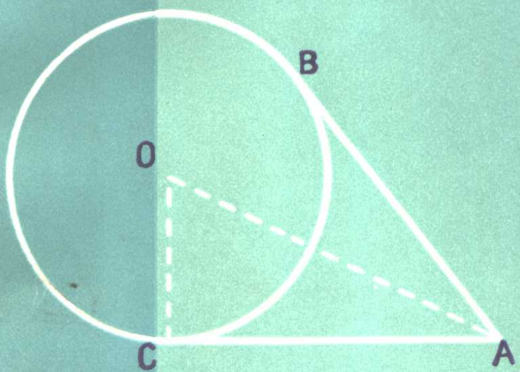
中学几何百题多解法



ZHONGXUEJIHE
BAITI
DUOJIEFA

广西人民出版社

前　　言

为了帮助中学生及自学青年学好中学几何知识，沟通中学数学各科之间的联系，开拓思路，提高灵活运用不同知识分析问题和解决问题的能力；为了给中学数学教师教学和指导复习提供参考资料，我们依据现行课本，参考新的中学数学教学大纲，选编了这本《中学几何百题多解法》．

本书精选了一百道典型题目，其中平面几何四十题，立体几何三十题，解析几何三十题．每题都有两种以上解法，这些解法基本包括了中学几何的解题方法，如几何法、代数法、三角法、解析法以及应用面积或复数的解题方法．每种解法前有分析，描述为得到最终解答所经过的步骤，并力图阐明采取这些步骤的动机和想法．每一题后还有简评，指出各种解法的优劣和关键之处，并总结概括一般的解题规律．

多种解法中，必有一种最合理、最简捷．希望读者阅读时，首先独立思考，然后再与书中的解法认真比较，仔细研究，琢磨最佳解法，从中探索解题规律，提高解题能力．

我们水平有限，错误难免，本书不当之处，盼读者赐予指正．

编　者

一九八四年四月

目　录

平面几何

立体几何

解析几何

平 面 几 何

一 证线段相等

1. 在$\triangle ABC$中，AD为$\angle A$的平分线，E为BC的中点，过E作$EF \parallel AD$交AB于G，交CA的延长线于F. 求证：$BG = CF$.

分析 1 因有$\angle BGE = \angle F$，要证$BG = CF$，就必须证明其所在的三角形全等．而$\triangle GBE$和$\triangle CFE$明显不全等，所以要造新三角形，使所证的线段分别是两三角形的边，证它们全等即可．故过B、C分别作FE的垂线，垂足为P、Q，证$Rt\triangle BPG \cong Rt\triangle CQF$.

证法 1 如图1·1，过B、C分别作$BP \perp EF$，$CQ \perp FE$，垂足分别为P、Q，

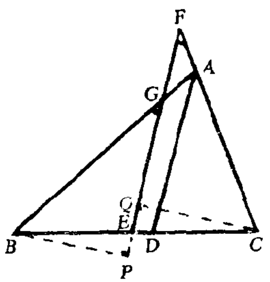


图 1·1

则 $BP \parallel QC$，

$\therefore$ $\angle PBE = \angle QCE$，

而 $BE = CE$，

$\therefore$ $Rt\triangle BPE \cong Rt\triangle CQE$，

$\therefore$ $BP = CQ$.

又 $EF \parallel DA$，

$\therefore$ $\angle BGE = \angle F$，

$\therefore$ $Rt\triangle BPG \cong Rt\triangle CQF$，

故　$BG = CF$。

分析 2　因FE是BC的中线，根据三角形中线的常用辅助线——延长FE至H，使$FE = EH$（如图1·2），这样即得平行四边形$FBHC$。要证$BG = CF$，即证$BG = BH$，也就是证明$\angle 1 = \angle 2$即可。

