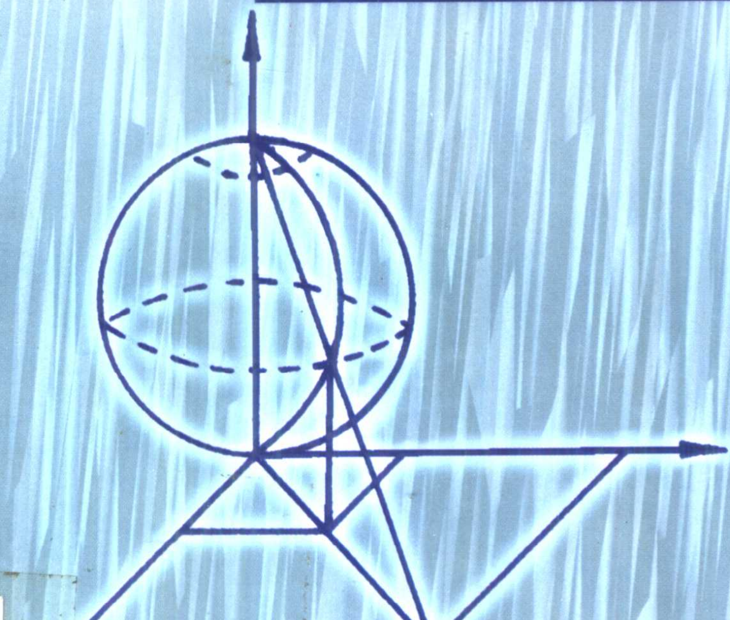
C W F F C Y F B H S

常微分方程与复变函数

主编 张静茹 符秀华



黄 河 水 利 出 版 社

常微分方程与复变函数

主　编　张静茹　符秀华
副主编　陈梅华　张松枝

黄河水利出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程与复变函数/张静茹,符秀华主编. －郑州:黄河水利出版社,1999.8

ISBN 7－80621－326－0

Ⅰ.常… Ⅱ.①张… ②符… Ⅲ.①常微分方程 ②复变函数 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 36685 号

责任编辑:雷元静	封面设计:朱　鹏
责任校对:王才香	责任印制:常红昕

出版发行:黄河水利出版社

地址:河南省郑州市顺河路黄委会综合楼 12 层　邮编:450003

发行部电话:(0371)6302620　传真:6302219

E-mail:yrcp@public2.zz.ha.cn

印　　刷:郑州文华印刷厂

开　　本:850mm×1168mm　1/32	印　　张:11.75
版　　别:1999 年 8 月第 1 版	印　　数:1—3 000
印　　次:1999 年 8 月郑州第 1 次印刷	字　　数:295 千字

定价:19.60 元

前　言

常微分方程与复变函数均属数学的重要分支,它们的理论和方法在数学的其他分支、自然科学与工程技术中有着非常广泛的应用.因此,这两门课程多年来一直被作为高校数学专业、理工科以及部分经济、管理等专业的必修课.但是,随着科学技术的飞速发展,新的学科(如电子计算机等)、新的知识的出现,致使传统的课程结构和课程内容的改革势在必行.为适应新的课程结构的需要,根据国家教育部"面向21世纪教学内容和教学体系的研究"精神,我们在传统的常微分方程、复变函数这两门课程内容的基础上,进行了适当的删减和合理的压缩,合并编写了这本书.

本书共由三个部分组成:第一篇,常微分方程;第二篇,复变函数;第三篇,积分变换.本书在内容的选择上,尽量做到既要保持各自学科的基本概念、基本理论和方法,同时又考虑到学以致用,试图达到以较少的课时,让学生掌握较多的必备知识之目的.在编写方法及文字叙述上,力求深入浅出,循序渐进,通俗易懂,便于读者学习.另外,在每节及每章的最后,都配备了适量的习题,并在章末附有习题答案及部分提示,以帮助读者及时巩固基本概念,加强基本方法与技能的训练之用.在使用对象上,适用于师范、理工院校等有关专业的学生以及广大科技人员或自学者.不同专业与学习对象可据本专业及本人所需内容进行取舍.如第三篇是专为理工科部分专业及工程技术人员而设置的,对师范类数学专业不做要求.书中标有"*"的内容,对非数学专业不做要求.

参加本书编写的有:张静茹(第1、3章)、刘庆芝(第2章)、张松枝、王春莲(第4章)、胡玉英、薛洪(第5、6章)、李翎(第7章)、

陈梅华(第8、9章)、符秀华(第10、11章).本书由张静茹、符秀华任主编,陈梅华、张松枝任副主编.

