



中国科学院研究生教学丛书



最优控制理论

王朝珠 秦化淑 编著



科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院研究生教学丛书

最优控制理论

王朝珠 秦化淑 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为《中国科学院研究生教学丛书》之一,是作者多年科研和教学的总结。

本书主要内容包括:最优控制问题及极大值原理;快速控制;线性二次最优控制;微分对策和 H_∞ 等。

本书有四个特点:(1)工程实际背景和理论体系相结合是本书的编写原则,即从工程实际背景中提出概念和要解决的最优控制问题,通过较直观的方法严格证明而获得理论结果,然后再利用实例说明理论结果的具体应用。(2)将最优控制理论和动态规划方法置于同一框架中加以叙述,既阐明其内在联系,又指出它们之间的区别。(3)从最优控制问题的视角讨论了微分对策和 H_∞ 。(4)本书内容安排层次分明,文字叙述简明准确,逻辑推理清晰,并备有一定数量的应用实例和习题。

本书可作为自动控制及系统科学专业的研究生教材,亦可作为有关专业教师及科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

最优控制理论/王朝珠,秦化淑编著. —北京:科学出版社,2003

(中国科学院研究生教学丛书)

ISBN 7-03-011240-7

I. 最… II. ①王… ②秦… III. 最佳控制-数学理论 IV. O232

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 015080 号

责任编辑:巴建芬/责任校对:宋玲玲

责任印制:刘秀平/封面设计:宋广通

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年9月第一版 开本:787×1092 1/16

2003年9月第一次印刷 印张:19 1/4

印数:1—3 000 字数:437 000

定价:30.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

《中国科学院研究生教学丛书》总编委会

主任：

白春礼

副主任：

何 岩 师昌绪 杨 乐 汪尔康 沈允钢
黄荣辉 叶朝辉

委员：

朱清时 叶大年 王 水 施蕴渝 余翔林
冯克勤 冯玉琳 高 文 洪友士 王东进
龚 立 吕晓澎 林 鹏

《中国科学院研究生教学丛书》技术学科编委会

主 编：

师昌绪

副主编：

冯玉琳 王东进

编 委：

徐至展 王占国 吴承康 陈先霖 马颂德 史忠植

《中国科学院研究生教学丛书》序

在 21 世纪曙光初露,中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际,《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了。相信这套丛书的出版,会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难,对提高研究生教育质量将起到积极的推动作用。

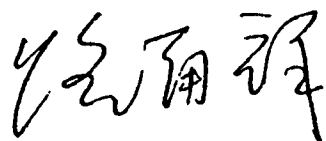
21 世纪将是科学技术日新月异、迅猛发展的新世纪,科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力,成为经济和社会发展的首要推动力量。世界各国之间综合国力的竞争,实质上是科技实力的竞争。而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量。我国要想在 21 世纪顺利地实施“科教兴国”和“可持续发展”战略,实现邓小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成中等发达国家,关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理、有能力参与国际竞争与合作的科技大军,这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务。

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心,在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨,长期坚持走科研与教育相结合的道路,发挥了高级科技专家多、科研条件好、科研水平高的优势,结合科研工作,积极培养研究生,在出成果的同时,为国家培养了数以万计的研究生。当前,中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好“三个基地”的指示,在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时,加强研究生教育,努力建设好高级人才培养基地,在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业发展重任的同时,为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才。

质量是研究生教育的生命,全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务。研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要的基础性工作。由于各种原因,目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展。为了改变这种情况,中国科学院组织了一批在科学前沿工作,同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材,并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版。希望通过数年努力,出版一套面向 21 世纪科技发展、体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书。本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性,同时也兼顾前沿性,使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科

学基础知识,也能被引导进入当代科学研究的前沿。这套研究生教学丛书,不仅适合于在校研究生学习使用,也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书。

“桃李不言,下自成蹊。”我相信,通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘,《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花,也将似润物春雨,滋养莘莘学子的心田,把他们引向科学的殿堂,不仅为科学院,也为全国研究生教育的发展做出重要贡献。

A handwritten signature in black ink, reading '王康' (Wang Kang), written in a cursive style.

