



教 学

R. 柯朗
H. 罗宾

著 是 什 么 ？

学 出 版 社

内 容 简 介

本书是世界著名数学家 R. 柯朗的名著之一,是介绍数学基本内容的综合性通俗读物。书中以通俗易懂的语言,深入浅出地叙述了许多数学分支的基本概念、实质和分析问题的方法,鉴于它的思想性较强,内容丰富,说理清楚,世界上许多国家都翻译出版了此书。

本书可供具有中等文化程度的读者、中专以上在校师生(特别是数学专业的师生)以及数学爱好者阅读。

R. Courant and H. Robbins

WHAT IS MATHEMATICS?

Oxford University Press, New York, 1964

数 学 是 什 么?

[美] R. 柯朗 H. 罗宾 著

左 平 张饴慈 译

责任编辑 徐一帆

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年1月第一版 开本:787×1092 1/32

1985年1月第一次印刷 印张:21 5/8

印数:0001—15,400 字数:419,000

统一书号:13031·2767

本社书号:3823·13-1

定价: ~~4.70~~ 元

3.95

译 者 的 话

R. 柯朗 (Richard Courant) 是在数学研究与数学教育上都对当代有深远影响的数学家, 是西方公认的数学权威。他于 1888 年 1 月 8 日生于鲁布里尼茨(即现在波兰的鲁布里尼克 Lubliniec), 1910 年于德国哥廷根大学获得博士学位, 以后一直在哥廷根大学任教。在哥廷根时, 他与 D. 希尔伯特关系甚密。1933 年他离开纳粹德国, 于 1934 年到美国纽约大学任教, 并曾担任了数学系主任和数学研究院院长, 在此期间, 该研究院成了世界最大的应用数学研究中心。1972 年他在纽约去世。他对数学分析、函数论、数学物理、变分法等都有精深的研究。他不仅学识渊博, 是当之无愧的大数学家, 而且一生都从事和关心数学教育。他最伟大的贡献也许就是通过他的著作和个人交往使许多年青数学家得到宝贵的启示和巨大的鼓舞。

R. 柯朗一生著作极丰, 其中最著名的是“数学物理方法”(与希尔伯特合著)、“微积分”, 还有就是“数学是什么”这本书。“数学是什么”这本书自出版以来, 受到普遍的热烈的欢迎, 并被译成多种文学, 一版再版, 盛况至今不衰, 成为数学世界名著之一。这本书对几何学, 代数学, 微积分学等各种数学分支都作了精炼而别具匠心的介绍, 它不仅内容丰富, 而且文笔流畅, 阐述精辟; 既直观易懂又严谨深刻; 使人读时爱不释手, 读

后回味无穷,确实是一本深入浅出、引人入胜的难得的佳作。阅读本书并不需要高深的数学知识,高中学生就能看懂其中大部分内容,但是本书还含有许多近代数学思想和方法,读懂这些是要化许多气力的,不过只要认真阅读,勤于思考,就一定会有不少收获。我们在此顺便指出,本书提到的一些未解决的数学问题,现在有的已经解决了,有的已经有了不同程度的进展。例如,“四色问题”,“连续统假设”,“哥德巴赫猜想”等等,请读者注意。还有,原文中个别明显的错误,我们已经作了订正。

本书虽在 1951 年曾有齐植棠等人的中译本,但流传不广,部分章节文字较艰涩,且不少术语已与目前通行的不尽相同,因此我们感到有必要根据较新版本重新翻译与出版,以期对正在为实现四个现代化而努力奋战的我国广大读者与青年能有所助益。由于我们水平有限译本中难免会有缺点和错误,欢迎各方面的批评与建议。

感谢梅向明、王景鹤、林有浩、戴镇南等同志,他们在繁重的科研和教学工作中,抽出很多宝贵的时间,仔细审阅了全部译稿。本书最后又经数学研究所胡作玄同志作了认真校阅,在此表示深切的谢意。