在该书的编写过程中,河南教育学院关长铭教授仔细审阅了全部书稿,并提出了很多宝贵意见.在此表示衷心的感谢.

由于作者水平有限,加之时间仓促,书中的错误及不妥之处,敬请读者不吝赐教.

编　者

1999年6月

目　　录

第一篇　常微分方程

第二篇　复变函数

第三篇　积分变换

第一篇　常微分方程

第一章　微分方程的基本概念

在诸多实际问题的研究过程中，需要首先寻求问题所涉及的变量与变量之间的函数关系，并依此对其规律性进行探讨.但在很多情况下，所需要的函数关系式往往不易直接建立，而这些变量与它们的导数(或微分)之间的关系式却能较为容易地建立起来，这种关系式就称为微分方程.本章将通过两个简单实例，初步了解微分方程的有关实际背景，并在此基础上建立起微分方程的一些基本概念.

一、微分方程的定义

先看两个实际例子.

例 1　一曲线通过$(-1,1)$点，且其上任一点处的切线在 Ox 轴上的截距等于切点横坐标的平方，求该曲线.

解　设所求曲线的方程为 $y=f(x)$，则曲线上任一点 (x,y) 处的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

由题意，该切线在 Ox 轴上的截距为

$$X=x-\frac{y}{y'}=x^2$$

于是有

$$y'(x-x^2)-y=0. \tag{1-1}$$

又知曲线过$(-1,1)$点，那么式(1-1)满足条件

$$x=-1, y=1 \tag{1-2}$$

的解即为所求曲线.

例 2 一质量为 m 的物体自空中自由下落,设空气阻力的大小与落体的速度成正比,试求物体下落距离随时间的变化规律.

解 把物体下落的铅垂线取为 y 轴,正向向下建立坐标系.设在时刻 t 时物体下落的距离为 $s=s(t)$,则物体在时刻 t 时下落的速度为 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$,加速度为 $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$.又物体受重力 mg 与空气阻力的作用,而空气的阻力与物体下落速度的方向相反,即为 $-k\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.于是,根据牛顿第二定律有

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=mg-k\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-3}$$

另外,物体的运动状态还与初始状态即物体在初始时刻($t=0$ 时)的位置和初始速度有关.若设其初始位置为 s_0,初始速度为 v_0,即

$$s\Big|_{t=0}=s_0,\qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v_0 \tag{1-4}$$

求(1-3)式满足条件(1-4)的解,即得物体下落距离随时间的变化规律.

从以上例子可以看出,两个不同的实际问题,最终都转化成了包含有自变量、未知函数及其导数的关系式(式(1-1)、(1-3)),这些关系式称为微分方程.对这些微分方程求其满足一定条件的解(将在以后各章讨论),就得所求结果.下面我们给出微分方程的一般定义.

定义 1.1 联系着自变量、未知函数及未知函数的导数(或微分)的关系式,称为微分方程.

例如,以下方程均为微分方程:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-x^4y=\sin x \tag{1-5}$$

$$y''y'''=3(y'')^2 \tag{1-6}$$

$$x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0 \tag{1-7}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-x\frac{dx}{dt}+1=0 \tag{1-8}$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0 \tag{1-9}$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=2\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1-10}$$

方程(1-5)、(1-6)中，x 是自变量，y 是未知函数；方程(1-7)中，可视 x 为自变量，y 为未知函数，也可视 y 为自变量，x 为未知函数；方程(1-8)中，t 是自变量，x 是未知函数；方程(1-9)、(1-10)中，x、y、z 都是自变量，u 是未知函数.

在此需注意，微分方程中可以不显含自变量或未知函数，但一定要出现未知函数的导数(或微分).

在微分方程中，如果自变量的个数只有一个，则称该微分方程为常微分方程；如果自变量的个数为两个或两个以上，则称该微分方程为偏微分方程.

例如，方程(1-5)～(1-8)均为常微分方程，而方程(1-9)和(1-10)为偏微分方程.由于本书只讨论常微分方程，因此今后把常微分方程简称为“微分方程”，有时更简称为“方程”.

二、微分方程的阶和解

定义 1.2 微分方程中出现的未知函数导数的最高阶数，称为微分方程的阶.

例如，方程(1-5)为二阶微分方程，方程(1-6)为三阶微分方程，方程(1-7)、(1-8)为一阶微分方程.

n 阶微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1-11}$$

这里 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ 是 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的已知函数，y 是未知函数，x 是自变量.