前 言

最优控制理论是从 20 世纪 50 年代末 60 年代初发展起来的现代控制理论的一个重要分支。它最初研究的对象是由导弹、航天、航空、航海中的制导、导航和控制中所总结出来的一类按某个性能指标取最优(性能指标达到极小或极大)的控制问题。其核心问题是如何为被控制系统选择一个控制策略,使得被控制系统本身获得优良的技术品质和满意的经济效益。众所周知,在经典调节原理中,系统的各种综合性设计方法在很大程度上依赖于工程设计人员的个人经验,但利用最优控制理论进行设计却可以在严格的理论上获得按某个性能指标达到最优(最小或最大)的控制策略。无疑,这样一类问题的解决,对控制系统设计的理论和实践都是十分有意义的。随着最优控制理论的发展和实用高速计算机的小型化,不但使得最优控制理论应用于复杂控制系统设计成为可能,而且在具体工程中实现最优控制也屡见不鲜。它不但在航空和空间飞行器的控制设计方面得到了卓有成效的应用,而且在民用工业中的汽车、造纸、化工等部门亦有广泛的应用。特别值得指出的是,最优控制理论发展到今天,早已突破了产生它的军事控制工程领域,而向着生态环境、社会经济和管理等领域渗透。可以预期,在自然科学和社会科学交叉处生长起来的边缘学科中,最优控制理论也将会大有用武之地。

本书所说的最优控制理论,仅涉及由常微分方程组所描述的系统。严格地讲,应称其为集中参数控制系统的最优控制理论(相对于由偏微分方程组描述的分布参数控制系统而言)。它包括极大值原理、关于控制为线性的控制系统的快速控制、线性二次最优控制、定量微分对策的双方极值原理和 H_{∞} 控制初步等内容。

作 者

2003 年 2 月

目 录

《中国科学院研究生教学丛书》序

前言

第一章 最优控制问题与极大值原理	1
1.1 控制工程中的几个实际问题	1
1.2 最优控制问题的叙述	5
1.3 控制量不受约束的最优控制	10
1.3.1 终端时刻 t_f 固定, 终端状态 $x(t_f)$ 自由	10
1.3.2 终端时刻 t_f 固定, 终端状态 $x(t_f)$ 受约束	22
1.3.3 终端时刻 t_f 自由与控制量不受约束的极大值原理	23
1.4 控制量受约束的最优控制——庞特里雅金(Л. С. ПОНТЯГИН)极大值原理	27
1.4.1 终端时刻 t_f 固定的最优控制	28
1.4.2 终端时刻 t_f 自由及控制量受约束的极大值原理	37
1.5 与极大值原理应用有关的问题	41
1.5.1 极大值原理的定解条件和最优综合	41
1.5.2 最优控制的充分条件	42
1.5.3 最优控制不存在的例子	45
1.5.4 极小值原理	48
1.5.5 奇异控制	50
1.5.6 一个工程实例	58
1.6 动态规划方法与极大值原理	65
1.6.1 最优性原理	65
1.6.2 动态规划方法与极大值原理	67
1.6.3 最优控制存在的充分条件	73
习题一	76
第二章 快速控制问题	80
2.1 一类仿射非线性系统的快速控制问题	80
2.2 线性时变快速控制问题	88
2.2.1 线性时变微分方程的解及其性质	88
2.2.2 线性时变快速控制问题	91
2.3 线性定常快速控制问题	98
2.3.1 线性定常快速控制问题为正则的充要条件	99
2.3.2 快速控制的惟一性	102
2.3.3 快速控制的开关次数	106
2.3.4 快速控制的存在性	109

2.3.5	快速控制的几何性质	114
2.3.6	线性定常快速控制问题的贝尔曼方程	121
2.3.7	两个求解快速控制的实例	124
2.4	快速控制问题的奇异性	145
习题二	151
第三章	线性二次最优控制	153
3.1	线性二次最优控制问题的叙述	153
3.2	线性系统二次最优调节问题	159
3.2.1	时变系统有限时间最优调节问题.....	159
3.2.2	时变系统无穷时间最优调节问题.....	168
3.2.3	定常系统无穷时间最优调节问题.....	176
3.2.4	黎卡提代数方程的求解方法	204
3.3	具有指定衰减速度的最优调节问题	212
3.4	线性系统的最优输出跟踪问题	215
3.5	线性系统的受限奇异最优调节问题	220
习题三	227
第四章	微分对策	230
4.1	一类定量微分对策问题	230
4.1.1	一类定量微分对策问题实例	230
4.1.2	二人零和微分对策问题的叙述	234
4.2	定量微分对策的双方极值原理	235
4.2.1	最优策略的必要条件——定量双方极值原理	235
4.2.2	最优策略的充分条件	243
4.2.3	线性二次微分对策问题	245
4.3	微分对策的“最优性原理”和哈密顿-雅可比-埃萨克斯(Hamilton-Jacobi-Isaacs)方程.....	255
4.3.1	微分对策的“最优性原理”	255
4.3.2	哈密顿-雅可比-埃萨克斯方程.....	258
第五章	H_∞控制初步	266
5.1	预备知识	266
5.1.1	线性定常多变量系统的频域描述.....	266
5.1.2	几种空间	267
5.1.3	实有理分式矩阵的 H_∞ 范数	268
5.1.4	系统增益, 信号范数	268
5.2	线性系统的 H_∞ 控制	269
5.2.1	频域内的 H_∞ 控制	269
5.2.2	时域内的 H_∞ 控制	272
5.2.3	时域 H_∞ 控制的解	273

