中学教师读物

线性方程基础

钟 集

广东科技出版社

线性方程基础

钟　集

广东科技出版社

线性方程基础

钟 集

*

广东科技出版社出版
广东省新华书店发行
广东信宜印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 3.875印张 80,000字
1979年12月第1版 1979年12月第1次印刷
印数1—21,300册
书号13182·12 定价0.30元

内 容 简 介

线性方程是基础数学的组成部分，也是中学数学主要内容之一。它在理论上和应用上都有重要的地位。

本书分四部分，共二十三节，主要介绍线性方程的基本理论和解法，线性方程的应用问题，线性方程的整数解，线性规划初步知识，还择要介绍我国古代数学家在线性方程方面的光辉成就；每节和书末附有习题。

本书涉及比较广泛的知识领域，但不包含艰深的内容；论证都采用初等方法，但尽可能给出命题的严格叙述和证明。本书可供中学数学教师教学参考，也适合高中学生和知识青年阅读。

前　言

本书介绍线性方程的基本理论、解法和应用，是一本中学数学的参考读物。内容分四个部分，第一部分（§1—6）是线性方程的基本理论和各种解法，第二部分（§7—15）是线性方程的应用，第三部分（§16—18）是线性不定方程的整数解，第四部分（§19—23）是线性规划的初步知识。

书中不包含艰深的内容，在基本理论方面，以三元线性方程组为主，不介绍n元线性方程组的一般理论；论证和解题都采用初等数学方法；而在应用上只限于比较简单的情形，以说明该方面问题的性质和解法特点。尽管如此，本书还是着重说清道理，对一些基本的定理和法则都给出了完整的证明，并且介绍了多种解题方法，内容涉及相当广泛的领域。希望本书有助于读者加深对有关问题的了解，提高解题能力和水平，扩大知识领域，增强学习、研究数学的积极性。因此，本书适合中学数学教师教学时参考，同时也适合高中学生和知识青年阅读。

我国古代数学家在线性方程方面有许多光辉成就，本书也择要加以介绍，以便读者有所了解。

对于解法的叙述着重说明原理，而不详细写出消元过程，消元过程留给读者自己完成。书中每节附有练习题，书末有复习题，都给出了答案，以供读者练习解题之用。

目　　录

Ⅰ. 线性方程基本理论和解法

§1 线性方程解法原理、加减消元法

含有元（即未知数）的等式$f(x, y, \cdots)=0$（其中x，$y\cdots$都是元）叫做方程。满足方程的一组元的数值，叫做方程的解。如果元x，y，$\cdots$的值同时满足几个方程

$$\begin{cases} f_1(x, y, \cdots)=0, \\ f_2(x, y, \cdots)=0, \\ \cdots \end{cases}$$

这几个方程就构成方程组。同时满足方程组每一个方程的一组元的数值，就叫做方程组的解。如果$f(x, y, \cdots)$是关于元x，y，$\cdots$的一次式，那么，$f(x, y, \cdots)=0$就是一次方程。由于含二元x，y的一次方程$ax+by=c$（a，b不都等于零）在平面直角坐标系Oxy内表示一直线，所以，通常就把一次方程都叫做线性方程，而不论它所包含的元有多少。由几个线性方程所构成的方程组，就叫做线性方程组。

本书所讨论的线性方程，其所含的系数和常数项都是实数。

解方程所根据的原理是方程的同解变换。

定义1 对于两个线性方程（组）A和B，如果A的每个（组）解也是B的解，并且B的每个（组）解也是A的解，换句话说，A的所有解和B的所有解相同，那么，A和B就是同

解方程（组），或者说A和B同解。

定理 1　给出方程

$$f(x, y, \cdots)=0. \tag{1.1}$$

（i）假设$\phi(x, y, \cdots)$是元$x, y, \cdots$的多项式，则方程(1.1)和方程

$$f(x, y, \cdots)+\phi(x, y, \cdots)=\phi(x, y\cdots) \tag{1.2}$$

同解。

（ii）设a是常数，$a\neq 0$，则方程(1.1)和方程

$$af(x, y, \cdots)=0 \tag{1.3}$$

同解。

证：（i）设$x=x_1$，$y=y_1\cdots$是方程(1.1)的一组解，即

$$f(x_1, y_1, \cdots)=0. \tag{1.4}$$

方程两边各加$\phi(x_1, y_1, \cdots)$，则

$$f(x_1,y_1,\cdots)+\phi(x_1,y_1,\cdots)=\phi(x_1,y_1,\cdots), \tag{1.5}$$

即$x=x_1$，$y=y_1\cdots$也是方程(1.2)的解．相反，如果$x=x_1$，$y=y_1\cdots$是方程（1.2）的一组解，即（1.5）成立，那么，从(1.5)两边各减去$\phi(x_1, y_1, \cdots)$也得到(1.4)，即$x=x_1$，$y=y_1\cdots$也是方程(1.1)的解．所以(1.1)和(1.2)同解。