在此需要指出的是，在方程(1-11)中，$x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 诸变量都可以不出现，但一定要含有 $y^{(n)}$.

若能从方程(1-11)中解出最高阶导数，即得 n 阶微分方程的又一表达式

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{1-12}$$

此式也称为 n 阶显式微分方程，而把方程(1-11)称为 n 阶隐式微分方程.

定义 1.3 设函数 $y=\varphi(x)$ 在某区间上有直到 n 阶的导数.如果把 $y=\varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入微分方程(1-11)使其成为恒等式，即

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

则称函数 $y=\varphi(x)$ 为微分方程(1-11)在该区间上的解.

例如，可以直接验证：函数 $y=x^2, y=cx^2$ （c 为任意常数），都是一阶微分方程 $xy'=2y$ 的解；函数 $y=\sin x, y=\cos x$，$y=c_1\sin x+c_2\cos x$（其中 c_1、c_2 为任意常数），都是二阶微分方程 $y''+y=0$ 的解；函数 $y=1+x-3x^2, y=c_1+c_2x+c_3x^2$（其中 c_1、c_2、c_3 为任意常数），都是三阶微分程 $y'''=0$ 的解.

如果关系式 $F(x,y)=0$ 决定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 为方程(1-11)的解，我们称 $F(x,y)=0$ 为方程(1-11)的隐式解.

例如，不难验证 $x^2+y^2=1$ 为一阶微分方程 $y'=-\dfrac{x}{y}$ 的解，此解称为该方程的隐式解.为简便起见，以后不把解与隐式解加以区别，统称为微分方程的解.

从以上微分方程的解可以看到这样一个事实，它可以包含一个或几个任意常数，也可以不包含任意常数.为表明这个区别，我

们把含有 n 个独立的任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的解[●]

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

称为 n 阶微分方程(1-11)的通解；而把不包含任意常数的解 $y = \varphi(x)$，称为微分方程的特解.

显然，给定通解中的任意常数，通解就变成了特解. 而通解中的任意常数是根据实际问题所满足的条件来确定的.

设微分方程中的未知函数为 $y = y(x)$，如果微分方程是一阶的，通常用来确定任意常数的条件是

$$x = x_0, y = y_0$$

其中 x_0, y_0 都是给定的值；如果微分方程是二阶的，通常用来确定任意常数的条件是

$$x = x_0, y = y_0, y' = y_0^{(1)}$$

其中 x_0, y_0 和 $y_0^{(1)}$ 都是给定的值. 上述这些条件称为初始条件.

例如，例 1 和例 2 中，(1-2)和(1-4)式分别为一阶微分方程(1-1)和二阶微分方程(1-3)所满足的初始条件.

对于一般的 n 阶微分方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ 的初始条件为

$$x = x_0, y = y_0, y' = y_0^{(1)}, \cdots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

其中 $x_0, y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n + 1$ 个常数.

● 所谓函数 $y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 含有 n 个独立常数，其确切的含义是指 $\varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{n-1}(x)$ 关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的雅可比(Jacobi)行列式不等于零. 即

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_n} \\ \dfrac{\partial \varphi'}{\partial c_1} & \dfrac{\partial \varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi'}{\partial c_n} \\ & \cdots\cdots & & \\ \dfrac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \dfrac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

其中 $\varphi^{(k)}$ 表示 φ 对 x 的 k 阶导数.

求微分方程满足初始条件的解的问题，称为微分方程的初值问题.

例3 验证函数 $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$ （c_1, c_2 为任意常数）是微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的通解. 并求该微分方程满足初始条件 $y(0) = 1$，$y'(0) = 3$ 的特解.

解 求所给函数的一阶、二阶导数，有

$$y' = (c_1 + c_2 + c_2 x)e^x$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2 + c_2 x)e^x$$

把 y, y' 及 y'' 的表达式代入上微分方程，有

$$(c_1 + 2c_2 + c_2 x)e^x - 2(c_1 + c_2 + c_2 x)e^x + c_1 e^x + c_2 x e^x \equiv 0$$

因此，$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$ 是所给微分方程的解.

又
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial c_1} & \dfrac{\partial y}{\partial c_2} \\ \dfrac{\partial y'}{\partial c_1} & \dfrac{\partial y'}{\partial c_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

即 c_1, c_2 是两个独立的任意常数，故函数

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

是所给微分方程的通解.

把初始条件 $y(0) = 1$ 代入通解的表达式，得：$c_1 = 1$；把初始条件 $y'(0) = 3$ 代入 $y' = (c_1 + c_2 + c_2 x)e^x$，得：$c_1 + c_2 = 3$. 即 $c_2 = 3 - c_1 = 3 - 1 = 2$.