5.3 非线性 H_∞ 控制	279
5.3.1 非线性系统的 L_2 -增益	279
5.3.2 非线性 H_∞ 控制	282
5.3.3 H_∞ 控制问题的次优解	284
参考文献	288
附录 定理 2.6 和定理 2.8 的证明	289

第一章 最优控制问题与极大值原理

1.1 控制工程中的几个实际问题

本节给出几个工程控制的实例。它们来自各个不同的应用领域,用以说明最优控制问题产生的广泛性、多样性及重要性。

例 1.1 升降机的最快升降问题

将升降机简化成一个内部带控制器的物体 M ,其质量为 1。常重力加速度 g 垂直向下作用到 M 的质心上。控制器可提供一个作用于 M 质心上的使其垂直上升或下降的加速度 $u(t)$ 。考虑到 $u(t)$ 由动力设备产生,其大小必受到限制。因此有 $|u(t)| \leq k$, k 为正常数。简化示意图如图 1.1 所示。

设 t_0 时刻 M 的质心距地面的垂直距离为 $x(t_0) = x_1^0$, 而垂直运动速度为 $\dot{x}(t_0) = x_2^0$ 。我们的问题是如何选择 $u(t)$, 使 M 从初始时刻 t_0 的初态 (x_1^0, x_2^0) 最快地到达终端时刻 t_f 的末态 $x(t_f) = 0$ (到达地面), $\dot{x}(t_f) = 0$ (到达地面时速度为零)。

记 x 为 M 的质心距地面高度, 地面上为正, 地面下为负。加速度 $u(t)$ 向上为正, 向下为负。由牛顿第二定律直接得

$$\ddot{x} = u - g$$

取 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, 则上式可表为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u - g \end{aligned} \quad (1.1)$$

而端点条件(初态和末态)为

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0; \quad x_1(t_f) = 0, \quad x_2(t_f) = 0 \quad (1.2)$$

这里 x_1, x_2 称为状态量, 而 u 称为控制量(它操纵 M 的上下运动)。

于是升降机的最快升降问题可叙述为: 寻找满足 $|u| \leq k$ 的控制, 使得它把 M [由式 (1.1) 描述其运动] 从初态 (x_1^0, x_2^0) 转移到末态 $(0, 0)$ 且使过渡时间最短, 即

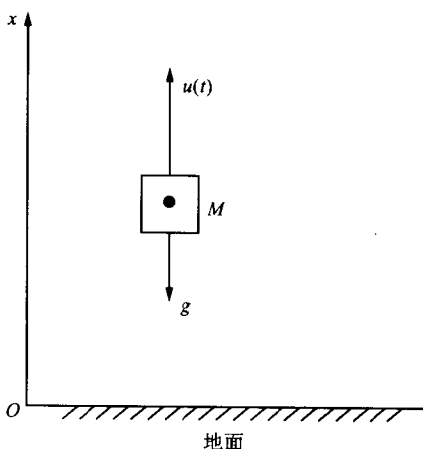


图 1.1 升降机上升、下降示意图

$$J[u(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$

最小, t_f 待求。

例 1.2 防天拦截问题

目前在国防上,不但存在着防空问题,而且还存在着防天问题,即防御洲际导弹或其他航天器的袭击。在这里仅讨论用导弹拦截目标的问题。虽然用导弹拦截目标是一个非常复杂的系统工程,但其首要任务是从理论上为导弹拦截器设计一个能实现拦截的导引律(操纵导弹的控制律),即将拦截器和目标都看成质量集中于质心的质点,为实现质点碰撞而为拦截器设计控制律(又称导引规律)。