（ii）设$x=x_1$，$y=y_1$，$\cdots$是方程（1.1）的一组解，则(1.4)成立。（1.4）乘以a，得到

$$af(x_1, y_1, \cdots)=0, \tag{1.6}$$

即$x=x_1$，$y=y_1$，$\cdots$也是方程(1.3)的解。相反，如果(1.6)成立，那么，因为$a\neq 0$，所以（1.4）也成立，即是说，方程(1.3)的解也是方程(1.1)的解．因而(1.1)和(1.3)同解。

定理 2　设α、β都是不等于零的常数，则方程组

$$\begin{cases} f_1(x, y, \cdots)=0, & (1.7)\\ f_2(x, y, \cdots)=0, & (1.8)\end{cases}$$

和下面两方程组

$$\begin{cases} f_1(x, y, \cdots)=0, & (1.9)\\ \alpha f_1(x, y, \cdots)+\beta f_2(x, y, \cdots)=0, & (1.10)\end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(x, y, \cdots)=0, & (1.11)\\ \alpha f_1(x, y, \cdots)+\beta f_2(x, y, \cdots)=0, & (1.12)\end{cases}$$

的每一个同解。

证：设$x=x_1, y=y_1$，…是(1.7)(1.8)的一组解，则有

$$f_1(x_1, y_1, \cdots)=0, \tag{1.13}$$

$$f_2(x_1, y_1, \cdots)=0. \tag{1.14}$$

所以有

$$\alpha f_1(x_1, y_1, \cdots)+\beta f_2(x_1, y_1, \cdots)=0. \tag{1.15}$$

即$x=x_1$，$y=y_1$，…是(1.9)(1.10)的解，也是(1.11)(1.12)的解。相反，设$x=x_1$，$y=y_1$，…是(1.9)(1.10)的解，则(1.13)(1.15)成立。把(1.13)代入(1.15)，得到$\beta f_2(x_1, y_1, \cdots)=0$。因为$\beta \neq 0$，所以(1.14)成立，即$x=x_1$，$y=y_1$…也是(1.7)(1.8)的解。因此，两方程组(1.7)(1.8)和(1.9)(1.10)同解。同理可证方程组(1.7)(1.8)和(1.11)(1.12)同解。

如果两个方程（组）同解，那么，就可以用其中一个方程（组）替换另一个方程（组）。这种替换就叫做同解变换。定理1指出，方程两边各加相同的多项式或乘以非零常数都是同解变换，这是方程移项或两边同时乘（或除）以非零常数从而化简系数的根据。定理2指出，两方程可以各乘以一个常数后相加，从而替换原两方程中的任意一个，这样

也是同解变换．这种同解变换就是解方程组的加减消元法的根据．

由此不难看出，解方程的过程，实质上就是进行一系列同解变换的过程．

下面定理给出了一般一元线性方程的解．

定理 3 给出方程

$$ax=b. \tag{1.16}$$

(i) 如果$a\neq 0$，则方程有唯一解$x=\dfrac{b}{a}$；

(ii) 如果$a=0$，$b\neq 0$，则方程无解；

(iii) 如果$a=b=0$，则方程是恒等式，x可以等于任何实数．

证：(i) 如果$a\neq 0$，以$\dfrac{1}{a}$乘(1.16)两边，得到

$$x=\frac{b}{a}. \tag{1.17}$$

因为(1.16)与(1.17)同解，而方程(1.17)的解是唯一的，所以(1.16)也有唯一解，这个解就是$x=\dfrac{b}{a}$．

(ii)如果$a=0$，$b\neq 0$，那么方程(1.16)成为$0\cdot x\neq 0$，无解．

(iii) 如果$a=b=0$，则方程(1.16)成为$0\cdot x=0$，这是恒等式，x可以等于任意实数．

下面两条定理分别给出一般二元和三元线性方程组的解．

定理 4 设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, & (1.18)\\ a_2x+b_2y=c_2, & (1.19)\end{cases}$$

