随机过程应用

APPLICATION OF STOCHASTIC PROCESSES

赵希人 著

Zhao Xiren

哈尔滨工程大学出版社

随机过程应用

APPLICATION OF STOCHASTIC PROCESSES

赵希人　著
Zhao Xiren

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

随机过程应用/赵希人著. —哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2003
ISBN 7-81073-463-6

Ⅰ.随… Ⅱ.赵… Ⅲ.随机过程-应用-高等学校-教材 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 034800 号

内 容 简 介

本书详细介绍随机过程理论在许多实际工程中应用的实例,包括物理过程的建模和预报,维纳(Wiener)滤波理论应用,卡尔曼(Kalman)滤波理论应用,线性多变量系统随机最优控制理论应用等。本书的特点是理论紧密联系实际,书中所介绍的方法都是针对实际问题研究出来的,并在实际应用中被证实行之有效,已取得明显的经济效益。

本书内容丰富,涉及到许多专业领域和工程实际,但本着论述严谨,重点突出的原则,书中详细介绍了解决实际工程问题的推理过程以及应用中的具体技巧,这对于从事理论教学的大学教师以及从事科研和技术开发的工程师,都具有启发参考作用。

本书可作为高等学校控制理论与控制工程、导航与制导、船舶运动与控制以及信息论与信号处理等专业研究生教学参考书,也可作为有关专业科技工作者的实用参考书。

责任编辑 张笑冰

*

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)2519328 邮编:150001
新华书店经销
黑龙江省教育委员会印刷厂印刷

*

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 14.75 字数 328 千字
2003 年 5 月第 1 版 2003 年 5 月第 1 次印刷
印数:1—1 000 册
定价:19.00 元

前　言

我写这本书的目的是想向读者介绍，在我39年从事科研工作和理论教学期间，将随机过程的理论和方法用于工程实际的体会和实例，包括随机过程建模和预报，维纳滤波理论应用，卡尔曼滤波理论应用，线性系统随机最优控制及其应用，书中涉及到的实际工程较多，内容较丰富。

本书的特点是理论紧密联系实际，书中所介绍的每个应用都是从实际工程中的问题出发，利用随机过程理论和方法进行有针对性的理论推导和数学演算，然后把所得到的结论再用于工程实际，并取得有效的应用效果。通过解决实际问题，更加深刻地领会随机过程的理论，使得理论进一步丰富和完善。为此，书中平行地介绍了许多应用实例，每章甚至每节都具有相当的独立性。读者阅读本书不仅应具备随机过程的基本理论知识，还应具备有关的专业知识。

本书共分五章，在第一章，不加证明地简要介绍随机过程的一些基本概念及处理随机过程的若干经典算法，为较顺利地阅读以后章节的内容作理论准备。在第二章，介绍随机过程在具体工程中的建模预报方法，包括原子钟时间数学模型及授时预报；丰满水库洪水过程模型及洪水预报；大型电网负荷过程模型及负荷预报；大型船舶姿态运动模型及姿态预报；平面波海浪模型及数学仿真。读者从中可以看到，针对不同的物理系统，系统模型和预报方法是不一样的，但有一点是相同的，就是都根据系统的历史数据进行分析建模。在第三章，介绍维纳(N. Wiener)滤波理论应用。维纳在信息论和控制论的创见，是国内外学术界所公认的。他首先提出了信息中的统计学方法并在平稳随机过程范畴内给出了完美的解答。维纳滤波方法虽具有局限性，但他为其后的学者提出了一个崭新的思路和信息处理方法，使得信息论和控制论向更高的层次发展。我在这章要介绍的是，如何应用维纳方法来解决无线电载频信号以最小方差为目标的最优跟踪，从而为数字锁相环的设计得到充分的理论依据并得到成功的应用。在第四章，介绍卡尔曼(R. E. Kalman)滤波理论应用。卡尔曼提出的"系统状态空间"、"系统能控性"和"系统能观性"等三个基本概念，奠定了现代控制理论基础，准确并深刻地揭示了控制系统的内部构造以及系统可控可观的固有能力，为控制理论的进一步发展提供了准确充分的理论依据。所谓卡尔曼滤波就是建立在这三个基本概念上的一种最优的系统状态估计方法。自卡尔曼滤波方法发表以来，在许多领域都得到了成功的应用。我在这章所介绍的内容是，卡尔曼滤波在应用中的"鲁棒性"问题，进一步介绍卡尔曼滤波在船舶航