在某一惯性坐标系内,设 x_L 和 \dot{x}_L 为拦截器质心的位置矢和速度矢,而 x_M 和 \dot{x}_M 为目标质心的位置矢和速度矢,即 $x_L \in \mathbb{R}^3, \dot{x}_L \in \mathbb{R}^3, \dot{x}_M \in \mathbb{R}^3, \dot{x}_M \in \mathbb{R}^3$ 。

取

$$\begin{aligned} x &= x_L - x_M \\ v &= \dot{x}_L - \dot{x}_M \end{aligned}$$

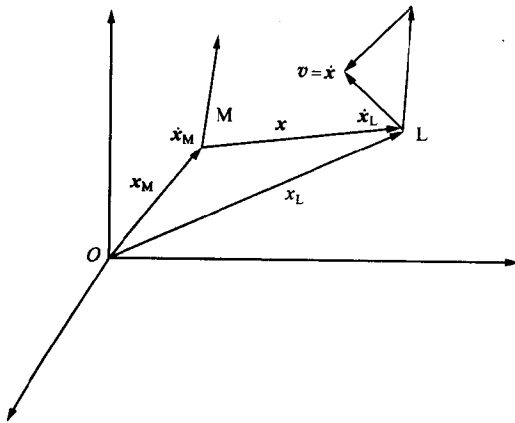


图 1.2 拦截器 L 和目标 M 位置、速度图

x, v 称为相对位置和速度矢,如图 1.2 所示。

为了简单起见,设目标无机动飞行且拦截器和目标均飞行在已知空域内。只要把作用于拦截器 L 和目标 M 的质心上的重力和空气动力进行合理简化,且注意到发动机产生推力的机理。如果记 $m(t) \in \mathbb{R}^1$ 为拦截器 t 时刻质量, $F(t) \in \mathbb{R}^1$ 为拦截器 t 时刻推力大小, $u(t) \in \mathbb{R}^3$ 为拦截器 t 时刻推力方向矢, $c \in \mathbb{R}^1$ 为发动机的有效喷气速度常数,则拦截器与目标的相对运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= a(t) + \frac{F(t)}{m(t)} u(t) \\ \dot{m} &= -\frac{F(t)}{c} \end{aligned} \quad (1.3)$$

其中 $a(t) \in \mathbb{R}^3$ 是固有(除控制加速度外)相对加速度矢,它是已知 t 的矢值函数。系统的状态为 x, v, m 。其初始条件为

$$x(t_0) = x_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad m(t_0) = m_0 \quad (1.4)$$

系统的控制变量为 $F(t), u(t)$ 。从工程实际考虑,它们应满足

$$0 \leq F(t) \leq \max F(t) \triangleq F$$

$$\| \mathbf{u} \|^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1 \quad (1.5)$$

第一个关系式表示推力大小有限制,第二个关系式表 \mathbf{u} 为单位矢量。记 $\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, u_3)$, 则 \mathbf{u} 的欧几里得范数 $\| \mathbf{u} \|^2$ 为

$$\| \mathbf{u} \|^2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

由于拦截器的质量永不能小于所有燃料消耗后剩余质量 m_e 。 m_e 称为有效载荷,它包括仪器、壳体、武器等。从而知终端时刻 t_f 的质量 $m(t_f)$ 应满足

$$m(t_f) \geq m_e \quad (1.6)$$

所谓航天拦截就是要求在终端时刻 t_f 时,拦截器和目标的相对距离矢为零,而相对速度矢可任意。即

$$\mathbf{x}(t_f) = 0, \quad \mathbf{v}(t_f) \text{ 任意} \quad (1.7)$$

如果我们既要求整个拦截过程的时间尽量短,又要求燃料消耗尽量省,则可取如下性能指标

$$J[F(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} [c_1 + F(t)] dt \quad (1.8)$$

最小。其中 c_1 为正常数。

由(1.3)直接得(1.8)为 $J = c_1(t_f - t_0) + c[m_0 - m(t_f)]$, $t_f - t_0$ 表示过渡时间, $m_0 - m(t_f)$ 表示燃料消耗。从而知(1.8)实际上是过渡时间和燃料消耗的混合指标。

