漫遊无穷王国

吴深德 编著

科学普及出版社

漫游无穷王国

吴深德　编著

科学普及出版社

内 容 提 要

本书从人们熟悉的游戏和传说，如：算盘拨子游戏、大象或蒲公英的繁殖、国际象棋发明者的故事、婆罗门之谜等，逐步介绍了“无穷大”，并引入了“势”的概念，是一本通俗易懂的数学普及读物。

适合于中学师生和有初中以上文化程度的读者阅读，对大学低年级的学生也不无补益。

漫 游 无 穷 王 国

吴深德 编著

责任编辑：吴之静

封面设计：王序德

*

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京市四季青印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：$2^{1}/_{2}$ 字数：51千字

1985年4月第1版 1985年4月第1次印刷

印数：1—22,100册 定价：0.36元

统一书号：13051·1393 本社书号：0810

目　录

第 1 章

游戏和传说中的“无穷大”

有些数字，初看起来，似乎不算大，但实际上是很大很大的。不动脑筋的人，往往在这上面吃大亏，传说中的古印度国王舍罕，就是最典型的一个。

但愿你做个聪明的“象棋发明者”，不要做个愚蠢的国王（请见§1.4的故事）。

§1.1 他将一生一世拨算盘

看到这个标题，你也许以为他刚从商业学校或者财经学院毕业，准备到一家大公司去当出纳员或者会计师。这样，他就一生一世和算盘打交道啦！其实，在这里，我们只是请你看下面这个很普通的算题：

算盘这一古老的计算工具一直被人们广泛地应用着。在实现四个现代化的今天，即使有了电子计算器和电子计算机这样先进的计算工具，它也仍然发挥着重要的作用。现在请你拿出算盘，从右边算起，在算盘的第一档上，一颗一颗地向上拨算珠，每逢十进一，这时在第二档上就有一颗算珠；这样，不断地在第一档上，一颗一颗地向上拨算珠，第二档

上的算珠就逐渐地多起来，当第二档上的算珠进满了的时候，就有一颗算珠进入第三档；当第三档上的算珠进满了的时候，就有一颗算珠进入第四档；……。请你回答：当第一颗算珠进入第十一档的时候，第一档的算珠要拨多少次？并且估算一下，拨这些算珠需要多少时间？

你也许会说："当第一颗算珠进入第十一档的时候，大概不会花很多的时间，大约几个小时就可以了，顶多总不会超出一天吧！"

这种说法是不科学的。因为你没有认真的思考和计算，只是"大概"、"大约"地猜想而已。如果你认真地思考过，并且计算一下，那么，你也许会目瞪口呆的。

很明显：

（1）当第一颗算珠进入第二档的时候，第一档的算珠就要拨10次（注意！0的个数比所进的档数小1）；

（2）当第二档上的算珠进满的时候，第一档的算珠就要拨10×10＝100（次）。这时，就有一颗算珠进入第三档。因此，当第一颗算珠进入第三档的时候，第一档的算珠就要拨100次（注意！0的个数比所进的档数小1）；

（3）当第三档上的算珠进满的时候，第一档的算珠就要拨10×100＝1000（次）。这时，就有一颗算珠进入第四档。因此，当第一颗算珠进入第四档的时候，第一档的算珠就要拨1000次（注意！0的个数比所进的档数小1）；

从以上三个"注意！"，我们就可以知道：

（4）当第一颗算珠进入第五档的时候，第一档的算珠就要拨10,000次；

（5）当第一颗算珠进入第六档的时候，第一档的算珠就要拨100,000次；

（6）当第一颗算珠进入第七档的时候，第一档的算珠就要拨1,000,000次；

……。

因此，当第一颗算珠进入第十一档的时候，第一档的算珠就要拨10,000,000,000次。

拨10,000,000,000（100亿）次算珠需要多少时间呢？

假如拨算珠的动作异常迅速，每秒钟可以拨10次算珠，那么拨10,000,000,000次算珠，就需要1,000,000,000秒（10亿秒）。这个时间有多长呢？我们知道，一年有365.2422天[1]，一天有24小时，一小时有60分，一分有60秒。如果每天工作8小时，那么工作1,000,000,000秒就等于工作

