

大学数学复习指导丛书

名校
名师
名作

高等数学 复习指导

——思路、方法与技巧

陈文灯 黄先开 编著
曹显兵 施明存



清华大学出版社

大学数学复习指导丛书

高等数学复习指导

——思路、方法与技巧

陈文灯 黄先开 编著
曹显兵 施明存

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书的宗旨是帮助读者全面、系统地复习高等数学的内容,深入理解基本概念和基本理论,学习和掌握解题方法及解题技巧;追求的目标是通过对解题方法和技巧的分析,使读者能举一反三、触类旁通。本书每章均有一些读者想掌握、易掌握但尚未掌握或根本不知道的方法和技巧,例如,一些类型的极限的求法;有关微分中值定理命题的证明;定积分、重积分有关命题的证明;不等式的证明;无穷级数求和的方法;常微分方程中积分因子的求法等,均介绍了读者见所未见的新方法和新技巧。按当前考试特点及命题的发展趋势修订的本书,将更适合广大读者,尤其是考研应试者的需要。

本书可作为本科生、大专生、电大、夜大、职大生的参考书,也可作为青年教师和科技工作者的参考书。

版权所有,翻印必究。

本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签,无标签者不得销售。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学复习指导:思路、方法与技巧/陈文灯等编著. —北京:清华大学出版社,2003

(大学数学复习指导丛书/陈文灯主编)

ISBN 7-302-06547-0

I. 高... II. 陈... III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 027071 号

出 版 者: 清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

责任编辑: 陈仕云

印 刷 者: 北京大中印刷厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 787×1092 1/16 **印张:** 39.5 **字数:** 905 千字

版 次: 2003 年 7 月第 1 版 2003 年 7 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-06547-0/O·294

印 数: 0001~5000

定 价: 48.00 元

前 言

高等数学是理工科高等学校最重要的基础理论课之一。本课程注重使学生系统地获得微积分、级数及常微分方程的基础理论知识和常用的运算方法，培养学生具有比较熟练的分析问题和解决问题的能力，为学习后继课程奠定必要的数学基础。

本书对高等数学中普遍存在的疑难问题指出了解题思路、方法和规律，注重对解题的思路、方法进行分析和介绍，旨在指导读者掌握各种解题技巧和规律，从而做到快速轻松解题。本书自 1992 年 3 月问世以来，深受广大读者的欢迎和支持。根据读者的要求及多年来我们教学经验的积累，这次再版新增加了多种最新的解题思路和方法。

本节的特点：

(1) 对重要的概念、定理、公式进行剖析，增强了读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性及错用公式、定理的错误。同时通过一些概念题的错误与正确的两种解法的比较和对照，加深读者对概念的理解和记忆。

(2) 各章内容从基本概念、基本理论、基本方法的介绍入手，同时以大量题型为例，进行错解分析和难题解题技巧分析，指导读者在正确理解概念的基础上掌握各种解题方法和技巧。