综上所述,所谓最优防天拦截问题,即选择满足(1.5)的控制 $F(t), \mathbf{u}(t), t \in [t_0, t_f]$, 驱使状态方程(1.3)从初态(1.4)出发的解,在某终端时刻 $t_f > t_0$ 时满足(1.6)和(1.7)且使性能指标(1.8)达到最小。

例 1.3 雷达跟踪问题

采用雷达跟踪目标(导弹或飞机),需要操纵雷达天线,使它的“指向瞄准线”与视线(雷达到目标的连线)一致。设目标仅在水平面内运动,把雷达天线视为在水平面内绕垂直此水平面的轴旋转的质点。如图 1.3 所示。

以 θ 表示天线的“指向瞄准线”相对于某参考线的角位移, I 表示天线绕旋转轴的惯性矩, β 表示阻尼因子, $M(t)$ 表示驱使天线旋转的控制力矩,逆时针为正。

由牛顿力学知道,在力矩 M 驱动下天线的旋转运动方程为

$$I \ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} = M \quad (1.9)$$

其初始条件为

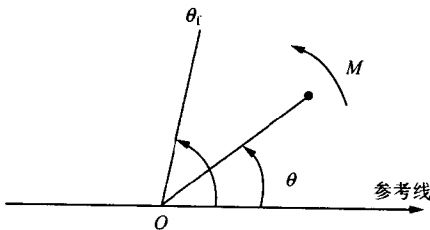


图 1.3 雷达天线旋转示意图

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0 \quad (1.10)$$

由于控制力矩 $M(t)$ 的大小实际上总有一定的限制, 因此存在一正常数 k , 使

$$|M(t)| \leq k \quad (1.11)$$

记 t_f 为终端时刻, 要求终端状态为

$$\theta(t_f) = \theta_f, \quad \dot{\theta}(t_f) = 0 \quad (1.12)$$

其中 θ_f 表示视线相对某参考线的角位移; $\dot{\theta}(t_f) = 0$ 表明天线一旦跟上目标就不再脱离。考虑到雷达设计的实际情况, 天线旋转尚需满足如下要求:

(1) 天线的旋转应在尽可能短时间完成, 即要求 $\int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$ 尽可能小。

(2) 在天线旋转过程中要求能量消耗尽量少, 以避免部件的损坏。已知天线旋转过程中能量消耗与 $\int_{t_0}^{t_f} \dot{\theta}^2 dt$ 成正比。

(3) 在天线旋转过程中要求消耗功率尽量少。已知天线旋转过程中功率消耗与 $\int_{t_0}^{t_f} |M(t)| dt$ 成正比。

上述要求很可能是矛盾的, 只能统筹兼顾分清轻重, 综合地加以考虑。一种简便方法是选取适当的正加权系数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 构成综合性性能指标, 即

$$J[M(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} [\lambda_1 + \lambda_2 \dot{\theta}^2 + \lambda_3 |M(t)|] dt \quad (1.13)$$

综上所述, 最优天线跟踪问题为: 选择满足(1.11)的控制 $M(t)$, 驱使系统(1.9)从初态(1.10)出发, 在某一终端时刻 t_f 时满足(1.12)且使(1.13)达到最小。

记 $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$, 最优天线跟踪问题(1.9)~(1.13)可叙述为如下标准形式:

状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\beta}{I}x_1 + \frac{1}{I}M(t) \end{aligned}$$

和初始条件

$$x_1(t_0) = \theta_0, \quad x_2(t_0) = \dot{\theta}_0$$

要求选择满足约束条件

$$|M(t)| \leq k$$

的控制力矩 $M(t)$, 使在某一终端时刻 t_f 满足

$$x_1(t_f) = \theta_f, \quad x_2(t_f) = 0$$

且使性能指标

$$J[M(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} [\lambda_1 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 |M(t)|] dt$$

达到最小。

例 1.4 生产库存控制问题

一种产品的生产与其库存有密切关系。生产太多卖不出去,就会造成库存积压占用大量资金;若生产太少,就会造成市场脱销,因而减少收入。因此采取什么策略使库存适当,市场又不脱销是一个值得讨论的策略问题。

设 $x_1(t)$ 是 t 时刻的库存量, $u(t)$ 是 t 时刻产品的生产率(即单位时间的产量), $x_2(t)$ 是 t 时刻的销售率(即单位时间的销售量)。生产库存系统的状态方程可描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda x_1 \end{aligned} \quad (1.14)$$