$$\frac{1,000,000,000}{365.2422\times 8\times 60\times 60}\approx 95（年）。$$

因此，如果某人从6岁起，开始在算盘的第一档上一颗一颗地拨算珠（其它档上拨算珠的时间不计算），那么，当他活

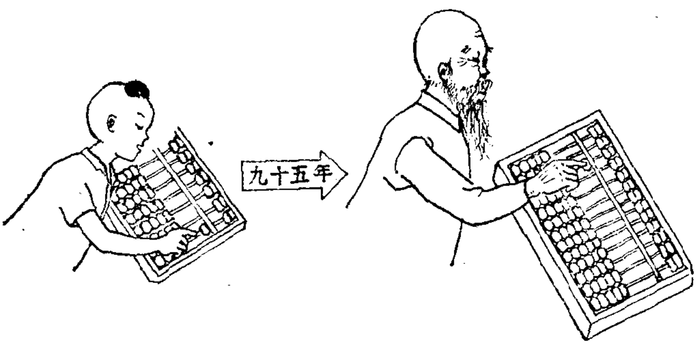

图 1

[1] 一般来说，一年有365天，如果是闰年，那就有366天。但是，一年实际的天数是一个“回归年”（地球绕太阳一周）的时间，即365.2422天。

到100岁的高龄时，第十一 档上才拨进一颗算珠（图1）。

这是多么惊人的数字呀！

§1.2 喜马拉雅山还没有一堆纸高

喜马拉雅山是世界的“屋脊”，它的最高峰——珠穆朗玛峰是世界的最高峰。可是，我们这个标题却说，喜马拉雅山还没有一堆纸高，这不是在说笑话吗？

你要知道，这是一堆很特殊的纸呀！它要接连放二十次才成哩！

第一次在地面上放1张纸；

第二次在第一次所放的纸上再放3张纸；

第三次在第二次所放的纸上再放9张纸；

第四次在第三次所放的纸上再放27张纸；

……

依次类推，每一次所放纸的张数总是前一次所放纸的张数的3倍。请回答：第二十次在上面放纸时，这堆纸有多少张？这堆纸又有多高呢？

有的人也许会想：“这堆纸的高度嘛，大概不会太高的，大约和桌子差不多高，再高总不会把天花板给冲破了吧！”