(3) 以题型为纲深入分析探究，总结出解题方法与技巧，使读者胸有成竹，有“法”可依，有“路”可循。

(4) 用“举题型讲方法”的格式代替各书普遍采用的“讲方法套题型”的方法，使读者做题时思路畅通、有的放矢。

(5) 广泛采用表格法，使读者对要点一目了然，记忆深刻。

本书主要针对高等院校在读本科生，对于电大、夜大生，专科生也很有参考价值，尤其对参加考研和参加专升本的考生具有“指点江山”的作用。

本书由陈文灯主编，黄先开、施明存、曹显兵、殷先军、寇业富参与编写部分章节。由于作者的水平有限，书中不当之处在所难免，敬请读者和数学同仁批评指正。

作者

2003.6

目 录

第 1 章 函数	1
1.1 基本概念	1
1.2 函数的基本性质	9
1.3 错解分析	11
1.4 难题解题技巧及分析	13
习题一	25
第 2 章 极限与连续性	28
2.1 基本概念	28
2.2 基本性质及重要定理和公式	32
2.3 错解分析	38
2.4 求极限的方法	46
2.5 难题解题技巧及分析	60
习题二	71
第 3 章 一元函数微分学	76
3.1 基本概念	76
3.2 基本性质与公式	79
3.3 错解分析	85
3.4 难题解题技巧及分析	90
习题三	104
第 4 章 不定积分	108
4.1 基本概念·基本性质·基本公式	108
4.2 基本积分法	109
4.3 几种特殊类型函数的积分	120
4.4 错解分析	130
4.5 难题解题技巧及分析	134
习题四	140
第 5 章 定积分	144
5.1 基本概念·性质·公式	144
5.2 定积分的计算法	150
5.3 错解分析	156

5.4 难题解题技巧及分析	162
习题五	187
第6章 微分中值定理及台劳公式	191
6.1 基本定理	191
6.2 错解分析	195
6.3 难题解题技巧及分析	198
习题六	209
第7章 一元微积分的应用	213
7.1 导数的应用	213
7.2 微元法及其应用	235
7.3 定积分的应用	240
习题七	245
第8章 矢量代数与空间解析几何	253
8.1 矢量的概念及其性质	253
8.2 平面·直线·曲面方程	257
8.3 错解分析	260
8.4 难题解题技巧及分析	263
习题八	275
第9章 多元函数及其微分法	278
9.1 基本概念	278
9.2 基本定理与公式	282
9.3 错解分析	284
9.4 难题解题技巧及分析	289
习题九	320
第10章 重积分	324
10.1 概念·性质·公式	324
10.2 重积分的计算	326
10.3 错解分析	343
10.4 对称区域上的三重积分计算	347
10.5 难题解题技巧及分析	350
习题十	373
第11章 曲线积分与曲面积分	377
11.1 基本概念·基本性质	377
11.2 曲线、曲面积分的理论及计算方法	379

11.3 错解分析	405
11.4 场论初步	410
11.5 难题解题技巧及分析	417
习题十一	426
第 12 章 广义积分	429
12.1 基本概念及判敛法则	429
12.2 广义积分的计算及判敛	430
12.3 错解分析	438
12.4 难题解题技巧及分析	441
习题十二	452
第 13 章 无穷级数	454
13.1 数项级数	454
13.2 函数项级数	467
13.3 错解分析	496
13.4 难题解题技巧及分析	503
习题十三	526
第 14 章 不等式的证明	530
14.1 利用数学归纳法	531
14.2 引入参数法	533
14.3 利用微分中值定理	534
14.4 利用函数的单调增减性	536
14.5 利用函数的极值和最值	541
14.6 利用台劳展开式	544
14.7 利用积分的性质	548
14.8 其他方法	556
习题十四	560
第 15 章 常微分方程	563
15.1 基本概念	563
15.2 各类微分方程的解法	565
15.3 错解分析	597
15.4 难题解题技巧及分析	602
习题十五	618
参考文献	622

第 1 章 函 数

1.1 基 本 概 念

1.1.1 函数的定义

设有两个变量 x 和 y , x 的变域为 D , 如果对于 D 中的每一个 x 值, 按照一定的规律都有一个确定的 y 值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记作

$$y = f(x)$$

并称 x 为自变量, y 为因变量, 变域 D 为函数的定义域, 而称因变量的变域为函数的值域.

函数概念的两个要素: 定义域和对应关系.

两个函数当且仅当定义域和对应关系均相同时才表示同一函数, 否则, 它们表示两个不同的函数.

例 1.1 在下列各组函数中, 找出两个函数等价的一组:

(1) $y = x^0$ 与 $y = 1$

(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 与 $y = \sqrt{x^2}$

(3) $y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}}$

(4) $y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 与 $y = \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$

[解] (1) $y = x^0$ 的定义域为 $x \neq 0$; $y = 1$ 的定义域为 $(-\infty, \infty)$, 故该组的两个函数不等价.

(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $x \geq 0$; $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域为全数轴, 故该组的两个函数也不等价.