其初始条件为

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0 \quad (1.15)$$

这里 x_1, x_2 为状态量, u 为控制量。从 x_1, x_2, u 的含义直接得(1.14)的第一式。而(1.14)的第二式表示销售率的变化率与库存量成反比。 λ 为正比例常数。

显然控制应满足如下限制:

$$u_0 \leq u \leq u_1, \quad 0 \leq x_2 < u_1 \quad (1.16)$$

其中 u_0, u_1 为两常数,分别表示最小和最大生产率。

设 c 表示生产率为 $u(t)$ 时单位时间内的生产成本, h 表示库存为 $x_1(t)$ 时单位时间内的库存成本, c, h 皆为常数。对给定的终端时刻 t_f , 要求整个时间内总成本最小, 即性能指标为

$$J[u(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} [hx_1(t) + cu(t)] dt \quad (1.17)$$

所谓最优生产库存问题,是选择满足(1.16)的生产率,驱使系统(1.14)从初始条件(1.15)出发的解使性能指标(1.17)达到最小。

1.2 最优控制问题的叙述

从 1.1 节中叙述的几个实例可以看出,它们有如下共同的特点:

(1) 都有一个被控对象。它通常是由常微分方程组描述的动态模型来表征的,即

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [t_0, t_f] \quad (1.18)$$

其中: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是状态量,它是描述被控对象动态的 n 个独立变量,记为 $x \in$

\mathbb{R}^n 。 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)^\top$ 是控制量,它是影响被控对象状态的 r 个变量,记为 $\mathbf{u} \in U_r$, U_r 是 \mathbb{R}^r 中的子集,既可是开集又可是闭集。 t 为时间变量 $t_0 \leq t \leq t_f$ 或 $t \in [t_0, t_f]$ 。 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = [f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \dots, f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)]^\top$,它是描述被控对象动态特征的 n 维矢值函数,记为 $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times U_r \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。 n, r 为正整数且 $r \leq n$ 。 \mathbb{R}^l 表 l 维欧几里得空间。 t_0, t_f 分别称初始和终端时刻。通常取定值 t_0 ;而 t_f 可取定值,也可待求。

通常(1.18)的初态是给定的。记作

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.19)$$

关于系统(1.18)总假设:对有限时间区间 $[t_0, t_f]$ 给定的任一分段连续且取值属于 U_r 的 r 维矢值函数 $\mathbf{u}(t)$, (1.18)和(1.19)都存在惟一解。

(2) 都要求把被控系统的初态 \mathbf{x}_0 通过控制作用,在某个终端时刻 $t_f > t_0$ 引导到某个终端状态 $\mathbf{x}(t_f)$ 。 $\mathbf{x}(t_f)$ 通常受几何约束。此几何约束有时是 \mathbb{R}^n 中的确定点 \mathbf{x}_i ;有时是 \mathbb{R}^n 中的超曲面;有时是 \mathbb{R}^n 中的某个区域。总之,通常要求终端状态 $\mathbf{x}(t_f)$ 属于 \mathbb{R}^n 中的某个点集 S 。 S 称为目标集。本书仅考虑如下的目标集 S

$$S := \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}, t_f) = 0, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^p, p \leq n \} \quad (1.20)$$

(3) 都有一个容许控制集合。

容许控制集合 $\mathcal{U}[t_0, t_f]$ 为

$$\mathcal{U}_{t_0, t_f} := \{ \mathbf{u}(t) \mid \mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))^\top, u_i(t) \text{ 是定义在 } [t_0, t_f] \text{ 上的分段连续函数, } i = 1, 2, \dots, r; \mathbf{u}(t) \in U_r, \text{ 且把(1.18)的初态 } \mathbf{x}_0 \text{ 在终端时刻 } t_f \text{ 引导到目标集 } S \text{ 上} \} \quad (1.21)$$

(1.21)既表明了控制 $\mathbf{u}(t)$ 的分量 $u_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) 应属的函数类,又规定了控制 $\mathbf{u}(t)$ 的取值范围。由(1.21)确定的容许控制函数既保证在理论上是严紧的,而且在工程上又是能实现的。为了叙述简洁,称(1.18)为被控系统。