迹最优估计、船用惯性导航系统、组合导航系统中的应用方法。在第五章,介绍船舶运动随机最优控制。船舶运动的航迹控制与减摇控制始终是船舶有效航行中的重要问题之一。目前存在的方法很多,但我所介绍的是如何利用随机过程理论,采用分离原理来实现船舶航迹和姿态减摇的最优控制。

书中所介绍的所有方法,都经过了实践的检验,被证明是行之有效的,绝大部分连同工程一起已通过了专家鉴定,并取得了相应的成果奖,在运行使用中已取得明显的经济效益和社会效益。

在我39年从事科研教学工作中,积累了大量的素材。我很想利用这些素材写出一本有些特色的书,但当我写完之后,深感没能很好的实现这个愿望。一方面由于篇幅所限,许多内容没能写进来,例如系统硬件结构和软件设计,更主要的是由于自己能力和水平所限,许多内容介绍的不够深透,还可能存在一些不当之处。书中所介绍的方法,只是我从随机过程理论的角度,进行工程应用的一些体会。随着科学技术的发展和人们不断地深入研究,肯定还会有其他的方法。因此,希望读者给予批评和指教。

我以此书首先感谢我的两位老师——张钟俊先生和雷渊超先生,是两位老师把我领进这个既艰深又有兴趣的领域。

感谢我多年从教的哈尔滨工程大学,学校为我的科研和教学提供了宽松的环境并给予我很大的支持。

还要感谢我曾经指导的近50名硕士和博士研究生,因为有些工作是在他(她)们的协助下完成的。

最后,还应该感谢我曾经工作过的以及和我有过合作的单位,感谢对我有过帮助和支持的所有的同志和朋友。

赵希人

2003年4月于哈尔滨

目　　录

第1章　随机过程概念及经典算法

第2章 随机过程建模预报及其应用

第 5 章 船舶运动随机最优控制

第1章　随机过程概念及经典算法

本书的目的是较详细地介绍随机过程理论在一些工程领域中的应用，为使读者较顺利地阅读后面章节中的内容，我们在本章，将不加证明地简要介绍随机过程的基本概念和随机过程处理的一些经典算法。其中包括随机过程的定义及基本分类，平稳随机过程及其若干性质，线性系统在随机过程作用下的统计计算，马尔可夫过程及其若干性质，时间序列分析及建模方法，最后，简要介绍如何处理具有随机干扰的随机信号。我们将重点介绍维纳(Wiener)滤波和卡尔曼(Kalman)滤波。

1.1　随机过程定义及基本类型

1.1.1　随机过程定义及概率描述

定义 1.1.1　随机过程是以时间 t 和基本随机事件 ω 为参变量的二元函数 $X(t,\omega)$ 的集合，并表示为

$$\{X(t,\omega),t\in T,\omega\in\Omega\} \tag{1.1.1}$$

其中 Ω 是全体基本随机事件 ω 的集合，称之为随机实验的样本空间，T 是时间 t 的集合，T 可以是离散时间集合，即 $T=\{t_k,k=1,2,\cdots\}$ 或 $T=\{k,k=\cdots-1,0,1,\cdots\}$，也可以是连续时间的集合，即 $T=\{t,-\infty<t<+\infty\}$。

对于随机过程定义(1.1.1)式，包含以下含义：

首先，随机过程 $\{X(t,\omega),t\in T,\omega\in\Omega\}$ 是个集合，而不是普通意义下的单一过程函数。其次，我们还可从二元参变量 ω,t 变化角度考察随机过程 $\{X(t,\omega),t\in T,\omega\in\Omega\}$，如果 ω 固定而 t 是变量时，随机过程 $\{X(t,\omega),t\in T,\omega\in\Omega\}$ 只表示一个样本函数，如果 t 固定而 ω 是变量时，随机过程 $\{X(t,\omega),t\in T,\omega\in\Omega\}$ 只表示一个随机变量，如果 t 和 ω 都是变量时，随机过程 $\{X(t,\omega),t\in T,\omega\in\Omega\}$ 既可表示为以 t 为参变量的一族随机变量的集合，也可表示为以 ω 为参变量的一族样本函数的集合，如果 t 和 ω 都固定时，随机过程 $\{X(t,\omega),t\in T,\omega\in\Omega\}$ 只表示某一个样本函数在某一 t 下的确定的数值。

