-8282

数学

课外补充读物

（供八年级学生阅读）

柯洛索夫著　王一之译

上海教育出版社

数学课外补充读物

（供八年級学生閱读）

柯洛索夫著

王一之譯

上海教育出版社

一九六二年·上海

А. А. КОЛОСОВ

КНИКА
ДЛЯ ВНЕКЛАССНОГО
ЧТЕНИЯ
ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ VIII КЛАССА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА-1958

(本书根据俄羅斯苏維埃聯邦社会主義共和國教育部教育出版社 1958 年版譯出)

数学课外补充读物

(供八年級学生閱读)

(苏)柯洛索夫著

王一之譯

*

上海教育出版社出版
(上海永福路 123 号)
上海市书刊出版业营业許可证出 090 号

中华书局上海印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：6 7/16　字数：147,000
1962 年 11 月第 1 版　1962 年 11 月第 1 次印刷
印数：1—10,000 本

統一书号：7150 · 1354

定　价：(八) 0.52 元

著者的話

这本中学数学补充讀物是供八年級的同学閱讀的，九年級和十年級的同学也可以閱讀.

青年讀者在这本书里，可以找到他已經在課堂上学过的一些知識的补充材料.

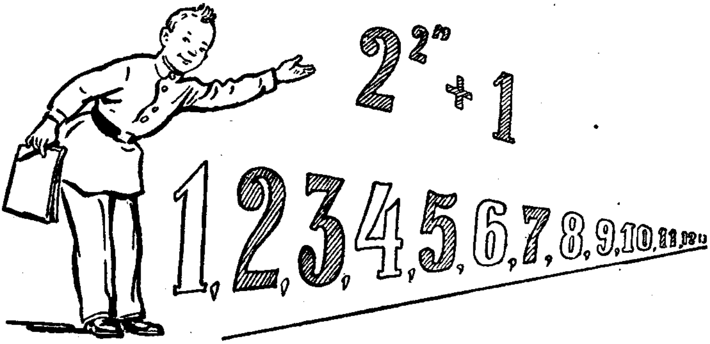
不論是教师还是学生，在課堂上根本就沒有时間深入研究課堂上所学习的教材，也沒有时間更广泛地指出它的实际应用，以及从数学史中和对某些曾把新的概念記入这門出色科学的学者的生活作一些情况报道. 著者希望这本书在某种程度上能够帮助同学独立地弥补上面所指出的不足. 同时，这本书也只是使同学更广泛地认識数学的一个开始. 現在在我們的图书館里，可以选出內容丰富并且十分易懂的关于初等数学各种問題的书籍. 閱讀这些书籍，无疑可以扩大数学知識的領域.

讀者不要以为数学讀物只包括些消遣材料，这本书里部分材料就需要“拿着鉛笔”来“閱讀”呢.

著者对科尔捷姆斯基、杰普曼、普魯特尼科夫和别斯金致以深切的謝意，他們看过原稿并提供了不少宝貴指示，使本书得以更为完善.

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com



第一章 自然数列

1.

由于計数的結果,在人們的意識中才出現了自然数列(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8……)的概念.自然数列的开始形成,便是数学建立的第一步.

現在我們可以毫不費力地把自然数列无限地延續下去.实际上,随便取哪一个自然数,也不必管它是多么大,只要給它添上 1,就可以得到一个新的数,它在自然数列中的顺序,是在已知数后面的一个位置上.但是,人类幷不是一下子就有自然数列可以无限延續下去的思想的.在很早以前,自然数列是很短的,当人們只能数到 3 时,再往下数就是“非常多”了.久而久之,人們先学会利用刻痕、谷粒等来数,接着就用最初的“計算机”(自己的手指)来数,逐渐把自然数列延續下去.又过了一个

相当长的时期，他們才感觉到并且意識到这个数列是无限的.