(4) 都有一个表征系统品质优劣的性能指标。由于它是一个依赖控制函数 $\mathbf{u}(t)$ 的“函数”,又称为性能指标泛函或代价泛函。记为 $J[\mathbf{u}(\cdot)]$,它是一个依赖于控制 $\mathbf{u}(\cdot)$ 的有限实数,即

$$-\infty < J[\mathbf{u}(\cdot)] < +\infty$$

一般说 $J[\mathbf{u}(\cdot)]$ 的表达式中既应包含依赖于终端时刻 t_f 和终端状态 $\mathbf{x}(t_f)$ 的末值型项,又应包含依赖于整个控制过程的积分型项,即

$$J[\mathbf{u}(\cdot)] = K(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (1.22)$$

其中 $K \in \mathbb{R}^1, L \in \mathbb{R}^1$, 即 K, L 皆为标量函数。 $\mathbf{x}(t)$ 是(1.18)和(1.19)对应于控制 $\mathbf{u}(t)$

的解,又称为轨线。

把 1.1 节的几个实例中提出的问题归纳起来可对被控系统(1.18)提出如下共同问题:寻求一个容许控制 $u(t) \in \mathcal{U}_{[t_0, t_f]}$, 使得系统(1.18)在该控制作用下从初态 $x(t_0) = x_0$ 出发,在某个大于 t_0 的终端时刻 t_f 达到目标集 S 上,且使性能指标 $J[u(\cdot)]$ 达到极小(若要求性能指标达到极大时,只要讨论 $J' = -J[u(\cdot)]$ 的极小便可)。这就是通常说的最优控制问题。如果最优控制问题有解即使 $J[u(\cdot)]$ 达到极小的控制函数存在,记为 $u^*(t), t \in [t_0, t_f]$ 。 $u^*(t)$ 称为最优控制—与 $u^*(t)$ 相应的(1.18)、(1.19)的解 $x^*(t)$ 称为最优轨线,相应的性能指标 $J^* = J[u^*(t)]$ 称为最优性能指标。 $[u^*(t), x^*(t)]$ 称为最优控制问题(1.18)~(1.22)的最优解。从最优控制问题的叙述得知

$$J^* \triangleq J[u^*(t)] \leq J[u(t)], \quad \forall u(t) \in \mathcal{U}_{[t_0, t_f]}$$

在最优控制问题中,根据涉及的函数 $f(\cdots), g(\cdots), K(\cdots), L(\cdots)$ 的不同,习惯上有几种不同的称谓。例如在 $J[u(\cdot)]$ 的表达式(1.22)中,当 $K(\cdots) = 0, L(\cdots) = 1$ 时, $J[u(\cdot)]$ 表示系统从初始状态 x_0 转移到目标集 S 上的过渡时间 $t_f - t_0$, 此时最优控制问题称为快速控制问题;当(1.18)中的右端函数 $f(\cdots)$ 和确定目标集 S 的函数 $g(\cdots)$ 及确定性能指标的函数 $K(\cdots)$ 和 $L(\cdots)$ 都不显含 t 和 t_f 时,此最优控制问题称为定常系统的最优控制问题,否则称为时变系统的最优控制问题;当目标集 S 仅含一个固定点时,称为固定端点问题;而当 $S = \mathbb{R}^n$ 时,即对终端状态 $x(t_f)$ 无任何约束时,称为自由端点问题;当 t_f 事先给定时,称固定终端时刻问题,否则称为终端时刻自由问题;又当 $L(\cdots) = 0, K(\cdots) \neq 0$, 则 $J[u(\cdot)]$ 称为末值指标;当 $L(\cdots) \neq 0, K(\cdots) = 0$, 则 $J[u(\cdot)]$ 称为积分型指标;而当 $L(\cdots) \neq 0, K(\cdots) \neq 0$, 则 $J[u(\cdot)]$ 称为混合型指标。因此,性能指标(1.22)包括了工程设计中评价系统品质优劣的常用指标。

虽然最优控制问题的指标有混合型、末值型和积分型三种,但在某些条件下,三种指标是可以相互转换的。

(1) 混合型指标 \rightarrow 积分型指标

设 $K(x, t)$ 关于变元是连续可微的,则

$$\begin{aligned} J[u(\cdot)] &= K(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \\ &= K(x(t_f), t_f) - K(x_0, t_0) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt + K(x_0, t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} dK(x(t), t) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt + K(x_0, t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial K(x(t), t)}{\partial x} f(x(t), u(t), t) + \frac{\partial K(x(t), t)}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + L(x(t), u(t), t) \right] dt + K(x_0, t_0) \end{aligned} \quad (1.23)$$