译 者

第一版 序 言

两千多年来，人们一直认为每一个受教育者都必须具备一定的数学知识。但是今天，数学教育的传统地位却陷入了严重的危机之中。而且遗憾的是，数学工作者却要对此负一定的责任。数学教学有时竟演变成空洞的解题训练。解题虽然可以提高形式推导的能力，但却不能导致真正的理解与深入的独立思考。数学研究已出现一种过分专门化和过于强调抽象的趋势，而忽视了数学的应用以及与其它领域的联系。不过，这种状况丝毫不能证明紧缩数学教育的政策是合理的。相反，那些醒悟到培养思维能力的重要性的人，必然会采取完全不同的作法，即更加重视和加强数学教学。教师、学生和一般受过教育的人都要求数学家有一个建设性的改造，而不是听其自流，其目的是要真正理解到数学是一个有机的整体，是科学思考与行动的基础。

某些传记性与历史性的名著以及富有启发性的普及读物，曾激起了潜在的一般兴趣。但是，借助轻松愉快的传授所得到的数学知识，决不会比通过最出色的新闻杂志对那些从未听过音乐的人进行音乐教育获得的更多。实际去接触活生生的数学内容是必不可少的。当然，应当避免走弯路或陷入技术性的细节。介绍数学不必过分注重通常例行的作法，也

不应采取生硬的教条主义的态度，因为教条主义会掩盖动机和目的，妨碍人们作实事求是的努力。实际上，我们可以由最基本的事实出发，不必拐弯抹角而直达一个可以博览近代数学的实质和动力的有利位置。

现在这本书是朝此方向的一个尝试。因为所需知识估计在高中课本中都可以找到，所以把它看成一本通俗读物也无妨。但是，这并不意味着是对那种贪图省劲，不愿作任何努力的危险倾向的让步。阅读本书要求读者在智力上比较成熟并乐意进行独立思考。本书既是为初学者也是为专家、既是为学生也是为教师、既是为哲学家也是为工程师、既是为课堂教学也是为参考阅览而写的。这个抱负可能是太大了。这本书虽经若干年的准备，但在其它工作的压力下，却是在其真正完成之前出版，故不得不作某些折衷处理。欢迎批评和建议。

无论如何，作者希望本书能对美国高等教育有所贡献，以表对这个国家给我的机会的谢意。此书的计划与观点应由本人负责，而任何荣誉与奖赏则必须与 H. 罗宾(Herbert Robbins) 共享。自从他参加这项工作以后，就全力以赴地完成了他的事项，并且本书能以现在这种形式完成，他的合作是决定性的因素。

(下略)

R. 柯朗

第二、三、四版序言

近些年来,在许多事情的推动下,人们对数学知识与训练的需要日益增加。现今,除非学生和教师设法超越数学的形式主义,并努力去把握数学的实质,否则产生受挫和幻灭的危险将会更甚。这本书就是写给这样的学生和教师的。人们对第一版的反应鼓舞了作者,使作者敢于期望本书对读者会有所助益。

许多读者的批评使得本书作了多方面的修正与改进。

R. 柯朗

本书的用法

本书虽是按系统的次序写就的，但并不要求读者逐页逐章地去读。例如历史和哲学的介绍最好推迟到读完本书其余部分之后再读。各章之间基本上是独立的。每章开头通常是容易理解的，然后逐渐加深，到每章的末尾及补充就相当难了。因此，对于那些想作一般了解基于要求专门知识的读者来说，可以满足于一些有选择的材料，而略去详细讨论的部分。

数学基础较差的学生必须有所选择地阅读。带星号(*)的部分和小体字印刷的部分在初次阅读时可以略去，这对理解后面的部分不会有多大影响。再者，也不妨只研究读者最感兴趣的那些章节。大部分的习题都是精选的，比较困难的则用星号标出。读者如对其中的许多问题不能解决也不足为怪。

在“几何作图”和“极大与极小”这些章节中，高中教师能为课外活动小组或一些选定的学生找到有益的材料。

我希望本书既能为大学生、研究生，也能为对科学有真正兴趣的专业人员提供帮助。本书也可作为关于数学基本概念的一个非常规的大学基础教材。第三、四、五章可用作几何教材，而第六、八章合在一起形成一个自成系统的微积分教材，它不像通常的微积分课本，而是强调理解。这些材料对于那些按特殊需要补充一些资料，以及想提供更多的例题以使内