证法 2　延长FE至H，使$FE = EH$，连结BF、BH、CH。

$\because$　$BE = CE$，

$\therefore$　$FBHC$是平行四边形，

$\therefore$　$CF = BH$。

又　$EF \parallel AD$，AD平分$\angle BAC$，$BH \parallel FC$，

$\therefore$　$\angle 1 = \angle BAD = \angle DAC = \angle F = \angle 2$，

$\therefore$　$BG = BH$，

故　$BG = CF$。

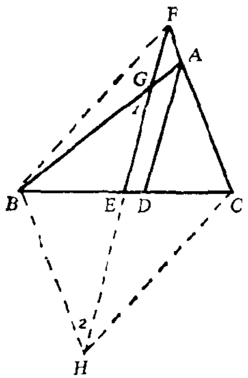


图　1·2

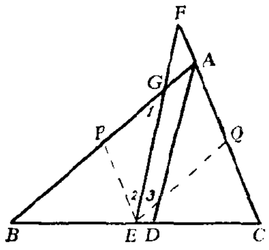


图　1·3

分析 3　因E为BC的中点，所以在AB、AC上分别取中点P、Q（如图1·3），则$APEQ$即为平行四边形。要证$BG = CF$，只须证明$BP = FQ$，$GP = CQ$即可。

证法 3　取AB、AC之中点P、Q，连结EP、EQ.

$\because$　E是BC之中点，

$\therefore$　$EP \underset{=}{\parallel} \frac{1}{2}AC, EQ \underset{=}{\parallel} \frac{1}{2}AB$,

即　$BP = EQ$，$CQ = EP$.

又　$EF \parallel AD$，AD平分$\angle BAC$，

$\therefore$　$\angle 1 = \angle BAD = \angle DAC = \angle F = \angle 2$，

$\angle 3 = \angle 1 = \angle F$,

$\therefore$　$BP = EQ = FQ$，$GP = PE = CQ$，

故　$BG = CF$.

分析 4　因AD为$\angle A$的平分线，而$EF \parallel AD$，故$\triangle CAD \backsim \triangle CFE$，$\triangle BGE \backsim \triangle BAD$，要证$BG = CF$，即可根据三角形内角平分线定理以及相似三角形对应边成比例，设法证明：

$$\frac{BG}{BE} = \frac{CF}{CE}.$$

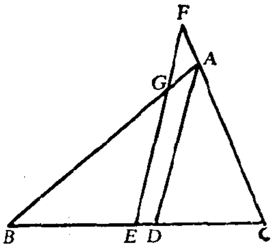


图　1·4

证法 4　$\because$ AD是$\angle A$的平分线，

$\therefore$　$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$，即$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$.

又　$EF \parallel AD$,

$\therefore$　$\triangle CAD \backsim \triangle CFE$，$\triangle BGE \backsim \triangle BAD$，

$\therefore$　$\frac{CF}{CE} = \frac{AC}{CD}$，$\frac{BG}{BE} = \frac{AB}{BD}$，

$\therefore$　$\frac{CF}{CE} = \frac{BG}{BE}$.

而　$CE = BE$，

故　$BG = CF$.

分析 5　在题设中有平行线，有中点，可考虑利用面积

来证明．首先设法证$S_{\triangle DBG}=S_{\triangle DCF}$，然后利用角平分线的性质证得$D$到$BG$和$CF$的距离相等即可．

证法 5 连结AE、DG、DF（如图1·5）．

$\because$ $EF \parallel AD$,

$\therefore$ $S_{\triangle EDG}=S_{\triangle EAG}$,

$S_{\triangle DFA}=S_{\triangle DEA}$,

$\therefore$ $S_{\triangle DBG}=S_{\triangle EBG}+S_{\triangle EDG}$

$=S_{\triangle EBG}+S_{\triangle EAG}=S_{\triangle EBA}$,

$S_{\triangle DCF}=S_{\triangle DCA}+S_{\triangle DFA}$

$=S_{\triangle DCA}+S_{\triangle DEA}=S_{\triangle ECA}$.

而 $BE=CE$,

$\therefore$ $S_{\triangle EBA}=S_{\triangle ECA}$,

$\therefore$ $S_{\triangle DBG}=S_{\triangle DCF}$.

又 AD为$\angle BAC$的平分线

$\therefore$ D到AB、AC之距离相等，即$\triangle DBG$的BG边上的高与$\triangle DCF$的CF边上的高相等．

故 $BG=CF$.

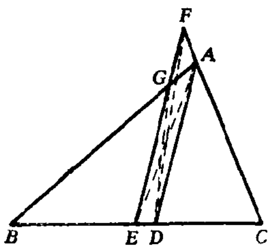


图 1·5

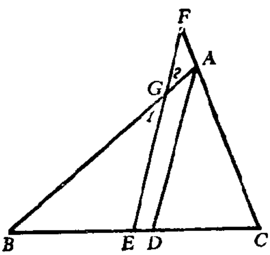


图 1·6

分析 6 从图形来看$\triangle ABC$被一直线EGF所截，由梅氏定理即得$\dfrac{AF}{CF}\cdot\dfrac{CE}{BE}\cdot\dfrac{BG}{AG}=1$，而$CE=BE$，只须证明$AF=AG$即可．

证法 6　如图1·6.