跟两千多年前阿基米德所提出的問題相类似的一些問題一样，自然数列是无限的这一思想，在人們的意識中巩固起来了. 阿基米德在他的“論数砂”（Псаммит）著作里，解决一个在宇宙范圍內数砂子的問題. 他不认为宇宙是无边无际的（其实宇宙是无边无际的），但是在他的概念里宇宙却是很大的. 阿基米德把宇宙想象成是个球体，在球体的表面上有很多恒星，而地球、太阳和行星就处在这些恒星的中間. 阿基米德认为这个球体的半徑等于 15×10^{12} 公里（换算成我們現代的长度）. 在建立起特殊的記数法以后，他解出了他所提出的問題. 在“阿基米德的宇宙”范圍內，砂子的数目大約等于 10^{63}. 这个数相当大，它在自然数列中所占的位置是在很后面了.

2.

創立了自然数列后，人們也就应当发明一种記数法，用少数符号表示这个数列中的各个数. 許多世紀以来，各民族所发明的各种記数法，在現在已被十进位制記数法所替代. 十进位制記数法只需要十个符号——数字 1、2、3、4、5、6、7、8、9 和 0——就可以写出自然数列中的任何一个数.

十进位制記数法比其他方法优越的特征之一是，它使用了地位制，虽然这个地位制（下面我們就要看到）并不是这个計数法所固有. 按照这个規則，每一个数字所表示的数是由它所在的位置来确定的，例如：从右往左数，写在第一位上的数表示个位数，写在第二位上的数表示十位数，写在第三位上的数表示百位数. 有了地位制后，使得表示十、百、千和其他順序单位所規定的特別符号成为多余.

我們在书写任何一个数时常常会忘記，发明我們現在所使

用的这个书写方法（地位制記数法）是一件了不起的历史事件；而在我們偶尔想起这个事件的时候，又会感到困惑不解，为什么古代的学者就沒有发明这个記数法呢？

十九世紀著名的法国数学家拉普拉斯說："用九个符号表示一切的数，使符号除具有形式的意义外，还有数位的意义．这一思想是如此簡单，以致无法理解它的奇妙程度．就拿希腊学术界中最偉大而最有天才的阿基米德和阿波罗尼两人来說，他們也沒有想出这种記数法，可見达到这一成就是多么不容易呀"．

十进位制記数法的发明要归功于誰呢，归功于哪一个学者，哪一个学派还是哪一个民族呢？正如数学中許多事件一样，不能把十进位制記数法的发明认为是属于某一个别的数学家或者某一个学派的．印度在很多世紀以前，就已經使用了类似的写数法．大家知道，印度人减少了数字的数目，并且把它們减少到十个（其中也包括 0 在內）．他們还采用了十进位制計数的地位制原则，并且开始使用数字 0．是印度人自己想到了这个历史性的发明，还是他們借用巴比倫人（早在太古时期他們就利用六十进位制記数法了）的数位概念？也許这种概念是从"苏麦連人"那儿轉化出来的——这很难說．但是，数位記数概念的发展和数字 0 的使用，毫无疑問，这个功劳是属于印度人的．

也不能不指出烏兹别克学者穆罕默德（他是花剌子模的穆沙的儿子）的偉大功勛，他在九世紀时，把印度数学家的这个发明，傳到属于阿拉伯人的近东地区．穆罕默德也是个数学家，他在自己的一本手稿里，刻划并且发揮了十进位制記数法的概念．这本手稿是用阿拉伯文字——当时近东的科学文字写成．这就是我們现在所用的数字所以叫做阿拉伯数字的原因．

穆罕默德的著作很可能是在九世紀被阿拉伯人傳入欧洲

的，随着它的傳入，在欧洲也傳播了十进位制記数法．可是，正如一切新事物一样，这个簡单明了得令人吃惊的記数方法，好不容易才在广大群众中，并且在学术界中傳开，而且直到十二、十三世紀时它才最后地巩固下来，代替了从前的、更复杂的方法．

十进位制記数法傳入俄罗斯要迟得多．虽然十五世紀的文献資料就已經证明俄罗斯人熟悉印度数字，但在十七世紀以前，俄罗斯基本上还是使用古斯拉夫的数字（它們不采用地位制）．古斯拉夫数字是用 27 个符号——斯拉夫字母表的字母——代替数字的．为了区别于原来的字母，在它上面加上个特殊的符号．