为简单起见，通常将随机过程(1.1.1)式简记为

$$\{X(t),t\in T\} \tag{1.1.2}$$

随机过程概率描述

从严格意义讲，为了描述一个随机过程必须要知道它的**有限维分布函数族**，即对任意正整数 $n\geqslant 1$，任意 $t_i\in T,i=1,2,\cdots,n$ 及任意实数 $x_i,i=1,2,\cdots,n$，分布函数族

$$\{F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n),t_i\in T,i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 1\} \tag{1.1.3}$$

为已知。等价地，或必须要知道它的**有限维特征函数族**

$$\{\Phi(t_1,t_2,\cdots,t_n;s_1,s_2,\cdots,s_n),t_i\in T,i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 1\} \tag{1.1.4}$$

其中

$$\Phi(t_1,t_2,\cdots,t_n;s_1,s_2,\cdots,s_n) = E\left[\exp\left(\mathrm{j}\sum_{i=1}^{n}X(t_i)s_i\right)\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\mathrm{j}\sum_{i=1}^{n}x_is_i\right)\mathrm{d}F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1.1.5}$$

为 n 维随机变量 $\{X(t_i),i=1,2,\cdots,n\}$ 的特征函数。

如果 n 维密度函数 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1.1.6}$$

存在，也可等价地用**有限维密度函数族**：

$$\{f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n),t_i\in T,i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 1\} \tag{1.1.7}$$

来描述随机过程。

1.1.2 随机过程示性函数

在概率论中，均值、方差和相关系数是随机变量重要的数字特征，也称之为随机变量的示性数。对于随机过程，仍存在数字特征，只不过随机过程的数字特征是时间 t 的函数而已，通常称之为均值函数、方差函数和相关函数，有时称之为随机过程的示性函数。

定义 1.1.2 设 $\{X(t),t\in T\}$ 为随机过程，称

$$m(t) \triangleq E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}F(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty}xf(t,x)\mathrm{d}x \tag{1.1.8}$$

为该随机过程的**均值函数**，其中 $F(t,x)$ 和 $f(t,x)$ 为该随机过程的一维分布函数和一维密度函数。

定义 1.1.3 设 $\{X(t),t\in T\}$ 为随机过程，称

$$D(t) \triangleq E\{[X(t)-m(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty}[x-m(t)]^2\mathrm{d}F(t,x)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}[x-m(t)]^2f(t,x)\mathrm{d}x \tag{1.1.9}$$

为该随机过程的**方差函数**。

定义 1.1.4 设 $\{X(t),t\in T\}$ 为随机过程，称

$$\Gamma(t_1,t_2) \triangleq E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2\mathrm{d}^2F(t_1,t_2;x_1,x_2)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2f(t_1,t_2;x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{1.1.10}$$

为该随机过程的**原点自相关函数**或简称为**自相关函数**。称

$$B(t_1,t_2) \triangleq E\{[X(t_1)-m(t_1)][X(t_2)-m(t_2)]\} \tag{1.1.11}$$

为该随机过程的**中心自相关函数**。称

$$\Gamma_{xy}(t_1,t_2) \triangleq E[X(t_1)Y(t_2)] \tag{1.1.12}$$

和

$$B_{xy}(t_1,t_2) \triangleq E\{[X(t_1)-m_x(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]\} \tag{1.1.13}$$

为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 与随机过程 $\{Y(t),t\in T\}$ 的**原点互相关函数**和**中心互相关函数**。由以上定义，显然有

$$B(t_1,t_2)=\Gamma(t_1,t_2)-m(t_1)m(t_2) \tag{1.1.14}$$

$$D(t)=B(t,t)=\Gamma(t,t)-m^2(t) \tag{1.1.15}$$

相关函数性质　设 $\Gamma(t_1,t_2)$ 是随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的自相关函数,则

(1) $\Gamma(t,t)\geqslant 0$　(1.1.16)

(2) $\Gamma(t_1,t_2)=\Gamma(t_2,t_1)$　(1.1.17)