∵　$\triangle ABC$被一直线EGF所截，

根据梅氏定理，得

$$\frac{AF}{CF}\cdot\frac{CE}{BE}\cdot\frac{BG}{AG}=1.$$

而　$CE=BE$,

∴　$\frac{AF}{CF}\cdot\frac{BG}{AG}=1$.

又　$EF\parallel AD$，AD平分$\angle BAC$,

∴　$\angle 2=\angle 1=\angle BAD=\angle CAD=\angle F$,

∴　$AF=AG$,

∴　$\frac{BG}{CF}=1$,

故　$BG=CF$.

分析 7　因所要证明的两线段BG和CF分别在$\triangle BEG$和$\triangle CEF$中（如图1·7），故可通过正弦定理找出它们边角之间的关系，证明其中$\sin\angle 1=\sin\angle F$，$\sin\angle 2=\sin\angle 3$即可.

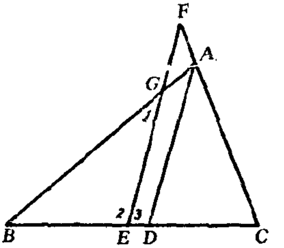


图　1·7

证法 7　根据正弦定理，在$\triangle BEG$和$\triangle CEF$中，

$$\frac{BG}{\sin\angle 2}=\frac{BE}{\sin\angle 1},\quad \frac{CF}{\sin\angle 3}=\frac{CE}{\sin\angle F},$$

即　$\frac{BG}{BE}=\frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 1}$，$\frac{CF}{CE}=\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle F}$.

∵　$EF\parallel AD$，AD平分$\angle BAC$,

∴　$\angle 1=\angle BAD=\angle CAD=\angle F$.

又　$\angle 2=180°-\angle 3$,

∴　$\sin\angle 1=\sin\angle F$，$\sin\angle 2=\sin\angle 3$,

$\therefore \quad \dfrac{BG}{BE}=\dfrac{CF}{CE}$.

而 $BE=CE$,

故 $BG=CF$.

简评 证法1、2、3利用全等△或平行四边形证明线段相等，这是常用的方法；证法4、6、7通过不同的途径证明$\dfrac{BG}{BE}=\dfrac{CF}{CE}$或$\dfrac{BG}{CF}=1$也是证明线段相等的方法.

注意观察图形的特点，以便添作有用的辅助线及寻找证题途径是平几证题的特点之一. 如证法1、2、3中，中线的辅助线值得注意；证法5、6、7则通过观察图形的特点，找到较为简捷的方法.

2. 已知正方形$ABCD$，在BC边上任取一点E，作$EF\perp AE$交角C的外角平分线于F. 求证：$AE=EF$.

分析1 要证 $AE=EF$，即证 $\angle AFE=45°$，而 $\angle ACE=45°$，只需证明 $\angle AFE=\angle ACE$，也就是证明A、E、C、F四点共圆即可.

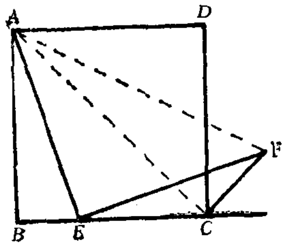


图 2·1

证法1 连结AF，AC.

则 $\angle ACF=\angle ACD+\angle DCF$

$=45°+45°=90°$.

而 $\angle AEF=90°$,

$\therefore$ A、E、C、F四点共圆.

$\therefore$ $\angle AFE=\angle ACE=45°$,

$\therefore$ $\triangle EAF$为等腰直角三角形,

故 $AE=EF$.

分析2 如图2·2，作$FG\perp BC$，则在$\triangle ABE$和$\triangle EGF$中有$\angle FEG=\angle BAE$，设法证明$GF=BE$即可，这可在

$\triangle ECF$中通过边角关系，利用正弦定理而获证.

证法 2　作$FG\perp BC$,

设　$\angle BAE=\alpha$,

则　$\angle FEC=\angle BAE=\alpha$.

又设正方形边长为a, $BE=b$, $FG=x$,

则$EC=a-b$, $CF=\sqrt{2}x$.