下面便是古斯拉夫記数法的符号：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
个	А҃	В҃	Г҃	Д҃	Є҃	Ѕ҃	З҃	И҃	Ѳ҃
十	І҃	К҃	Л҃	М҃	Н҃	Ѯ҃	О҃	П҃	Ч҃
百	Р҃	С҃	Т҃	У҃	Ф҃	Х҃	Ѱ҃	Ѡ҃	Ц҃
千	҂А҃	҂В҃	҂Г҃	҂Д҃	҂Є҃	҂Ѕ҃	҂З҃	҂И҃	҂Ѳ҃

用上面这些符号，数 1957 可以写成：

҂А҃ЦН҃З

沒有数位原則的古斯拉夫数字已被現代的十进位制記数法所替代．

各个时期和各种民族的数字										
現在	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
埃及	1	2	3	4	22	33	37	44	ζ	/
巴比倫	𒁹	𒈫	𒐈	𒐉	𒐊	𒐋	𒑂	𒑄	𒑆	𒌋
中国	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
中国	〡	〢	〣	〤	〥	〦	〧	〨	〩	十
日本	1	乃	ノ	ニ	ホ	∧	ト	干	ソ	ヌ
东阿拉伯	1	٢	٣	ξ	Δ	٦	V	Λ	9	
歐洲X世紀	1	2	ȝ	ʂ	ƀ	ч	V	7	9	
Ⅶ世紀	ʖ	∂	3	e	4	σ	Λ	𝔤	9	
Ⅷ世紀	ι	2	ɜ	4	9	σ	Λ	8	9	
XIV世紀	ι	7	3	x	7	6	∩	8	9	
1508年	i	2	3	4	5	6	7	8	9	
古希腊	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\delta}$	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varsigma}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{\eta}$	$\bar{\theta}$	ι
罗馬	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X

3.

我們現在使用的記数法叫做**十进位制記数法**，因为它是以十为計算基础的．十的特殊作用溯自最古时代，毫无疑义，是跟

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

用两手的手指計算有密切关系的．数位的概念使十进位制的任何一个数，有可能按照十的各次幂写成多项式．例如，数 3256 可以写成下面形式的多项式：

$$3256=3\cdot10^3+2\cdot10^2+5\cdot10+6.$$

同样，任何整数 z 可以写成：

$$z=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\cdot10+a_0.$$

这里，a_n、a_{n-1}、$\cdots\cdots a_0$ 是这个整数各位上的数字．

毫无疑問，曾經有过不是以十为基数的其他进位制．在各种語言里数的名称就指出了这点．例如，在英語和德語里，表示 11 和 12 的詞就不是按照十进位的原則构成的，也就是不是十和个位数組合成的，它們的构成跟表示 10 这个数的詞毫无关系．在法語里，表示 20 和 80 这两个数的詞的构成，可以使人假定，当初存在着以 20 为基数的进位制．但是，不管什么数作为进位制的基数，为了书写数目，就需要有这个基数所具有的单位那么多的符号(数字)．基数小的进位制需要的数字少，但是写出的数却很长．用基数大的进位制写出的数就較短，但它需要較多的数字，而且乘法表也較难記忆．

让我們看看用不同的进位制該怎样书写同一个数．例如数四百六十八．

用十进位制它可以写成：468．

让我們用五进位制来写这个数．先要弄清在这个数里有几个五，就是第二个数位上有几个单位：

$$\begin{array}{r}468\div5=93,\\ -45\\ \hline 18\\ -15\\ \hline ③\end{array}$$

这样，在数 468 里，第一个数位上有 3 个单位，第二个数位上有

93 个单位．但是，第二个数位上的每 5 个单位等于第三个数位上的 1 个单位．因此还要弄清在 93 这个数里有多少个第三个数位上的单位：

$$
\begin{array}{r}
93 \div 5 = 18. \\
-5\phantom{{}\div 5 = 18.} \\
\hline
43\phantom{{}\div 5 = 18.} \\
-40\phantom{{}\div 5 = 18.} \\
\hline
\textcircled{3}\phantom{{}\div 5 = 18.}
\end{array}
$$