(3) 所给两个函数的定义域均为 $x \neq 0$, 且对应关系也相同, 故该组的两个函数等价.

(4) $y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 的定义域为 $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$ 即 $x \geq 3$

而 $y = \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$ 的定义域为 $\begin{cases} \frac{x-3}{x-2} \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$ 即 $x \geq 3$ 或 $x < 2$

故两函数不等价.

例 1.2 在下列各组函数中, 找出两函数等价的一组:

(1) $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y = x+1$ ($x \neq 1$)

(2) $y = \log_2(x-1) + \log_2(x-2)$ 与 $y = \log_2(x-1)(x-2)$

(3) $y = \sin x$ 与 $y = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

(4) $y = x$ 与 $y = \sin(\arcsin x)$

读者经思考后可作出明确回答.

评注 函数的表示只与定义域和对应关系有关,而与用什么字母表示无关,这个性质很重要(参看 1.4 节有关内容).

1.1.2 函数的定义域与值域

1. 定义域

根据实际问题建立的函数的定义域,就是具有实际意义的实自变量值的集合;由解析式子表示的函数的定义域,就是使运算有意义的实自变量值的集合.

2. 定义域的求法

首先要熟悉下列简单函数的定义域:

$$y = \frac{1}{x}, \text{ 定义域为 } x \neq 0;$$

$$y = \sqrt[n]{x}, \text{ 定义域为 } x \geq 0;$$

$$y = \log_a x, \text{ 定义域为 } x > 0;$$

$$y = \sin x \text{ 或 } \cos x, \text{ 定义域为 } (-\infty, +\infty);$$

$$y = \tan x, \text{ 定义域为 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z};$$

$$y = \cot x, \text{ 定义域为 } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$y = \arcsin x \text{ 或 } \arccos x, \text{ 定义域为 } -1 \leq x \leq 1.$$

求复杂函数的定义域,就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

例 1.3 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \log_{x-1}(16-x^2)$$

$$(2) y = \sqrt{\arcsin x + \frac{\pi}{4}}$$

$$(3) y = \sqrt{\sin x} + \lg(16-x^2)$$

$$(4) y = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$$

[解]

$$(1) \begin{cases} 16-x^2 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2 \text{ 及 } 2 < x < 4$$

$$(2) \begin{cases} \arcsin x + \frac{\pi}{4} \geq 0 \\ |x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1$$

$$(3) \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 16-x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n\pi \leq x \leq 2n\pi + \pi \\ -4 < x < 4 \end{cases} \quad (n=0, \pm 1, \dots)$$

$$\Rightarrow -4 < x \leq -\pi \text{ 及 } 0 \leq x \leq \pi$$

$$(4) \begin{cases} 2x-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 > 0 \\ \lg(2x-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 1 \text{ 及 } 1 < x \leq 2$$

3. 函数值域的求法

配方法,这是一种主要方法,比较常用;判别式法;通过求反函数的定义域借以达到求原函数的值域;利用微积分法;利用三角函数的性质.

例 1.4 求下列函数的值域:

$$(1) y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 17 \quad (2) y = \frac{5}{2x^2 - 4x + 3}$$

$$(3) y = 2 - \sqrt{3x^2 - 10x + 9} \quad (4) y = \frac{x+1}{x+2}$$

$$(5) y = 3 - 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (6) y = \arcsin \frac{2}{x-3}$$

$$(7) y = \frac{\sin x - 3}{\sin x + 3} \quad (8) y = 2^x - 2^{2x} + 1$$

[解] (1)应用配方法,则

$$\begin{aligned} y &= [(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)] + 17 \\ &= (x^2 - 5x + 5 - 1)(x^2 - 5x + 5 + 1) + 17 \\ &= (x^2 - 5x + 5)^2 + 16 \end{aligned}$$

故 $y \in \left[\frac{281}{16}, +\infty\right)$

(2)应用配方法或判别式法,将原式改写为

$$2yx^2 - 4yx + 3y - 5 = 0$$

而

$$\Delta = (-4y)^2 - 8y(3y-5) \geq 0$$

故

$$y(y-5) \leq 0, \text{ 即 } 0 \leq y \leq 5$$

显然 $y \neq 0$, 可知 $y \in (0, 5]$.