而　$\angle EFC=45°-\alpha$,

由正弦定理得

$$\frac{\sqrt{2}x}{\sin\alpha}=\frac{a-b}{\sin(45°-\alpha)}，即\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{a-b}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

而　$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$\therefore\quad \frac{x}{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\frac{a-b}{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}},$$

$\therefore$　$x=b$，且$CG=b$,

$\therefore$　$EG=a$，$EF=\sqrt{a^2+b^2}$.

故　$AE=EF$.

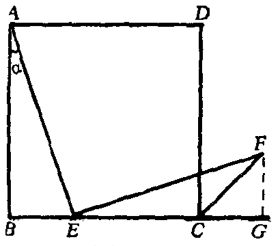


图　2·2

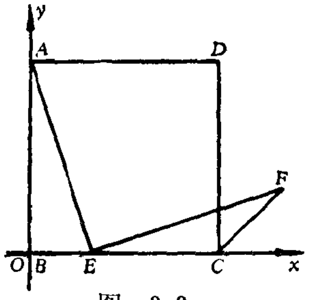


图　2·3

分析 3　建立如图坐标系后，由A、B、C、D、E点的坐标，推导出F点的坐标，然后计算$|AE|$和$|EF|$.

证法 3　建立如图2·3的直角坐标系.

设　$A(0,a)$, $B(0,0)$, $C(a,0)$，$D(a,a)$，$E(x,0)$.

则　$k_{AE}=\dfrac{-a}{x}$，　　$k_{EF}=-\dfrac{1}{k_{AE}}=\dfrac{x}{a}$，

∴　EF所在的直线方程为：

$$y=\frac{x}{a}(x-x) \qquad ①$$

CF所在的直线方程为：

$$y=x-a \qquad ②$$

联立①②解之得点F的坐标为：

$$\begin{cases} x_F=a+x \\ y_F=x. \end{cases}$$

∴　$|EF|=\sqrt{(a+x-x)^2+x^2}=\sqrt{a^2+x^2}$.

而　$|AE|=\sqrt{a^2+x^2}$，

故　$|AE|=|EF|$.

简评　利用等腰三角形证明线段相等也是一种常用方法，如证法1.在证明有关边角关系问题时，如能把已知和求证的边角集中在三角形中，则可利用正弦定理或余弦定理来证之，如证法2.本题应用解析法时，解题思路较为简易.

3．直线l与⊙O相离，$OA\perp l$于A，过A作一割线交⊙O于B、C，过B、C分别作⊙O之切线BE、CF且分别交l于E、F．求证：$AE=AF$.

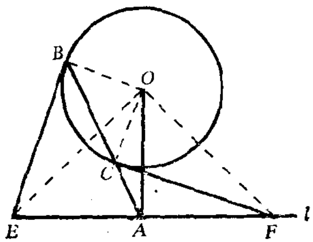


图　3·1

分析1　因$OA\perp l$，要证明$AE=AF$，只需证明$\triangle OEF$是等腰三角形，即证$\angle OEF=\angle OFE$.

证法1　连结OB、OC、OE、OF.

∵　BE、CF为⊙O的切线，

∴　$OB\perp BE$、$OC\perp CF$.

又 $OA\perp l$。

∴ O、A、E、B四点共圆；

O、C、A、F四点共圆，

∴ $\angle OEA=\angle OBC$，

$\angle OFA=\angle OCB$。

而 $\angle OBC=\angle OCB$，（∵$OB=OC$）

∴ $\angle OEA=\angle OFA$，

即 $\triangle OEF$是等腰三角形。

∵ $OA\perp l$，

故 $AE=AF$。

注 ①本题也可延长FC交BE于D，则$\angle DBC=\angle DCB$，而$\angle EOA=\angle DBC$，$\angle DCB=\angle ACF=\angle FOA$，所以$\angle EOA=\angle FOA$，即$\triangle OEF$是等腰三角形而获证。

②本题还可证明$Rt\triangle OBE\cong Rt\triangle OCF$，从而证得$\triangle OEF$为等腰三角形而获证。

分析 2 以O为原点，OA所在的直线为x轴建立直角坐标系后，要证$|AE|=|AF|$，只需证明E点的纵坐标y_E和F点的纵坐标y_F有关系$y_E+y_F=0$即可。

