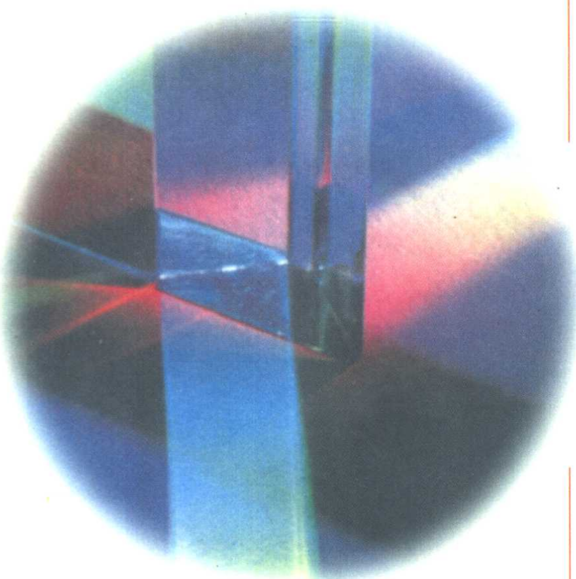
◆中学教师继续教育教材◆

数学教学问题

杨国疆
杜树芳 / 编著



辽宁师范大学出版社

数学教学问题

杨国疆
杜树芳
编著

辽宁师范大学出版社

数学教学问题

杨国疆
杜树芳 编著

辽宁师范大学出版社出版
（大连市黄河路 850 号　邮政编码　116029）
金城印刷厂印刷　　辽宁师范大学出版社发行

开本：787×1092 毫米 1/32　字数：216 千字　印张：10
印数：3301～8300 册
2000 年 4 月修订本　　2000 年 4 月第 2 次印刷

责任编辑：何　成　　责任校对：何　丽
封面设计：魏　东　　版式设计：白　水

ISBN 7-81042-299-5/G・185
定价：12.50 元

如发现印装质量问题，请与印刷厂调换

中学教师继续教育教材

总编委会

数学教学学科教材编委会

序

国家振兴，教育为本；教育振兴，教师为本。通过继续教育提高中小学教师的素质，建设一支适应时代发展需要的师资队伍，是深化基础教育改革、全面实施素质教育的迫切要求，是培养千百万合格的社会主义事业的建设者和接班人的大事。

当代世界教育迅猛发展，各国正在面向21世纪，建立适合人的个性发展的终身教育体系，“管用一生的一次性教育”已被“贯穿一生的终身教育”所代替。这就决定了教师必须不断接受继续教育。我国《教师法》明确规定“接受继续教育是教师的权利和义务”。经过多年努力，到“八五”末期，教师基本完成了学历补偿教育，教师的学历达标率有了较大幅度的提高。但不容忽视的是，相当一部分教师的教育教学能力还存在着较大差距，表现为教师把握大纲和驾驭教材的能力较差，教学设计不够科学合理，教法单一，教育管理能力乏弱，教研科研能力水平较低，教学基本功不过硬等。因此，从“九五”初期开始，教师培训的重心已经转移到以提高教师的实际教育教学能力为主的继续教育上来。

根据国家教育部《关于加强在职中小学教师培训工作的意见》，适应全面实施素质教育的要求，我们组织编写了教师继续教育系列教材。这套教材是依据以提高教师教育教学能力为重点的培训宗旨，在充分调查研究和反复论证基础上完

成的。它分为思想政治和学科教育教学两类，教材内容不追求理论知识的系统性与完整性，而是侧重于专题研究，体现实用性和针对性，力求解决教育教学实践中遇到的各种实际问题。这套教材在付梓之前，经过了一年的试用，各学科编写者在广泛征求各方面意见的基础上，进行了认真的修改，教材的内容更贴近实际，更有助于提高教师的实际教育教学能力。

教师继续教育是一项系统工程，构建具有特色的教师继续教育模式更是一项艰巨的任务。目前，教师继续教育尚处于探索、研究、实践阶段，编写继续教育教材是一项正在探索的工作，教育行政部门、教师培训院校和广大基层学校只有不断的努力和探索，才能切实做好这项工作，进而提高教师的整体素质。

在这套教材正式出版之际，我谨向参与教材编写的教师们和精心审稿的专家们表示衷心的谢意，希望培训院校和教科研部门的同志们在实践中不断充实和完善它，希望教师学好课程，用好教材，服务于教育教学实践。

王允庆

2000 年 2 月

前　言

《数学教学问题》是中学数学教师继续教育的教学用书。

数学教学问题作为一门课程是一个新课题，研究领域众多，内容十分丰富，对它的内涵也众说纷纭。本书的选题以中学数学逻辑知识概要和初中数学概念以及数学意识的培养为主要内容。本书的主要读者为中学数学教师，希望通过对本书阅读，使读者在数学教学中自学遵循逻辑，提高课堂教学的质量。