容更为生动的教师来说，都可当作初步教材。散布在本书各个部分的大量习题以及书末增补的一些习题使本书更便于在课堂教学中使用。

我还希望专家们能对某些细节和含有进一步发展的萌芽的初步讨论感到兴趣。

目 录

译者的话

第一版序言

第二、三、四版序言

本书的用法

数学是什么? 1

第一章 自然数 7

 引言 7

 § 1 整数的计算 8

 1. 算术的规律(8) 2. 整数的表示(12) 3. 非十进制中的
 计算(15)

 § 2 数系的无限性 数学归纳法 19

 1. 数学归纳法原理(19) 2. 等差级数(22) 3. 等比级数
 (24) 4. 前 n 项平方和(25) 5. 一个重要的不等式(27) 6.
 二项式定理(28) 7. 再谈数学归纳法(31)

第一章补充 数论 34

 引言 34

 § 1 素数 35

 1. 基本事实(35) 2. 素数的分布(40)

 § 2 同余 49

 1. 一般概念(49) 2. 费尔玛定理(55) 3. 二次剩余(57)

 § 3 毕达哥拉斯数和费尔玛“定理” 60

 § 4 欧几里得辗转相除法 63

1. 一般理论(63) 2. 在算术基本定理上的应用(69) 3. 欧拉函数 φ 再谈费尔玛定理(70) 4. 连分数 丢番都方程(72)

第二章 数学中的数系	76
引言	76
§1 有理数	76
1. 作为度量工具的有理数(76) 2. 数学内部对有理数的需要推广的原则(79) 3. 有理数的几何解释(82)	
§2 不可公度线段 无理数和极限概念	84
1. 引言(84) 2. 十进位小数 无限小数(88) 3. 极限 无穷等比级数(91) 4. 有理数和循环小数(96) 5. 用区间套给出无理数的一般定义(98) 6. 定义无理数的另一个方法 戴特金分割(101)	
§3 解析几何概述	103
1. 基本原理(103) 2. 直线方程和曲线方程(105)	
§4 无限的数学分析	109
1. 基本概念(109) 2. 有理数的可数性和连续统的不可数性(111) 3. 康托的“基数”(117) 4. 反证法(120) 5. 有关无限的悖论(122) 6. 数学的基础(123)	
§5 复数	124
1. 复数的起源(124) 2. 复数的几何解释(128) 3. 棣莫弗公式和单位根(135) 4. 代数基本定理(139)	
§6 代数数和超越数	142
1. 定义和存在性(142) 2. 柳维尔定理和超越数的构造(143)	
第二章补充 集合代数	149
1. 一般理论(149) 2. 在数理逻辑中的应用(154) 3. 在概率论中的一个应用(157)	
第三章 几何作图 数域的代数	160
引言	160
I 不可能性的证明和代数	164
§1 基本几何作图	164

1. 域的构造和开平方根(164) 2. 正多边形(167) 3. 阿波罗尼斯问题(170)	
§ 2 可作图的数和数域	172
1. 一般理论(172) 2. 可作图的数都是代数数(181)	
§ 3 三个不可解的希腊问题	183
1. 倍立方体问题(183) 2. 关于三次方程的一个定理(185) 3. 三等分任意角(187) 4. 正七边形(189) 5. 关于化圆为方的问题(191)	
II 作图的各种方法	192
§ 4 几何变换 反演	192
1. 一般说明(192) 2. 反演的性质(194) 3. 反演点的几何作图(196) 4. 只用圆规如何二等分一线段及求圆心(198)	
§ 5 用其它工具作图 只用圆规的马歇罗尼作图	199
1. 倍立方体的古典作图(199) 2. 只限于用圆规(200) 3. 用机械工具作图 机械曲线 旋轮线(206) 4. 连杆 波西里叶和哈特的反演器(209)	
§ 6 再谈反演及其应用	212
1. 角的不变性 圆族(212) 2. 在阿波罗尼斯问题上的应用(216) 3. 重复反射(217)	
第四章 射影几何 公理体系 非欧几里得几何	220
§ 1 引言	220
1. 几何性质的分类 变换下的不变性(220) 2. 射影变换(223)	
§ 2 基本概念	224
1. 射影变换群(224) 2. 笛沙格定理(226)	
§ 3 交比	229
1. 定义和不变性的证明(229) 2. 在完全四边形上的应用(237)	
§ 4 平行性和无穷远	238
1. 作为“理想点”的无穷远点(238) 2. 理想元素和射影(242)	
3. 含有无穷远元素的交比(244)	
§ 5 应用	245
1. 初步说明(245) 2. 平面上笛沙格定理的证明(247) 3. 巴斯	