这种盲目的估计是不科学的，因为没有作认真的计算和思考。

下面我们就来仔细地计算一下。很明显：

第一次，地面上有1（张纸）；

第二次，地面上有 $1+3=4$（张纸）；

第三次，地面上有 $1+3+9=13$（张纸）；

第四次，地面上有 $1+3+9+27=40$（张纸）；

……

到了第二十次，地面上该有多少张纸呢？
让我们来找出它们的规律，因为

$$1=\frac{1}{2}(3-1); \qquad 4=\frac{1}{2}(3^2-1);$$

$$13=\frac{1}{2}(3^3-1); \qquad 40=\frac{1}{2}(3^4-1);$$

所以 第一次，地面上有 $\frac{1}{2}(3-1)$ 张纸；

第二次，地面上有 $\frac{1}{2}(3^2-1)$ 张纸；

第三次，地面上有 $\frac{1}{2}(3^3-1)$ 张纸；

第四次，地面上有 $\frac{1}{2}(3^4-1)$ 张纸；

……

因此 第二十次，地面上有 $\frac{1}{2}(3^{20}-1)$ 张纸。

$$\frac{1}{2}(3^{20}-1)=\frac{1}{2}(3486784401-1)$$

$$=1,743,392,200。$$

这就是说，到了第二十次，地面上的纸就有1,743,392,200张。这个数字是很大的，读起来也有点别扭：十七亿四千三百三十九万二千二百张。

这么多张纸有多高呢？

我们知道，20张纸足足有一毫米厚，所以这么多张纸的高度足足有八万七千一百六十九点六一米。即：

$1743392200\div20=87169610$（毫米）$=87169.61$（米）。

这样的高度连喜马拉雅山也甘拜下风呀！因为它的最高峰（珠穆朗玛峰）的高度是八千八百四十八点一三米❶，而这堆纸的高度差不多是珠穆朗玛峰的高度的十倍了（图2）。

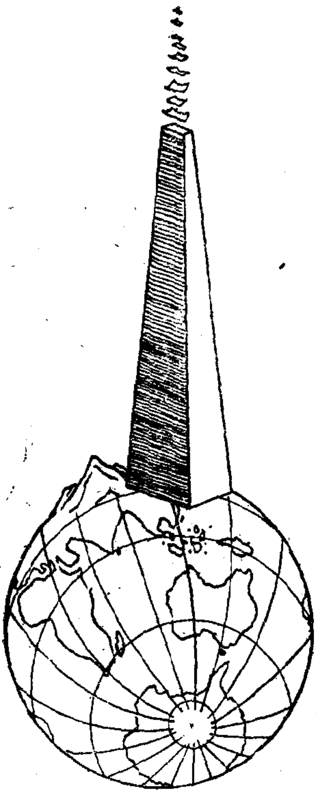

图 2

这堆纸的高度出乎你的意料之外吧！

§1.3 全世界将被一株蒲公英的后代所淹没

有趣的科学读物是人人喜欢的。但是，你在阅读的过程中，能开动脑筋认真地思考书中写的每一句话吗？

例如，有一本科学读物上有这么一段话："如果所有的小象都活下来，所有有翼的蒲公英种子都发芽的话，一对象在七百年期间，就可以象来充塞世界，而一株蒲公英植株，在不到十年之内，就可以蒲公英充塞世界。"❷

看了这一段叙述，你相信吗？

也许你会想，这怎么可能呢？自从有史以来，地球何止

❶ 本世纪初，外国测得珠穆朗玛峰的海拔高程是8882米。我国测得的珠穆朗玛峰更精确的海拔高程是8848.13米。

❷ 萨方诺夫著、陈芝孙译：《大地花开》，新亚书店出版，第315页。

过了七百年，况且象这种动物在史前就已经存在了，可是我们一直没有看见过“以象充塞世界”的情景呀！有不少人还没有见过象哩（他们只是从图片、幻灯、电影或者电视上欣赏到这种陆地上最巨大的动物）！这么说来，上面这段话就与实际情况不符合了。那么，这段话是不是写错了呢？

事实上，这段话是正确的。下面我们就来认真地作一番计算，来验证这段话是正确的。

如果所有小象都能活下去的话，那么，一对小象在七百年期间，能繁殖多少对象呢？若回答这个问题，要考虑的因素是很多的，例如，象的寿命（从动物学的资料可以查得，象的平均寿命约七十七岁）；一对初生的小象经过多少年后才开始“生男育女”；在这七百年期间，象有生有死；等等。这该怎么去计算呢？

为了计算方便起见，我们不妨假定一对初生的小象在十五年后开始“生男育女”，繁殖后代，并且这些初生的小象都能成活，这样，象的数目每年都要增加。假如平均每年比上一年增加4％，那么，一对初生的小象在七百年期间所繁殖的后代大致可以作如下的估计（请注意！下面的计算过程中会出现一些小数，例如1.04，而1.04对象是没有意义的，因为象的对数只能用自然数来表示，但在这里仅仅是为了估计象繁殖的对数而出现的数）：

第十六年有$1+1\times4\%=1.04$（对象）；

第十七年有$1.04+1.04\times4\%=1.04(1+4\%)$

$=1.04\times1.04$

$=1.04^2$（对象）；

第十八年有$1.04^2+1.04^2\times4\%=1.04^2(1+4\%)$

$=1.04^2\times1.04$

$=1.04^3$（对象）；

第十九年有$1.04^3+1.04^3\times4\%=1.04^3(1+4\%)$

$=1.04^3\times1.04$

$=1.04^4$（对象）；

第二十年有$1.04^4+1.04^4\times4\%=1.04^4(1+4\%)$

$=1.04^4\times1.04$

$=1.04^5$（对象）；

……

为了找出它的规律，我们将上述这些式子改写成：

第十六年有$1.04^{16-15}=1.04$（对象）；

第十七年有$1.04^{17-15}=1.04^2$（对象）；

第十八年有$1.04^{18-15}=1.04^3$（对象）；

第十九年有$1.04^{19-15}=1.04^4$（对象）；

第二十年有$1.04^{20-15}=1.04^5$（对象）；

……

因此

第七百年有$1.04^{700-15}=1.04^{685}$（对象）。

1.04^{685}等于多少呢？它等于685个1.04相乘的积，这种计算是很麻烦的。但是，当你学习了“对数”的知识之后，这是很容易计算的，它约等于465,400,000,000。