并且设

$$D=a_1b_2-a_2b_1. \tag{1.20}$$

(i) 如果$D\neq 0$，则方程组有唯一解

$$x=\frac{1}{D}(c_1b_2-c_2b_1), \tag{1.21}$$

$$y=\frac{1}{D}(a_1c_2-a_2c_1). \tag{1.22}$$

(ii) 如果a_1，a_2，b_1，b_2至少有一个不等于零，而且

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}, \tag{1.23}$$

则方程组无解。

(iii) 如果a_1，a_2，b_1，b_2至少有一个不等于零，且

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}, \tag{1.24}$$

则方程组有无限多组解。

(iv) 如果a_1，a_2，b_1，b_2都等于零，且c_1，c_2不都等于零，则方程组无解。

(v) 如果a_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2都等于零，则方程组有无限多组解，x，y可以等于任意实数。

证：先用加减消元法，由$b_2\times(1.18)-b_1\times(1.19)$得到

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1.$$

然后引入D，如(1.20)，则上式成为

$$Dx=c_1b_2-c_2b_1. \tag{1.25}$$

（i）如果$D\neq 0$，以D除(1.25)两边，得到

$$x=\frac{1}{D}(c_1b_2-c_2b_1),$$

即(1.21)。同理可以消去x解出y，得到(1.22)。因为解的过程都是同解变换，即方程组(1.18)(1.19)和方程组(1.21)(1.22)同解，而且后者的解是唯一的，所以前者的解也是唯一的。这组唯一解就是(1.21)(1.22)。

（ii）如果a_1，a_2，b_1，b_2至少有一个不等于零，例如$a_2\neq 0$。因为$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$，令比值等于$t$，则$a_1=a_2t$，$b_1=b_2t$。代入(1.18)，得到

$$t(a_2x+b_2y)=c_1.$$

以(1.19)代入，得到$tc_2=c_1$。但这个式子和假设的(1.23)矛盾，因此方程组无解。

（iii）如果a_1，a_2，b_1，b_2至少有一个不等于零，而且(1.24)成立。设$a_2\neq 0$，并且设(1.24)的比值等于t，则$a_1=a_2t$，$b_1=b_2t$，$c_1=c_2t$，代入(1.18)，得到

$$t(a_2x+b_2y)=tc_2.$$

如果$t\neq 0$，以t除全式就可得(1.19)，即方程组实际上只有一个方程(1.19)。另一个方程(1.18)可由(1.19)导出。如果$t=0$，则$a_1=b_1=c_1=0$，即(1.18)是恒等式，实际上也只有一个方程(1.19)。由(1.19)解出x，

$$x=\frac{1}{a_2}(c_2-b_2y). \tag{1.26}$$

任意指定y的一值，可得x的对应值，组成方程组的一组解，由此可知方程组有无限多组解。

(iv) 如果a_1，a_2，b_1，b_2都等于零，而c_1，c_2不都等于零，例如$c_1 \neq 0$，则(1.18)变成$0\cdot x+0\cdot y\neq 0$。这是不可能成立的，所以，方程组无解。

(v) 如果 a_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2 都等于零，则方程组成为恒等式，x，y可以等于任何实数。

定理 5 设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, & (1.27)\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, & (1.28)\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, & (1.29)\end{cases}$$

并设

$$\begin{aligned} D=&a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3\\ &-a_3b_2c_1, \end{aligned} \tag{1.30}$$

则当$D\neq 0$时，方程组有唯一解：

$$\begin{aligned} x=\frac{1}{D}(&d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_1b_3c_2\\ &-d_2b_1c_3-d_3b_2c_1), \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned} y=\frac{1}{D}(&a_1d_2c_3+a_2d_3c_1+a_3d_1c_2-a_1d_3c_2\\ &-a_2d_1c_3-a_3d_2c_1), \end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned} z=\frac{1}{D}(&a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1d_2-a_1b_3d_2\\ &-a_2b_1d_3-a_3b_2d_1). \end{aligned} \tag{1.33}$$

证：用加减消元法求解。如果c_1，c_2，c_3都等于零，则由(1.30)，得$D=0$。所以，当$D\neq 0$时，c_1，c_2，c_3不会都等于零，因而可以设$c_1\neq 0$。那么，分别由$c_2\times(1.27)-$