把 $c_1 = 1, c_2 = 2$ 代入方程的通解表达式，即得所求特解为

$$y = e^x + 2x e^x.$$

三、线性微分方程和非线性微分方程

如果微分方程对于未知函数及方程中出现的未知函数的各阶导数都是一次的，则称该微分方程为线性微分方程. 否则，称为非线性微分方程.

例如，方程(1-5)、(1-7)为线性微分方程，而方程(1-6)、(1-8)

为非线性微分方程.

一般地，n 阶线性微分方程所具有的形式为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

这里 $a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$、$f(x)$ 均是区间$[a,b]$上的已知函数.

在上述方程中，如果 $f(x)\equiv 0$，则

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

那么，称该方程为 n 阶齐次线性微分方程，简称齐线性微分方程；否则，称为 n 阶非齐次线性微分方程，简称非齐线性微分方程.

习　题　一

1. 指出下列微分方程的自变量、未知函数、阶数，并说明是线性的还是非线性的.

(1) $y'=x^2y+1$;

(2) $y'''+3y''-y=e^x$;

(3) $\dfrac{d^4x}{dt^4}+tx^2=1$;

(4) $\dfrac{d^4x}{dt^4}+t^2x=1$;

(5) $\dfrac{d^2x}{dy^2}+xy=0$;

(6) $y'y''-2xy=0$;

(7) $\dfrac{d^5u}{dr^5}-2\dfrac{du}{dr}+u=r^6$;

(8) $(y'')^5-2(y')^3+y^4=x\sin x$;

(9) $(x+y)dx+(x-y)dy=0$.

2. 验证下列函数均为微分方程 $y''+4y=0$ 的解.

(1) $y=\sin 2x$;

(2) $y=\cos 2x$;

(3) $y=c_1\sin 2x$ （c_1 是任意常数）;

(4) $y=c_2\cos 2x$ （c_2 是任意常数）;

(5) $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$ （c_1,c_2 是任意常数）;

(6) $y=c_1\sin(2x+c_2)$ （c_1,c_2 是任意常数）.

3. 在下列各题中，验证左边的函数是否为右边相应的微分方程的解(其中 c,c_1,c_2 是任意常数).

(1) $y=c\cos x+\sin x$, $\quad y\sin x+y'\cos x=1$;

(2) $x=e^t$, $\quad \dfrac{d^4x}{dt^4}+x=2e^t$;

(3) $y=\dfrac{c^2-x^2}{2x}$, $\quad (x+y)dx+xdy=0$;

(4) $x=\dfrac{1}{t}$, $\quad \dfrac{d^2x}{dt^2}=t^2+x^2$;

(5) $y=c_1x^2+c_2x^3+\dfrac{1}{2}x$, $\quad x^2y''-4xy'+6y=x$;

(6) $y=-\dfrac{g(x)}{f(x)}$, $\quad y'=\dfrac{f'(x)}{g(x)}y^2-\dfrac{y'(x)}{f(x)}$;

(7) $1+xy=c(x-y)$, $\quad \dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{dy}{1+y^2}$;

(8) $e^{-(x+y)}+\dfrac{x^2}{2}=c$, $\quad e^{-y}(y'+1)=xe^x$.

4. 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程：

(1) 曲线上任意一点处的切线与该点到原点的线段垂直;

(2) 曲线上任意一点的切线介于两坐标轴间的部分被切点平分;

(3) 曲线上任意一点的切线斜率与切点的横坐标成正比;

(4) 曲线上任意一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方;

(5) 曲线上任意一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积等于常数 a^2.

参考答案

1.	自变量	未知函数	阶数	线性或非线性
(1)	x	y	1	线性
(2)	x	y	3	线性
(3)	t	x	4	非线性
(4)	t	x	4	线性
(5)	y	x	2	线性
(6)	x	y	2	非线性
(7)	r	u	5	线性
(8)	x	y	2	非线性
(9)	x 或 y	y 或 x	1	非线性

2. 略.

3. (1)是; (2)是; (3)是; (4)不是; (5)是; (6)是; (7)是; (8)是.

4. (1) $-\dfrac{x}{y}$;

(2) $xy' + y = 0$;

(3) $y' = kx$($k > 0$ 为常数);

(4) $y - xy' = x^2$;

(5) $\left|(y - xy')\left(x - \dfrac{y}{y'}\right)\right| = 2a^2$.