我们知道，地球表面上所有陆地的面积共有149,000,000平方公里，而

$$\frac{465,400,000,000}{149,000,000}\approx3124。$$

这就表明，地球表面的所有陆地上，每平方公里大约有3,124对象，即6,248头象。这个密度是很大的，因为现在全世界的人口只有43亿，每平方公里还不到30人，按照上述的计算，

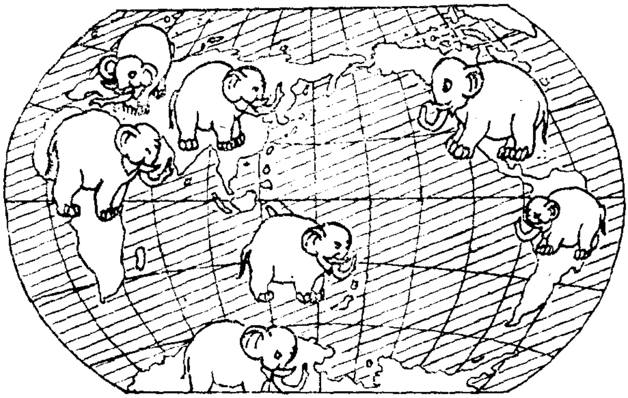

图 3

象的密度是人口密度的100多倍了。这不正是"以象充塞世界"的情景吗（图3）！

再来看一看，一株蒲公英在不到十年的时间里的繁殖情况吧！

一株蒲公英每年至少有100粒种子，如果这些种子都能够发芽成长的话，那么，一株蒲公英在不到十年的时间内，每年繁殖蒲公英的最少株数分别是：

第二年 100（株）

第三年$100\times100=100^2$（株）；

第四年$100^2\times100=100^3$（株）；

第五年$100^3\times100=100^4$（株）；

第六年$100^4\times100=100^5$（株）；

第七年$100^5\times100=100^6$（株）；

第八年$100^6\times100=100^7$（株）；

第九年$100^7\times100=100^8$（株）。

100^8等于多少呢？就是8个100相乘的积，它等于10,000,000,000,000,000（一亿亿）。将这个数除以地球表面上所

有陆地面积的平方米数，得

$$\frac{10,000,000,000,000,000}{149,000,000,000,000}\approx 67。$$

这就表明，地球表面的所有陆地上，每平方米至少有67株蒲公英。这个密度更是大得惊人了，简直是一片蒲公英的“海洋”！

但是，为什么我们一直没有看到过为人口密度100多倍的“以象充塞世界”的情景呢？为什么从来没有看到过“一片蒲公英的‘海洋’”呢？这是因为每一只小象、每一颗蒲公英种子、每一株蒲公英都不一定能够成活，牠（它）们是多灾多难的，牠（它）们会遇到“敌人”、会遭到捕杀、会生病，还有气候、环境、自然灾害等许多不适宜牠（它）们成活的因素存在。所以，有不少人还没有看见过象，大多数人也只是在动物园里看过象。至于蒲公英（图4），虽然它和杂草一样，野外长得很多，但是它没有象的“名气”大，所以恐怕你还不知道哩！

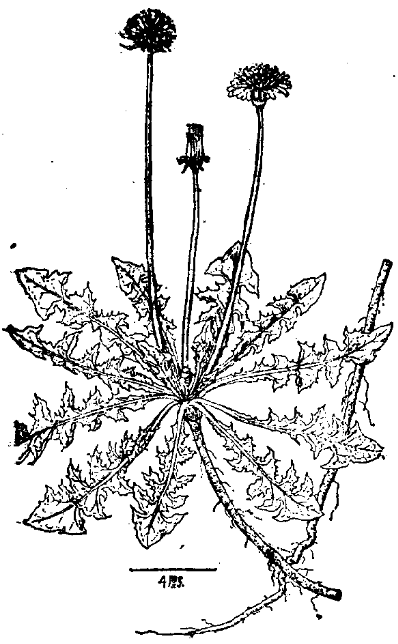

图 4

§1.4 象棋发明者的故事

这里所说的象棋是国际象棋。在我国，国际象棋不象中国象棋那样普遍流行，因此有些人可能还不了解。国际象棋和中国象棋的棋子个数是一样多的，双方各有十六枚，但这十六枚棋子的名称与中国象棋不同，它有一枚王、一枚王后、两枚仕、两枚车、两枚马和八枚卒。国际象棋的棋盘是正方形的，它有六十四个小方格，在这六十四个小方格上，还有一段有趣的故事哩！