证法 2 以O为原点，OA所在的直线为x轴建立如图直角坐标系。

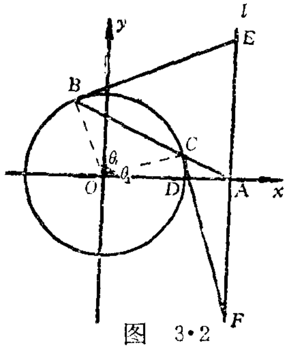


图 3·2

①

设⊙O的半径为r，$DA=h$，则⊙O的方程为：$x^2+y^2=r^2$，A的坐标为（$r+h$，0），直线l的方程为：$x=r+h$。

又设B（$r\cos\theta_1$，$r\sin\theta_1$），C（$r\cos\theta_2$，$r\sin\theta_2$），

∴ 切线BE的方程为：

$$x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1 = r, \qquad ②$$

切线CF的方程为：

$$x\cos\theta_2 + y\sin\theta_2 = r, \qquad ③$$

联立方程①②解得E点的纵坐标为：

$$y_E = \frac{r-(r+h)\cos\theta_1}{\sin\theta_1},$$

联立方程①③解得F点的纵坐标为：

$$y_F = \frac{r-(r+h)\cos\theta_2}{\sin\theta_2}.$$

$$\therefore \quad y_E + y_F = \frac{r(\sin\theta_1+\sin\theta_2)-(r+h)\sin(\theta_1+\theta_2)}{\sin\theta_1\sin\theta_2}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\left[r\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}-(r+h)\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]}{\sin\theta_1\sin\theta_2}.$$

$\because$ B、C、A三点共线，

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} r\cos\theta_1 & r\sin\theta_1 & 1 \\ r\cos\theta_2 & r\sin\theta_2 & 1 \\ r+h & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $r^2\sin(\theta_1-\theta_2)-r(r+h)(\sin\theta_1-\sin\theta_2)=0$,

$$2\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\left[r\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}-(r+h)\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]=0.$$

$$\therefore \quad r\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}-(r+h)\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=0.$$

$$\therefore \quad y_E+y_F=0.$$

故 $|AE| = |AF|$.

简评　证法 1 中介绍的三种方法，目的是证明$\triangle OEF$为等腰三角形，也就是证明OA是线段EF的中垂线。

证法 2 中若设B、C的坐标分别为(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，就较为复杂。

4．正方形$ABCD$中，$\angle EAF=45°$，$AP\perp EF$．求证：$AP=AB$．

分析1　因$AP\perp EF$，$AB\perp BC$，要证$AP=AB$，若延长CB至G，使$BG=DF$，连结AG（如图4·1），只需证明$\triangle AEF\cong\triangle AEG$即可．

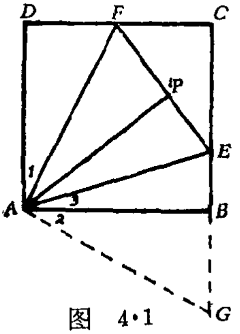


图　4·1

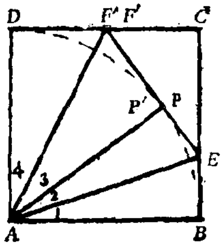


图　4·2

证法1　延长CB至G，使$BG=DF$，连结AG．

则　$Rt\triangle ABG\cong Rt\triangle ADF$．

∴　$\angle 1=\angle 2$，$AG=AF$．

而　$\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 3$

$=\angle BAD-\angle EAF$

$=90°-45°=45°$，

∴　$\angle EAG=\angle EAF$．

∴　$\triangle AEF\cong\triangle AEG$

故　$AP=AB$．

分析2　本题也可用同一法证明，运用此法证明时，先以A为圆心，AB为半径画弧BD，过E作圆弧的切线EF'，切点为P'，且交CD于F'（如图4·2）然后设法证明F'和F，P'和P合一即可．

证法2 以A为圆心，AB为半径画弧BD，过E作圆弧的切线，切点为P'，交CD于F'，连结AP'，则$AP'=AB$.

$\because$ $BE=EP'$，AE为公共边，

$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle AP'E$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

同理可证$\triangle AP'F'\cong\triangle ADF'$，

$\therefore$ $\angle 3=\angle 4$.

又 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=90°$，

$\therefore$ $\angle 2+\angle 3=\angle EAF'=45$。.

而 $\angle EAF=45°$，

$\therefore$ AF'与AF重合，

$\therefore$ F'与F合一，P'与P合一.

故 $AP=AP'=AB$.