(3)应用配方法,则

由于

$$y = 2 - \sqrt{3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}}$$

故

$$y \in \left(-\infty, 2 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$$

(4)应用反函数法,当 $x \neq -2$ 时,由原式可知

$$xy + 2y = x + 1, \text{ 即 } x = \frac{1-2y}{y-1}, \quad y \neq 1$$

由此得

$$y \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

(5)应用反函数法,由原式可知 $x = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3-y}{2} + \frac{\pi}{12}$

其定义域为

$$\left| \frac{3-y}{2} \right| \leq 1 \quad \text{或} \quad |y-3| \leq 2$$

故

$$y \in [1, 5]$$

(6)应用反函数法,由原式可知 $x = 3 + \frac{2}{\sin y}$

其定义域为

$$y \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

又因

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

故

$$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(7)利用三角函数的性质,则原式 $= 1 - \frac{6}{\sin x + 3}$

由于 $-1 \leq \sin x \leq 1$, $2 \leq \sin x + 3 \leq 4$

于是 $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{\sin x + 3} \leq \frac{1}{2}$

故 $1 - \frac{6}{2} \leq y \leq 1 - \frac{6}{4}$, 即 $y \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$

$$(8) \text{原式} = \frac{5}{4} - \left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2$$

故 $y \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$

例 1.5 已知 $f(x) = \frac{4x-a}{x^2+1}$, a 为实常数.

(1) 当 $f(x)$ 的极大值为 1 时, 问 a 的值如何?

(2) 当 a 取(1)所确定的值时, 求 $f(x)$ 的值域.

$$[\text{解}] \quad (1) f'(x) = -\frac{4x^2 - 2ax - 4}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = \frac{a \pm \sqrt{a^2+16}}{4}$$

$$\text{故 } x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2+16}}{4}, \quad x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2+16}}{4}$$

$$\text{又 } f''(x) = \frac{2(4x^3 - 3ax^2 - 12x + a)}{(x^2+1)^3}$$

$$\text{经计算得 } f''(x_1) < 0, \quad f''(x_2) > 0$$

$$\text{故 } f(x_1) = \frac{4x_1 - a}{x_1^2 + 1}$$

$$\text{为极大值, 由此可得 } \frac{4x_1 - a}{x_1^2 + 1} = 1, \quad \text{即 } 4x_1 - a = x_1^2 + 1$$

将 $x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2+16}}{4}$ 代入, 可知 $a = 3$.

$$(2) \text{ 当 } a = 3 \text{ 时, } f(x) = \frac{4x-3}{x^2+1}$$

将 $a = 3$ 代入 x_1, x_2 的表达式, 可知当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 有极大值 1. 当 $x = -1/2$ 时, $f(x)$ 有极小值 -4.

$$\text{又因 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-3}{x^2+1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-3}{x^2+1} = 0$$

故 $f(2) = 1, f\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$ 分别是 $f(x)$ 的最大值和最小值, 因此 $f(x) \in [-4, 1]$.

例 1.6 设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$, 求其值域.

〔解〕 因为 $|\sin t|$ 是以 π 为周期的连续函数,

所以 $f(x)$ 可能也是以 π 为周期的函数.

$$\begin{aligned} \text{事实上 } f(x+\pi) &= \int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt \stackrel{\text{令 } t = u + \pi}{=} \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin(\pi + u)| du \\ &= \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin u| du = f(x) \end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数, 故只需讨论在 $[0, \pi]$ 上的情况 (如图 1-1 所示).