本教材按《中学数学教师继续教育培训纲要》编写。第一讲、第三讲由杨国疆撰写，第二讲由杜树芳撰写。

书中采用了国内同仁的观点和资料，经专家审定并修改，这里一并致谢。

由于我们才疏学浅，时间仓促，不足之处望读者不吝赐教。

编著者

2000 年 2 月

目　　录

第一讲　中学数学逻辑知识　概要

第二讲 数学概念分析与教学

第三讲 数学意识的培养

第一讲　中学数学逻辑知识概要

一　数学逻辑基础知识

数学逻辑也称数理逻辑，是“把数学形式化方法，应用到逻辑领域的结果”，早在十七世纪，G·W·lebnitz 就提出过关于思维演算的想法，但他的这种先驱性的思想没有得到就有的发展，淹没了约一个世纪之久，直到十九世纪英国的两个数学家 A·De·Morgan 和 G·Boole 用代数方法建立了逻辑代数，逻辑代数与 Arisotas(384-322B, C)的形式逻辑本质是相似的。

1879 年德国数学家 G·Frege 建立了命题演算与一阶谓词演算，完成了初等逻辑的两个演算，产生了质的飞跃，比 Aristotas 的形式逻辑更丰富了。

目前，数学逻辑的范围，大致包括以下五个部分：

(1)逻辑演算；

(2)公理化集合论；

(3)模型论；

(4)递归论；

(5)证明论。

其中，逻辑演算是其它四个分支的共同基础。

另外，在应用方面，数学逻辑的方法和结果被应用于代数、拓扑、数学基础等许多数学领域；同时，数学逻辑的大量方

法开始运用于计算机软件的理论研究中，成为计算机科学的基础学科。

总之，数学逻辑是一门纯数学，也是一门应用数学、一门边缘性科学。

逻辑研究的主要对象是推理，一个推理是由若干命题组成的，推理的形式是由命题的形式表现的。

一类推理，只需分析命题之间的关系，无需对命题本身再进行分解，就能揭示出推理的形式，关于这类推理的逻辑，叫做命题逻辑；另一类推理，即需要对命题加以分解出所谓谓词的推理的逻辑，叫做谓词逻辑。

这里仅介绍与中学数学密切相关的命题逻辑和谓词逻辑的部分知识。

1—8 是命题逻辑部分内容；9—11 是谓词逻辑部分内容。

1　命题　命题变元

(1)命题

命题这一概念，是数学逻辑中的一个基本概念。与数学逻辑中的命题概念相比较，我们将会看到中学数学中的命题概念还是比较狭义的。

什么是命题?

所谓命题，是指具有真假意义的陈述语句。

一个陈述句所叙述的事情符合事实，我们称它为真命题；反之，一个陈述句所叙述的事情违反事实，我们称它为假命题；如果一个陈述句所叙述的事情真假不明确，那它就不是一个命题。命题的“真”与“假”，称为命题的真值，并分别用“T”、“F”表示，命题通常用字母 A、B、C 等表示。

例　判断下列语句是否为命题：

①请关门!

解:因不是陈述句,所以不是命题。

②台湾是中国的一部分。

解:是陈述句,符合事实,是真命题。

③如果两条直线都和第三条直线平行,那么这两条直线也互相平行。

解:是平面几何中的一个定理,自然也就是真命题。

④如果数 a 是 3 的倍数,那么 3a 是 9 的倍数。

解:是陈述句,符合事实,是真命题。

⑤$2+3=5$

解:是陈述句,符合事实,是真命题。

⑥$2=3$

解:是陈述句,不符合事实,是假命题。

⑦$x+2=0$

解:是陈述句,但由于 x 是什么不清楚,无法判断其真假,因而不是命题。

⑧对任意的实数 x,都有 $x>3$。

解:是陈述句,但违反事实,是假命题。

⑨两边相等的三角形,叫做等腰三角形。

解:是陈述句,是真命题(凡定义都是真命题)。

⑩哥德巴赫猜想是正确的。

解:是陈述句,所叙述事情虽暂还弄不清是否是事实,但其正确与否是客观存在的,因此是命题,其真假性待以后搞清。

⑪张红明天去日本。

解:是陈述句,可判明真假,其真假性到明天就知道了,因

而是命题。

容易看出：

(i)数学中，定义、定理、公理、性质和法则都是命题，而且都是真命题。

(ii)命题不一定能写成“如果……，那么……”的形式，例如②、⑥等。因此，就一般命题而言，不能说是由题设、结论两部分组成的。要注意，数学逻辑中的命题概念较中学数学中的命题概念来说，是广义的。