分析3 本题还可利用反证法来证明，假定$AP\neq AB$，即$AP>AB$或$AP<AB$，由此推出$\angle 1+\angle 4>45°$或$\angle 1+\angle 4<45°$与$\angle 1+\angle 4=45°$相矛盾而获证.

证法3 设$AP\neq AB$，即$AP>AB$，

或 $AP<AB$.

若 $AP>AB$，

则 $\cos\angle 1=\dfrac{AB}{AE}<\dfrac{AP}{AE}=\cos\angle 2$.

又 $\angle 1$，$\angle 2$均为锐角，

$\therefore$ $\angle 1>\angle 2$.

同理可证：$\angle 4>\angle 3$.

$\therefore$ $\angle 1+\angle 4>\angle 2+\angle 3=\angle EAF=45$。.

这与$\angle 1+\angle 4=90°-\angle EAF=90°-45°=45°$相矛盾.

若$AP<AB$也可类似地推出矛盾。

$\therefore$ 假定$AP\neq AB$不成立。

故 $AP=AB$。

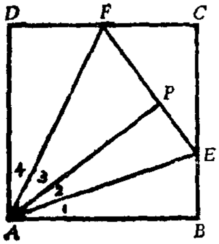


图 4·3

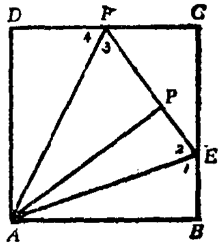


图 4·4

分析4 要证$AP=AB$，只需证明$\triangle APE\cong\triangle ABE$，即证$\angle 1=\angle 2$（如图4·4），这可从$\triangle AEF$，$\triangle ADF$和$\triangle ABE$的边角关系而获证。

证法4 在$\triangle AEF$中

$$\frac{AE}{\sin\angle 3}=\frac{AF}{\sin\angle 2}.$$

而 $AE=\dfrac{AB}{\sin\angle 1}$，$AF=\dfrac{AD}{\sin\angle 4}$，

$$\therefore\quad \frac{\dfrac{AB}{\sin\angle 1}}{\sin\angle 3}=\frac{\dfrac{AD}{\sin\angle 4}}{\sin\angle 2}.$$

又 $AB=AD$，

$\therefore$ $\sin\angle 1\sin\angle 3=\sin\angle 2\sin\angle 4$.

$\because$ $\angle 2+\angle 3=180^\circ-45^\circ=135^\circ$，

$\angle 1+\angle 4=360^\circ-2\times 90^\circ-45^\circ=135^\circ$，

$\therefore$ $\sin\angle 1\sin(135^\circ-\angle 2)=\sin\angle 2\sin(135^\circ-\angle 1)$，

即 $\sin\angle 1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\angle 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\angle 2\right)$

$$=\sin\angle 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\angle 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\angle 1\right),$$

∴　$\sin\angle 1\cos\angle 2=\sin\angle 2\cos\angle 1$,

即　　$tg\angle 1=tg\angle 2$.

而　$\angle 1, \angle 2$均为锐角，

∴　$\angle 1=\angle 2$.

又　AE为公共边，

∴　$Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle APE$.

故　$AP=AB$.

分析5　本题也可借助于$\angle BAE=\alpha$和正方形的边长a来表示出$\triangle AEF$之三边，然后应用三角形面积公式

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}ah_a, S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin c,$$ 证明$AP=a$.

证法5　设$\angle BAE=\alpha$，正方形的边长为a，如图4·5，

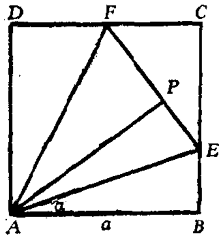


图　4·5

则　$\angle DAF=45°-\alpha$，$AE=\dfrac{a}{\cos\alpha}$,

$$AF=\frac{a}{\cos(45°-\alpha)},$$

$$EF=\sqrt{AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cos 45°}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\alpha}+\frac{a^2}{\cos^2(45°-\alpha)}-2\cdot\frac{a}{\cos\alpha}\cdot\frac{a}{\cos(45°-\alpha)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha\cos(45°-\alpha)}.$$

而　$S_{\triangle AEF}=\dfrac{1}{2}AE\cdot AF\sin 45°$

$$=\frac{a^2}{2\cos\alpha\cos(45°-\alpha)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}a^2}{4\cos\alpha\cos(45°-\alpha)},$$