(u', v') > \pi(u, v)$ u, v 为正确解，u'，v' 为任意一解。 总势能为 $\pi = \int_v \frac{1}{2} e^T D e \, dv - \int_s u^T \bar{P} \, ds$ （2—9） 最小总势能原理等价于平衡条件	最小总余能原理（平面问题） $\delta \pi_C = 0 \qquad \delta^2 \pi_C > 0$ （2—10） $\pi_C(\sigma_x' \sigma_y' \tau'_{xy}) > \pi_C(\sigma_x \sigma_y \tau_{xy})$ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$为正确解，$\sigma_x'$，$\sigma_y'$，$\tau'_{xy}$。为任一解 总余能为 $\pi_C = \int_v \frac{1}{2} \sigma^T D^{-1} \sigma \, dv - \int_s p^T \bar{u} \, dv$ （2—11） 最小总余能原理等价于协调性条件

卡 氏 第 一 定 理	卡 氏 第 二 定 理
$U=U(u_1\ u_2\cdots\cdots u_n)$	$U_c=U_c\ (P_1\ P_2\cdots\cdots P_n)$
$P_i=\dfrac{\partial U}{\partial u_i}\qquad (i=1,2\cdots\cdots n)\qquad (2-12)$	$u_k=\dfrac{\partial U_c}{\partial P_k}\qquad (k=1,2\cdots\cdots n)\qquad (2-13)$
卡氏第一定理等价于一组平衡方程	卡氏第二定理等价于一组位移方程

对于平面刚架，表（2—2）中，

$$\sigma=[\sigma_x\ \sigma_y\ \tau_{xy}]^T=[(\frac{N}{A}+\frac{M}{I}y)\ 0\ \frac{Q}{A}]^T$$

$$\varepsilon=[\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \tau_{xy}]^T=[(\frac{N}{EA}+\frac{My}{EI})\ \varepsilon_y\ \frac{Q}{GA}]^T$$

$$D^{-1}=\frac{1}{E}$$

从表（2—2）可以看出：有二个系统，一个以虚功原理（虚位移原理）为基础，导出最小总势能原理，卡氏第一定理，它们都体现了平衡条件；另一个以余虚功原理(虚力原理)为基础，导出最小总余能原理，卡氏第二定理，它们都体现了变形协调性条件。而这二个系统正好分别与位移法和力法相对应。在结构力学中，位移法取位移作为基本未知量，事先要满足几何边界条件，所要建立的是平衡方程，所以，虚功原理，最小总势能原理，卡氏第一定理均可导出位移法方程；力法取力作为基本未知量，事先要满足平衡条件，所要建立的是位移方程，所以，余虚功原理，最小总余能原理，卡氏第二定理可导出力法法方程。

(二)结构位移计算公式的推导

应用虚力原理或余虚功原理来导出结构位移计算的一般公式。

1、荷载作用情况

根据图(2—2)所示结构，应用虚单位力原理导出结构在荷载作用下位移计算的一般性公式。

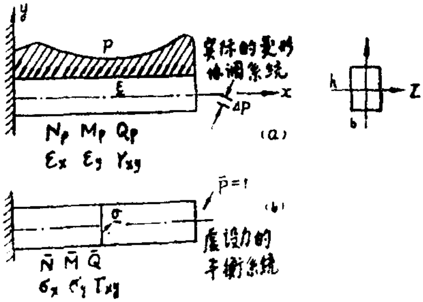


图2—2

根据虚单位力原理，对结构中的某一根杆，有

$$1.\Delta_p=\int_v \bar{\sigma}^T \varepsilon \, dv \qquad (1)$$

在虚设的力的平衡系统中，由材料力学可知：

$$\bar{\sigma}=[\sigma_x \ \ \sigma_y \ \ \tau_{xy}]^T=[(\frac{\bar{N}}{A}+\frac{\bar{M}}{I}y) \ \ 0 \ \ \frac{\bar{Q}}{A}]^T \qquad (2)$$

在实际的变形协调系统中，由材料力学可知：

$$\varepsilon=[\varepsilon_x \ \ \varepsilon_x \ \ \gamma_{xy}]^T=[(\frac{N_p}{EA}+\frac{M_p}{EI}y) \ \ \varepsilon_y \ \ \frac{Q_p}{GA}]^T \qquad (3)$$

将(2)(3)代入(1)

$$\Delta_p=\iiint\left[(\frac{\bar{N}}{A}+\frac{\bar{M}}{I}y)\cdot(\frac{N_p}{EA}+\frac{M_p}{EI}y)+\frac{\bar{Q}}{A}\cdot\frac{Q_p}{GA}\right]dxdydz$$

$$=\iiint\frac{\bar{N}N_p}{A^2E}dAdx+\iiint\frac{\bar{N}M_p}{EIA}ydAdx+\iiint\frac{\bar{M}N_p}{EIA}ydAdx$$

$$+\iiint\frac{\bar{M}M_p}{EI^2}y^2dAdx+\iiint\frac{\bar{Q}Q_p}{GA^2}dAdx$$

在上述积分公式中，由于梁截面为对称，且z为中性轴，必有：