据说，古代印度有一个国王叫舍罕，天性好玩，下象棋（即现代的国际象棋的前身）玩得高兴起来，就下令召见象棋的发明者——西萨。西萨是个宰相，也是一位数学修养很好的人。他来到国王面前，国王便对他说："你发明的象棋很好玩，我要大大地奖赏你，只要你说出能够使你满足的奖赏，你就能马上得到它。我的财富多得可以满足你最大胆的要求。"

西萨听了这位狂妄自大的国王的话之后，就想试一试国王的愚蠢程度。他说道："陛下！小臣没有什么了不起的要求，只是请陛下在棋盘的第一格上赐给1颗麦粒，在第二格上赐给2颗麦粒，在第三格上赐给4颗麦粒，在第四格上赐给8颗麦粒，在第五格上赐给16颗麦粒，在第六格上赐给32颗麦粒，……以后每一格上赐给的麦粒数，都比前一格多一倍。"

国王听了西萨的这些话，最初是惊奇！后来便觉得这位象棋发明者的微不足道的要求对他巨大的财富简直是轻视和侮辱，于是他马上打断了西萨的话，很不高兴地说："好了！好了！西萨！当初，我以为你会要什么金银财宝的，你的棋盘上总共不过是六十四个小小的方格，你的要求太微不足道

了。去吧！我的侍从马上就会把这一点点麦子送给你的。”

这天，国王几次催促宫廷里的侍从把西萨要求赏赐的麦粒数计算出来。但是旨意执行得异常缓慢，这使国王大为不快。第二天早上，宫廷里的侍从朝见了国王，他说“陛下！您的旨意是不可能奉行的，就是整个国家的仓库里也没有这么多麦粒。倘若陛下要实现您的诺言的话，那就请传旨把海填平、冰雪融化，让全世界都种上麦子，那也需要好几千年的时间才能付出这笔初看起来微不足道、但实际上是异常巨大的奖赏！”国王听了，惊得目瞪口呆（图 5 ）。

下面我们就来计算一下，西萨所要求赏赐的麦粒数到底大到怎样的程度。很明显，棋盘上各个小方格的麦粒数分别是：

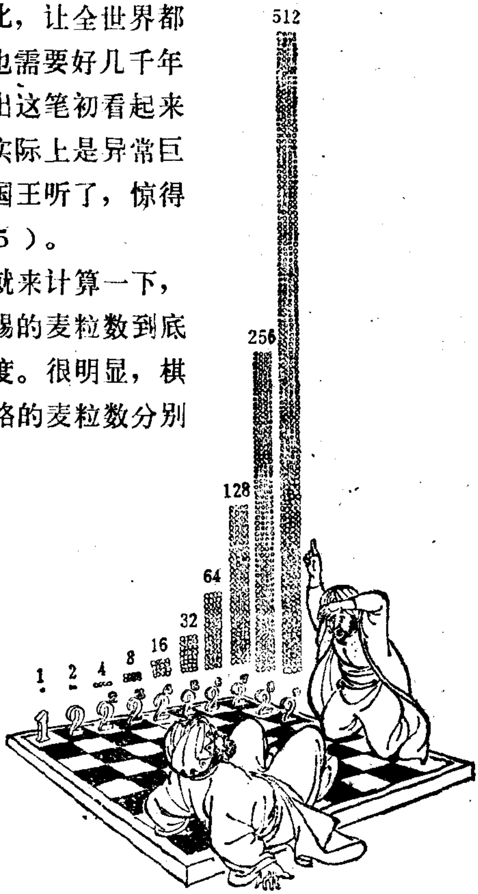

图 5