(2)简单命题与复合命题

简单命题是指不包含其它命题作为组成部分的那种命题。例如：

A：大连是个美丽的城市；

B：6 是奇数；

C：三角形内角和等于 180°；

D：有一个角是直角的三角形叫做直角三角形；

等，都是简单命题。简单命题也称原子命题，原子的含意是指不能再分解。

复合命题是包含命题作为组成部分，由其它命题组成的命题，如：

E：并非 4 是素数；

F：π 是无理数而且大于 3；

G：2 是有理数或是无理数；

H：张红明天去机场或火车站；

I：如果两条直线都和第三条直线垂直，那么这两条直线平行；

J：如果今天天气晴朗，那么我就去游泳；

等，都是复合命题，复合命题也称分子命题。

(3)命题常元与命题变元

常元是指某类特定事物中确定的一个。如在实数集这类特定事物中，2 就是一个常元；又如在实函数集合中，$f(x)=\sin x$ 就是一个常元。

一个简单命题，它的真值是确定的，这样的命题从真值确定的角度来说，称为命题常元。

变元则是指某类特定事物中的任何一个。如在实数系中，$(x\in R)$，x 就表示一个变元；又如在实函数集合中，$f(x)$表示其中任何一个，是一个变元。

一个简单句，如 $x+y>4$，记作 $p:x+y>4$，不防设 x, y 都是实数。易见 p 是一个真值不确定的简单句，p 中的 x 与 y 当给定具体值时，p 就变成一个命题，如当 $x=2, y=3$ 时，p 变为 $2+3>4$，是一个真命题；而当 $x=1, y=2$ 时，p 变为 $1+2>4$，是一个假命题。这种真值可变化的简单句，称为命题变元。通常用 p, q, r……等表示。

2　逻辑联结词及复合命题

以下介绍六个常见联结词及相应的六种复合命题。

(1)否定词$\neg$

定义 1.1　设 A 为一命题，$\neg A$ 是一复合命题，称为 A 的否命题，读作“并非 A”或读作“非 A”，符号$\neg$称为否定词。$\neg A$ 的真值由下表确定：

A	$\neg A$
T	F

A	$\neg A$
F	T

该表通常写成变元形式

A	$\neg A$
T	F
F	T

容易得出结论：$\neg A$ 真，当且仅当 A 假。

$\neg A$ 所反映的逻辑关系是：$\neg A$ 是 A 的否定。

例(1)设 A:3 是一个素数；

则$\neg A$：并非 3 是一个素数。

:3 不是一个素数。

例(2)设 A:$2\neq3$；

则$\neg A$：并非 $2\neq3$；

:$2=3$

其真值列成表如下：

A	$\neg A$
T	F

例(3)设 A：一切三角形都是等腰三角形；

B：一切三角形都不是等腰三角形。

问：A 与 B 是不是互否命题，为什么？

解答：A 是假命题，A 的真值是 F；B 也是假命题，B 的真值也是 F。因为互否命题的真值恰好相反，而 A 与 B 的的真值却相同，所以 A 与 B 不是互否命题。

我们不难发现,联结词$\neg$实际上给出由集合$\{T,F\}$到自身$\{T,F\}$的一个一元函数 f

$$f:\{T,F\}\to\{T,F\}$$

满足 $f(T)=F$

$f(F)=T$

f 称为由否定词$\neg$所确定的一元真值函数。

在形式逻辑中,A 的否命题$\neg A$,称为 A 的负命题。

(2)合取词$\wedge$

定义 1.2　设 A,B 是两命题,$A\wedge B$ 是一复合命题,称为 A 与 B 的合取命题,读作"A 且 B",符号$\wedge$称为合取词。$A\wedge B$ 的真值可由下表确定:

A	B	$A\wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

合取式 $p\wedge q$ 中含二个变元,给 p,q 一组真值,称为对 $p\wedge q$ 的一个赋值,依乘法原理,$p\wedge q$ 共有 $2^2=4$ 个赋值。

我们有结论:$A\wedge B$ 真,当且仅当 A,B 同真。

$A\wedge B$ 所反映的逻辑关系是 A 与 B 两个命题同时成立。因此,日常语言及数学中的联结词"既……又………","不但……而且……","虽然……但是……"都可以符合化为"……

$\wedge \cdots\cdots$”。

例(1)　将命题“小王既会打篮球又会打排球”符号化。

解:记 A:小王会打篮球;

B:小王会打排球。

则有　　$A \wedge B$:小王既会打篮球,又会打排球。

例(2)命题符号化且判断命题真假;不但三角形内角和等于 180°,而且对顶角相等。

解:记 A:三角形内角和等于 180°;

B:对顶角相等。

则有　　$A \wedge B$:不但三角形内角和等于 180°而且对顶角相等。

由于 A 与 B 都取 T,既同真,故 $A \wedge B$ 为真。

例(3)分别就命题 A,B 以下情形,判断命题 $A \wedge B$ 的真假。

a)A:2 是 $x<3$ 的一个解;

B:1 是 $x<3$ 的一个解。

解:由

A	B	$A \wedge B$
T	T	T

得知　　$A \wedge B$

为真命题。

b)A:2 是 $x<3$ 的一个解;

B:4 是 $x>5$ 的一个解。