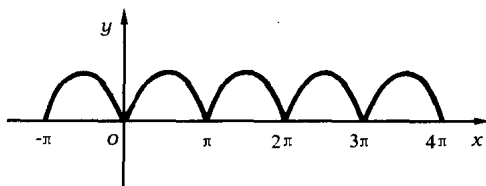


图 1-1

$$f'(x) = \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| - |\sin x| = |\cos x| - |\sin x|$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin t| dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin t dt = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin t| dt \xrightarrow{\text{由图像知}} 2 \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin t dt = 2 - \sqrt{2}$$

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 1$$

$$f(\pi) = \int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt \xrightarrow{\text{由图像知}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 1$$

由此可知, $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 最小值为 $2 - \sqrt{2}$, 故

$$f(x) \in [2 - \sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

1.1.3 反函数的定义

设给定一个函数 $y = f(x)$, 其值域为 $\mathbf{R}$, 如果对于一个 $y \in \mathbf{R}$, 由方程 $y = f(x)$ 可惟一确定一个 x 值, 则称变量 x 为变量 y 的函数, 记作

$$x = \varphi(y)$$

称为 $y = f(x)$ 的反函数.

习惯上, $y = f(x)$ 的反函数通常记作

$$y = f^{-1}(x) \quad \text{或} \quad y = \varphi(x)$$

评注

(1) $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图像重合; 而 $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

(2) 只有一一对应的函数才有反函数. 例如 $y = x^2$ 没有反函数; 但当 $x \geq 0$ 时, $y = x^2$ 有反函数 $y = \sqrt{x}$.

反函数的求法步骤:

第一步: 把 x 从方程 $y = f(x)$ 中解出;

第二步: 把从第一步得到的表达式中的 x 与 y 对换, 所得结果就是要求的 $y = f(x)$ 的反函数.

例 1.7 求下列函数的反函数.

$$(1) y = \frac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}} + 1 \quad (2) y = 1 + 2\sin \frac{x-1}{x+1} \quad (3) y = \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{1 + \sqrt{1+4x}}$$

[解] (1) 当 $x \neq 0$ 时, 将原式变形为

$$y(10^{2x} - 1) = 10^{2x} + 1 + (10^{2x} - 1) \quad \text{即} \quad (y-2)10^{2x} = y$$

解得

$$x = \frac{1}{2} \lg \frac{y}{y-2}$$

故反函数为

$$y = \frac{1}{2} \lg \frac{x}{x-2}$$

(2) 当 $x \neq -1$ 时, 将原式变形为

$$\frac{y-1}{2} = \sin \frac{x-1}{x+1} \quad \text{即} \quad \frac{x-1}{x+1} = \arcsin \frac{y-1}{2}$$

解得

$$x = \frac{\arcsin \frac{y-1}{2} + 1}{1 - \arcsin \frac{y-1}{2}}$$

故反函数为

$$y = \frac{\arcsin \frac{x-1}{2} + 1}{1 - \arcsin \frac{x-1}{2}}$$

(3) 当 $x \geq -\frac{1}{4}$ 时, 将原式变形为

$$y(1 + \sqrt{1+4x}) = 1 - \sqrt{1+4x} \quad \text{即} \quad \sqrt{1+4x} = \frac{1-y}{1+y}$$

解得

$$x = -\frac{y}{(1+y)^2}$$

故反函数为

$$y = -\frac{x}{(1+x)^2}$$

1.1.4 分段函数的定义

在定义域内, 如果对应于不同的区间, 函数有着不同的表达形式, 则称这样的函数为分段函数. 一般来讲, 分段函数不是初等函数, 但也有个别例外, 例如

$$y = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

既可看作分段函数, 又可看作初等函数.

常见的几个分段函数:

(1) y 是 x 的最大整数部分, 记为 $y = [x]$

(2) 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$

两个函数的图形如图 1-2、1-3 所示.