余数 3 就是第二个数位上单位的个数，商数 18 就是第三个数位上单位的个数．让我們再弄清在第三个数位上 18 个单位里有多少个第四个数位上的单位：

$$
\begin{array}{r}
18 \div 5 = \textcircled{3}. \\
-15\phantom{{}\div 5 = \textcircled{3}.} \\
\hline
\textcircled{3}\phantom{{}\div 5 = \textcircled{3}.}
\end{array}
$$

这样，十进位制数 468 換算成五进位制可以写成 3333.

利用下列等式可以把它还原成十进位制数：

$$3333 = 3\cdot5^3 + 3\cdot5^2 + 3\cdot5 + 3 = 375 + 75 + 15 + 3 = 468.$$

現在让我們說明怎样把十进位制数 468 換算成三进位制．我們按下列的排列方式来計算：

$$
\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
468 & 3 & & & & \\
\underline{16} & \underline{156} & 3 & & & \\
\underline{18} & \underline{6} & \underline{52} & 3 & & \\
\textcircled{0} & \textcircled{0} & \underline{22} & \underline{17} & 3 & \\
 & & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \underline{5} & 3 \\
 & & & & \textcircled{2} & \textcircled{1}
\end{array}
$$

这样，我們看到，十进位制数 468 換算成三进位制可以写成 122100.

如果把它还原成十进位制数，就得到：

$$
\begin{aligned}
122100 &= 1\cdot3^5 + 2\cdot3^4 + 2\cdot3^3 + 1\cdot3^2 + 0\cdot3 + 0 \\
&= 243 + 162 + 54 + 9 + 0 + 0 = 468.
\end{aligned}
$$

这个数如果用十二进位制，可以写成：330.

試把它还原成十进位制数.

但是，如果你想用十二进位制来写 131 这个数，我們的九个数字便显得不够用了，还必須引入两个新符号——表示 10 和 11 的数字. 設用符号  表示 10，符号  表示 11，那末

$$\begin{array}{r} 131:12=10 \\ -120 \quad\;\; \\ \hline 11 \quad\;\; \end{array}$$

这个数就可以写成：.

如果把它还原成十进位制数，就得到：

 $\cdot 12+$  $=10\cdot 12+11=131.$

练习 1. 已知 15 和 12 都是用七进位制写出的，仍旧用同一进位制求出它們的乘积来. 然后再把因数和乘积换算成十进位制的相应的数后，进行驗算.

2. 已知两个数 111 和 101 是用二进位制写出的. 仍旧用同一进位制求出它們的乘积来. 然后再把因数和乘积换算成十进位制的相应的数后，进行驗算.

答：用十进位制乘积是 35.

3. 下面的乘法是用什么进位制得出的：

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times 44 \\ \hline 242 \\ +242\; \\ \hline 3212 \end{array}$$

4.

現在我們来研究自然数列的一些性质.

写出数列：

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13……

在这个自然数列中的某些数，如 2, 3, 5, 7, 11, 13……，它們只能够被 1 和自己整除，而其他的数，如 4, 6, 8, 9, 10, 12……，除了能够被 1 和自己整除以外，还能够被别的数整除．前者我們叫做**质数**，后者我們叫做**合数**①．1 既不是质数也不是合数．由于质数在算术里有很大作用，所以很早就有人竭力想作一个质数表．希腊学者爱拉托斯芬（公元前 276—195 年），在二千多年前就提出了作质数表的方法．他是著名的古代地理学家、亚历山大图书館館員．作这个表的方法現在叫做“爱拉托斯芬篩子”．