嘉定理(249) 4. 布利安桑定理(250) 5. 对偶性简介(251)	
§ 6 解析表示	253
1: 初步说明(253) 2. 齐次坐标 对偶性的代数基础(255)	
§ 7 只用直尺的作图问题	259
§ 8 二次曲线和二次曲面	262
1. 二次曲线的初等度量几何(262) 2. 二次曲线的射影性质(265)	
3. 二次曲线看作线曲线(270) 4. 关于二次曲线的巴斯嘉和布利安桑的一般定理(274) 5. 双曲面(277)	
§ 9 公理体系和非欧几何	279
1. 公理方法(279) 2. 双曲非欧几里得几何(284) 3. 几何与现实(289) 4. 庞加莱的模型(291) 5. 椭圆几何或黎曼几何(292)	
附录 高维空间中的几何学	294
1. 引言(294) 2. 解析的方法(295) 3. 几何的方法或组合的方法(298)	
第五章 拓扑学	303
引言	303
§ 1 多面体的欧拉公式	305
§ 2 图形的拓扑性质	310
1. 拓扑性质(310) 2. 连通性(312)	
§ 3 拓扑定理的其它例子	314
1. 若当曲线定理(314) 2. 四色问题(316) 3. 维的概念(318)	
4. 不动点定理(323) 5. 纽结(327)	
§ 4 曲面的拓扑分类	328
1. 曲面的亏格(328) 2. 曲面的欧拉示性数(331) 3. 单侧曲面(333)	
附录	338
1. 五色定理(338) 2. 多边形的若当曲线定理(341) 3. 代数基本定理(344)	
第六章 函数和极限	348
引言	348

§ 1 变量和函数	349
1. 定义和例子(349) 2. 角的弧度制(355) 3. 函数的图象 反函数(356) 4. 复合函数(360) 5. 连续性(362) 6. 多元函数(365) 7. 函数和变换(369)	
§ 2 极限	371
1. 序列 a_n 的极限(371) 2. 单调序列(378) 3. 欧拉数 e (381) 4. 数 π (384) 5. 连分数(386)	
§ 3 连续趋近的极限	390
1. 引言 一般定义(390) 2. 极限概念的评述(392) 3. $\sin x/x$ 的极限(395) 4. 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限(398)	
§ 4 连续性的精确定义	400
§ 5 有关连续函数的两个基本定理	403
1. 布尔查诺定理(403) 2. 布尔查诺定理的证明(404) 3. 维尔斯特拉斯极值定理(405) 4. 有关序列的一个定理 紧致集(408)	
§ 6 布尔查诺定理的一些应用	410
1. 几何上的应用(410) 2. 力学问题上的一个应用(413)	
第六章补充 极限和连续的一些例题	416
§ 1 极限的例题	416
1. 一般说明(416) 2. q^n 的极限(417) 3. $\sqrt[n]{p}$ 的极限(418) 4. 不连续函数当作连续函数的极限(421) 5. 极限的叠代求法(422)	
§ 2 连续性的例题	425
第七章 极大与极小	427
引言	427
§ 1 初等几何中的问题	428
1. 两边给定求面积极大的三角形(428) 2. 赫伦定理 光线的极值性质(429) 3. 三角形问题上的应用(432) 4. 椭圆和双曲线的切线性质 相应的极值性质(433) 5. 到给定曲线的距离的极值(437)	
§ 2 基本极值问题的一般原则	440