$c_1\times(1.28)$和$c_3\times(1.27)-c_1\times(1.29)$，得到

$$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y$$
$$=d_1c_2-d_2c_1, \tag{1.34}$$
$$(a_1c_3-a_3c_1)x+(b_1c_3-b_3c_1)y$$
$$=d_1c_3-d_3c_1. \tag{1.35}$$

又由$(b_1c_3-b_3c_1)\times(1.34)-(b_1c_2-b_2c_1)\times(1.35)$消去$y$，得到

$$[(b_1c_3-b_3c_1)(a_1c_2-a_2c_1)-(b_1c_2-b_2c_1)$$
$$\cdot(a_1c_3-a_3c_1)]x$$
$$=(b_1c_3-b_3c_1)(d_1c_2-d_2c_1)-(b_1c_2-b_2c_1)$$
$$\cdot(d_1c_3-d_3c_1).$$

把括号展开化简，并引入D如(1.30)，得到

$$c_1Dx=c_1(d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_1b_3c_2$$
$$-d_2b_1c_3-d_3b_2c_1). \tag{1.36}$$

因为$c_1\neq 0$，$D\neq 0$，以c_1D除两边，就得到(1.31)。

同理可以求出y和z，如(1.32)和(1.33)。

关于三元线性方程组的各种情形的解的研究，见§3定理3。

应该注意的是，(1.31)中分子和分母有如下的形式特点：如果把分母中的字母a改为d，就得到分子。类似，把D中的b改为d，就得到(1.32)的分子；把D中的c改为d，就得到(1.33)的分子。这个特点在§3中还要提到。

实际上，方程组(1.27)—(1.29)和方程组(1.31)—(1.33)同解。因为后者的解是唯一的，所以前者的解也是唯一的。这组唯一解就是(1.31)—(1.33)。

上面两定理的解都使用了加减消元法。它是解线性方程

组的基本方法。除了加减消元法之外，后面几节还要介绍矩阵法、行列式法以及对于特殊类型的线性方程组的特殊解法。

对于四元和更多元的线性方程组，一般也可以用加减消元法，依次消去一元、二元、…，直至剩下一元，即可解出。为了便于说明方法原理，通常数学课本中提出的线性方程所含的系数和常数，总是比较容易运算的整数或分数，消元时不致引起太多的麻烦；但在实际应用上往往不是这么简单，而是含有3位或4位有效数字的数，计算量很大，也容易发生错误。如果把两个数的每一次相加、减、乘或除都作一次运算来计算，在一般情形（即方程没有缺项，消元过程中除了被消去的元以外，没有别的项系数恰巧等于零，而且每次消元都要通过乘和减，但对于被消去的一元的系数的乘和减都不必加以计算），解三元线性方程组需要运算33次，解五元的要运算145次。随着元数的增加，运算次数会大大增多。例如解一百元的线性方程组需要运算1009900次。因此，怎样才能够计算得快，而且还要有一定的办法检查计算是否准确，这就是一个数学分支——数值分析或计算方法的问题了。

如果把消元过程的乘法改为除法，也就是说，把每个方程的首项系数遍除该方程，使得每个方程的首项系数都变成1，那么，只须每两方程相减就能够消去一个元。然后依照同样方法逐步消去第二、三…元，最后把方程组解出。这个方法叫做高斯(Gauss)解法。高斯解法所需的运算次数比上面的方法要少一些。例如，解三元线性方程组需要28次运算，解五元的要运算115次，解一百元要运算681550次。但计

算量仍然很大。

现代工程技术或国民经济部门所提出的线性方程组往往含很多元，甚至几百个、上千个。这样的题目过去单靠人力求解几乎是不可能的，现在有了电子计算机，问题就能够很好地解决了。

例 1 解方程组

$$\begin{cases} y+z=7, & (1.37) \\ z+x=12, & (1.38) \\ x+y=15. & (1.39) \end{cases}$$

解：三方程相加，并以 2 除之，得到

$$x+y+z=17. \tag{1.40}$$

依次减去（1.37），（1.38），（1.39），分别得

$$x=10,\quad y=5,\quad z=2.$$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}, & (1.41) \\ px+qy+rz=k. & (1.42) \end{cases}$$

方程（1.41）含两个等号，应该看做是两个方程，即

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$和$\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

解：设（1.41）的比值等于t，则由（1.41），

$$x=at,\quad y=bt,\quad z=ct. \tag{1.43}$$

代入（1.42）得

$$t(pa+qb+rc)=k. \tag{1.44}$$