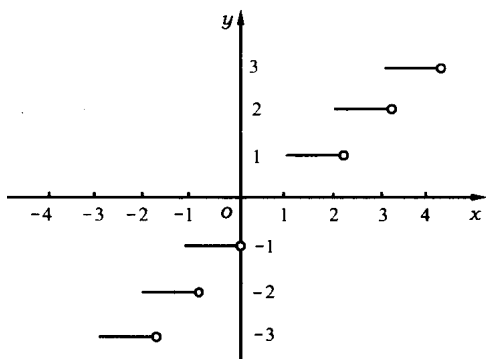


图 1-2

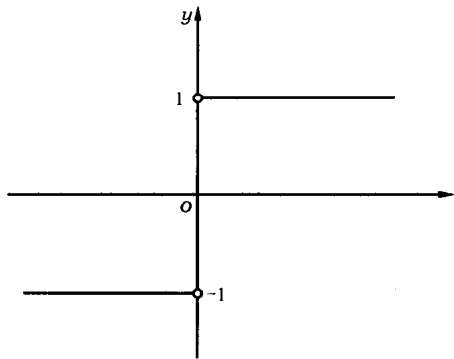


图 1-3

(3) 狄利克莱(Dirichlet)函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

① 该函数虽难以画出,但有如下特征:它是偶函数.事实上,当 x 为有理数时, $-x$ 也是有理数,故 x 和 $-x$ 所对应的函数值都为 1,两者相等,即 $f(x) = f(-x)$;而当 x 为无理数时, $-x$ 也是无理数,且 $f(x) = 0 = f(-x)$,故该函数为偶函数.

② 任何有理数 l 皆为其周期.事实上,当 x 为有理数时, $x+l$ 也是有理数,故 $f(x) = 1 = f(x+l)$;当 x 为无理数时, $x+l$ 也是无理数,故 $f(x) = 0 = f(x+l)$.可见 l 为 $f(x)$ 的周期.

例 1.8 求下列函数的反函数:

(1) $f(x) = (1+x^2)\operatorname{sgn} x$;

(2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2, & \text{当 } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$

[解] (1) 由 $y = (1+x^2)\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1+x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(1+x^2), & x < 0 \end{cases}$

解得

$$x = \begin{cases} \sqrt{y-1}, & y > 1 \\ 0, & y = 0 \\ -\sqrt{-(y+1)}, & y < -1 \end{cases}$$

故反函数为

$$y = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x > 1 \\ 0, & x = 0 \\ -\sqrt{-(x+1)}, & x < -1 \end{cases}$$

(2) 由 $y = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2, & \text{当 } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$

解得

$$x = \begin{cases} \sqrt{1+y}, & \text{当 } -1 \leq y \leq 0 \\ -\sqrt{y}, & \text{当 } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

故反函数为

$$y = \begin{cases} \sqrt{1+x}, & \text{当 } -1 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{x}, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1.1.5 复合函数的定义

设函数 $y=f(u)$, 其定义域为 U , 而 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X , 值域为 D . 如果 $D\subseteq U$, 则对于 X 内的每一个 x 值经过中间变量 u , 相应地得到惟一确定的一个 y 值. 则称变量 y 通过中间变量 u 而成为 x 的复合函数. 记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

评注 中间变量 u 作为函数时的值域 D 应包含在它作为自变量时的定义域 U 内, 这一条件是必不可少的.

例如 $y=\arcsin u, u=x^2+2$, 就不能构成复合函数 $y=\arcsin(x^2+2)$, 这是因为 $D=\{u|2\leq u<+\infty\}$ 不包含于 $U=\{u|-1\leq u\leq 1\}$ 之中.

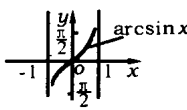
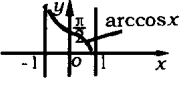
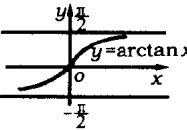
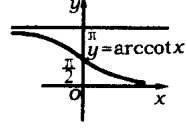
1.1.6 五个基本初等函数

如表 1-1 所示.