1. 原则(440) 2. 例题(442)	
§ 3 驻点与微分学	444
1. 极值和驻点(444) 2. 多元函数的极大和极小 鞍点(446) 3. 极小极大点和拓扑学(448) 4. 点到曲面的距离(449)	
§ 4 施瓦茨的三角形问题	450
1. 施瓦茨的证明(450) 2. 另一种证法(453) 3. 钝角三角形(456) 4. 由光线形成的三角形(457) 5. 有关反射和遍历运动的说明(459)	
§ 5 施泰纳问题	460
1. 问题及解答(460) 2. 两种不同情况的分析(462) 3. 一个补充问题(465) 4. 说明与习题(466) 5. 推广到道路网问题(467)	
§ 6 极值与不等式	469
1. 两个正量的算术平均和几何平均(470) 2. 推广到 n 个变量(472) 3. 最小二乘法(474)	
§ 7 极值的存在性 狄里赫莱原理	476
1. 一般说明(476) 2. 例题(479) 3. 初等极值问题(481) 4. 比较复杂情形中所存在的困难(483)	
§ 8 等周问题	485
§ 9 带有边界条件的极值问题 施泰纳问题和等周问题之间的联系	489
§ 10 变分法	493
1. 引言(493) 2. 变分法 费尔玛光学原理(494) 3. 贝努利对捷线问题的处理(497) 4. 球面上的测地线与极大-极小(499)	
§ 11 极小问题的实验解法 肥皂膜实验	500
1. 引言(500) 2. 肥皂膜实验(501) 3. 普拉图问题的几种新实验(503) 4. 其它数学问题的实验解法(508)	

第八章 微积分

引言

§ 1 积分

1. 面积看作是一个极限(517) 2. 积分(519) 3. 积分概念的一

般说明 一般定义(524) 4. 积分举例 x^r 的积分(526) 5. “积分运算”的法则(533)	
§ 2 导数	538
1. 把导数看作是斜率(538) 2. 导数看作是一极限(539) 3. 例题(543) 4. 三角函数的导数(547) 5. 可微性和连续性(549) 6. 导数和速度 二阶导数和加速度(549) 7. 二阶导数的几何意义(553) 8. 极大与极小(554)	
§ 3 微分法	555
§ 4 莱布尼兹的记号和“无穷小”	564
§ 5 微积分基本定理	568
1. 基本定理(568) 2. 初步应用 x^r , $\cos x$, $\sin x$ 的积分 $\arctg x$ (572) 3. 表示 x 的莱布尼兹公式(575)	
§ 6 指数函数与对数函数	578
1. 对数的定义和性质 欧拉数 e (578) 2. 指数函数(582) 3. e^x , a^x , x^r 的微分公式(585) 4. 用极限表示 e , e^x 和 $\ln x$ 的表达式(586) 5. 对数的无穷级数展开式 数值计算(590)	
§ 7 微分方程	594
1. 定义(594) 2. 指数函数的微分方程 放射性元素的蜕变 增长率 复利(595) 3. 其它例题 简谐振动(600) 4. 牛顿动力学定律(602)	
第八章 补充	605
§ 1 原理方面的内容	605
1. 可微性(605) 2. 积分(608) 3. 积分概念的另一一些应用 圆弧长(610)	
§ 2 数量级	614
1. 指数函数和 x 的幂(614) 2. $\ln(n!)$ 的数量级(617)	
§ 3 无穷级数和无穷乘积	619
1. 函数的无穷级数(619) 2. 欧拉公式 $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ (626)	
3. 调和级数和 Zeta 函数 正弦的欧拉乘积(629)	
§ 4 用统计方法得到素数定理	634
附录 补充说明 问题和习题	639

算术和代数	639
解析几何	642
几何作图	649
射影几何和非欧几何	651
拓扑学	652
函数、极限和连续性	657
极大与极小	658
微积分	661
积分法	664