让我們来研究一下用“爱拉托斯芬篩子”来“篩”自然数列，以便从自然数列的集合中分出质数来．

設我們用下列的几个数来做：

~~1~~, 2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~,

首先，让我們划去 1，因为它既不属于质数，也不属于合数．其次，划去所有 2 的倍数，就是从 2 起（2 除外），每隔一个数划去一个数．然后再划去所有 3 的倍数，也就是从 3 起（3 除外），每隔两个数划去一个数．有时要在先前划过的数上再划一次，这些数就是 2 和 3 的倍数．这以后我們就来篩 5 的倍数，就是从 5 起，每隔四个数划去一个数．这里，同样要在某些数上再划上一次．

对于从 1 到 25 的自然数列“篩”质数的工作就告結束，因为用 7 去除 25 时，商数 3 是小于除数的．剩下的就是写出沒有划掉的数，我們也就得出自然数列前 25 个数里的全部质数如下：

① 把数分为质数和合数是毕达哥拉斯規定的．

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.$$

练习 按照上述方法作出自然数列中的从 1 到 100 之間的质数表.

爱拉托斯芬方法的逐漸改进，使得現在能够作出自然数列从 1 到 100000000 的质数表. 这个质数表給我們提供了丰富的材料，由此可以提出許多关于质数性质的假設. 这些假設的证明有时是很复杂的，而且还有某些假設直到現在还沒有得到证明.

5.

这里产生一个重要的問題，就是在自然数列中，质数的个数是有限的还是无限的.

让我們证明定理：**在自然数列中有无限多个质数.**

这个定理的正确性，可以由下列論点說明，就是假使有任意个质数 $p_1, p_2, p_3 \cdots\cdots p_n$，我們总还能够得到它們之間所沒有的新质数. 这个新质数是

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots\cdots p_n + 1$$

的质因数，它除上面这个数时，所得的商不可能同质数 $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n$ 中的任何一个相等，因为用这些质数里的任何一个质数除上述的数时，我們都得到余数 1. 用这种方法求新质数 p_{n+1} 时，在列出

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots\cdots p_n \cdot p_{n+1} + 1$$

后，我們得出下一个新质数 p_{n+2}，它是

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots\cdots p_n \cdot p_{n+1} + 1$$

和的质因子，余类推. 因此，自然数列中质数的个数是无限的.

6.

远在二千多年前，无限多个质数的定理就被欧几里德所证

实. 从那个遥远的时期起，有許多数学家企图列出一个自变数为整数 n 的公式，根据这个公式，当 n 取不同的正整数时，只能得出质数. 这些尝試是徒劳无功的，是得不出这样的公式的.

有一个时期內，人們认为下列公式能够解决上面所提出的問題:

$$f(n)=2^{2^n}+1,$$

这个公式是法国数学家費尔馬(1601—1665年)提出的. 費尔馬认为，当 n 取不同的整数值的时候，由这个公式得出的一切数都是质数. 事实上，当 $n=1$、2、3 和 4 时，我們得到:

$$f(1)=2^2+1=5;$$
$$f(2)=2^{2^2}+1=2^4+1=17;$$
$$f(3)=2^{2^3}+1=2^8+1=257;$$
$$f(4)=2^{2^4}+1=2^{16}+1=65537.$$

——都是质数. 据彼得堡科学院院士欧拉在1732年所指出，当 $n=5$ 的时候，費尔馬的这个公式是錯誤的. 数 $2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297$，这个数是合数，可以分解成因数 $641\cdot6700417$. 不久以前，借助于电子計算机查明了：数 $f(10)$ 和 $f(16)$ 是合数.

有趣的是：在我們研究能不能用圓規和直尺来作边数是质数的正多边形① 的时候，在几何学里也可以遇到“費尔馬数”.

高斯(1777—1855年)证明了下面著名的定理:

用圓規和直尺只能够作出边数是“費尔馬质数”的正多边形，也就是說，这些正多边形的边数是 $2^{2^n}+1$. 由这个定理得出的結論是：用圓規和直尺不能作出正7边形和正13边形，但却能作出正17边形和正257边形.

我們再来看另外两个能够得出許多质数的公式:

① 如果多边形的各边都相等，所有的內角也相等，那末这个多边形就叫做正多边形.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com