表 1-1

函数名称	定义域	值域	图 像	基本关系式
幂函数 $y=x^\mu$	随 μ 的不同而不同	随 μ 的不同而不同		
指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$		
对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$)	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$		
三角函数				
$y=\sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$		$\sin(\arcsin x) = x$ ($ x \leq 1$)
$y=\cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$		$\cos(\arccos x) = x$ ($ x \leq 1$)
$y=\tan x$	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ $n\in\mathbb{Z}$	$(-\infty, +\infty)$		$\tan(\arctan x) = x$ $x\in\mathbb{R}$
$y=\cot x$	$x\neq n\pi$ $n\in\mathbb{Z}$	$(-\infty, +\infty)$		$\cot(\operatorname{arccot} x) = x$ $x\in\mathbb{R}$

续表

函数名称	定义域	值 域	图 像	基本关系式
反三角函数				
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$		$\arcsin(\sin x) = x$ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$		$\arccos(\cos x) = x$ $x \in [0, \pi]$
$y = \arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$		$\arctan(\tan x) = x$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$		$\operatorname{arccot}(\cot x) = x$ $x \in (0, \pi)$
三个恒等式 $a^{\log_a x} = x$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$				

1.2 函数的基本性质

1.2.1 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 在 X 上有定义, 如果 $\exists M > 0$, 使得对于一切 $x \in X$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 X 上有界, 否则称 $f(x)$ 无界. 例如 $y = \sin x, \cos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$ 均为有界函数. 事实上,

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$|\arctan x| \leq \frac{\pi}{2}, \quad |\operatorname{arccot} x| \leq \pi, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

评注 函数 $f(x)$ 的有界与无界是相对于某个区间而言的. 例如 $y = f(x) = 1/x$ 相对于区间 $(0, 1)$ 是无界的, 而相对于区间 $[0.001, 2]$ 却是有界的.

1.2.2 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果对于 $\forall x_1, x_2 \in X$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加的 (或单调减少的); 若恒有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ (或 $f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 X 上是单调不减的 (或单调不增的).

1.2.3 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义, 如果对于 $\forall x \in X$, 恒有 $f(x) = f(-x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果对于 $\forall x \in X$, 恒有 $f(x) = -f(-x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称; 奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

评注

(1) 判别给定函数的奇偶性, 主要是根据奇偶性的定义.

(2) 记住关系式 $f(x) + f(-x) = 0$, 是判别 $f(x)$ 为奇函数的一种有效方法.

(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若定义域关于原点不对称, 则该函数必不是奇、偶函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

就不具有奇偶性.

(4) 常见的偶函数有 $\cos x, x^{2n}$ (n 为正整数); 奇函数有 $\sin x, \tan x, 1/x, x^{2n+1}$ (n 为正整数).

(5) 判别函数的奇偶性常用的一些性质:

① 两偶函数之和是偶函数; 两奇函数之和是奇函数.

② 两奇(或偶)函数之积(当分母不为零时之商)是偶函数.

③ 一奇函数与一偶函数之积(当分母不为零时之商)是奇函数.

例 1.9 判别下列函数的奇偶性:

$$(1) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$(2) y = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1} \quad (a > 0)$$

$$(3) y = \begin{cases} x(1-x), & x \geq 0 \\ x(1+x), & x < 0 \end{cases}$$

$$(4) y = F(x) \left[\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right]$$

其中 $a > 0, a \neq 1, F(x)$ 为奇函数.

[解] (1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 则

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(-x^2 + x^2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

故该函数为奇函数.

(2) 令 $f(x) = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$, 则

$$f(-x) = (-x) \frac{a^{-x} - 1}{a^{-x} + 1} = -x \frac{1 - a^x}{1 + a^x} = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1} = f(x)$$

故该函数为偶函数.

$$(3) \text{ 令 } f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x \geq 0 \\ x^2 + x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时 } f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x = -f(x)$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时 } f(-x) = -(-x)^2 - x = -x^2 - x = -f(x)$$

故该函数为奇函数.

(4) 令 $f(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$, 则

$$f(x) + f(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} + \frac{a^x}{1 - a^x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{a^x - 1} - \frac{a^x}{a^x - 1} + 1 = 0$$

可知 $f(x)$ 为奇函数, 又因 $F(x)$ 为奇函数, 故 $y = F(x)f(x)$ 为偶函数.

例 1.10 设函数 $f(x)$ 连续, 则在下列函数中, 必为偶函数的是

[].