(3) $\Gamma(t_1,t_2)$ 是非负定的,即对任意有限个 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$ 和任意普通函数 $\theta(t)$, $t\in T$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma(t_k,t_j)\theta(t_k)\theta(t_j)\geqslant 0 \tag{1.1.18}$$

(4) $\Gamma^2(t_1,t_2)\leqslant\Gamma(t_1,t_1)\Gamma(t_2,t_2)$　(1.1.19)

在随机过程理论及计算中,经常用到极限概念,这里,我们只介绍**均方收敛**的极限概念。

1.1.3　随机过程均方极限及性质

定义 1.1.5　设 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 为随机变量序列, X 为随机变量,如果

$$\lim_{n\to\infty}E(X_n-X)^2=0 \tag{1.1.20}$$

则称随机变量序列 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ **均方收敛**于 X,或称 X 为 X_n 的均方极限,记

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}X_n=X \tag{1.1.21}$$

下面两个定理给出了判别随机变量序列均方收敛的方法。

定理 1.1.1(均方收敛准则 1)　设 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 为随机变量序列, X 为随机变量,则 X_n 均方收敛于 X 的充要条件是

$$\lim_{n,m\to\infty}E(X_n-X_m)^2=0 \tag{1.1.22}$$

有时称满足(1.1.22)式的随机序列为均方收敛的柯西(Cauchy)序列。

定理 1.1.2(均方收敛准则 2)　设 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 为随机变量序列, X 为随机变量,则 X_n 均方收敛于 X 的充要条件是

$$\lim_{m,n\to\infty}E\{X_mX_n\}=E\{X^2\}=C \tag{1.1.23}$$

其中 C 为常数。

均方极限有如下性质:

性质 1　设 X 和 Y 分别为随机变量序列 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 和 $\{Y_n,n=1,2,\cdots\}$ 的均方极限,则

$$\lim_{n\to\infty}E(X_n)=E(\underset{n\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}X_n)\triangleq E(X) \tag{1.1.24}$$

$$\lim_{n\to\infty}E(X_n)^2=E(\underset{n\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}X_n)^2\triangleq E(X^2) \tag{1.1.25}$$

$$\lim_{m,n\to\infty}E(X_mY_n)=E(\underset{m\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}X_m\cdot\underset{n\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}Y_n)\triangleq E(XY) \tag{1.1.26}$$

上述性质告诉我们,在均方收敛的条件下,均值运算和极限运算可以交换次序。

性质 2　均方极限的唯一性,设 X,Y 均为随机变量序列 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 的均方极限,则

$$X=Y \tag{1.1.27}$$

性质 3　均方极限的线性性,即设 X,Y 分别为随机变量序列 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 和 $\{Y_n,n=1,2,\cdots\}$ 的均方极限,则对任意常数 a,b,有

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}(aX_n + bY_n) = aX + bY \tag{1.1.28}$$

性质 4 随机变量函数序列的均方极限,设 X 为随机变量序列$\{X_n, n = 1,2,\cdots\}$的均方极限,$f(u)$为普通函数且满足李甫西兹(lipschitz)条件,即存在常数 M 使得

$$|f(u) - f(v)| \leqslant M|u - v| \tag{1.1.29}$$

则

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}} f(X_n) = f(X) \tag{1.1.30}$$

1.1.4 随机过程基本类型

正态随机过程

定义 1.1.6 称$\{X(t), t\in T\}$为**正态随机过程**或简称为**正态过程**,如果对任意正整数 n 及任意 $t_i \in T, i = 1,2,\cdots,n$,随机向量

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = [X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)]$$

具有正态分布,即有如下概率密度函数

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\boldsymbol{B}|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})\right\} \tag{1.1.31}$$

其中

$$\boldsymbol{m} = E[\boldsymbol{X}] = \begin{bmatrix} EX(t_1) \\ EX(t_2) \\ \vdots \\ EX(t_n) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}$$

为均值向量,而

$$\boldsymbol{B} = E(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m})^{\mathrm{T}} \triangleq \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$b_{ij} = E\{[X(t_i) - m_i][X(t_j) - m_j]\}, i,j = 1,2,\cdots,n$,并假定相关函数阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定。

平稳随机过程

定义 1.1.7 称$\{X(t), t\in T\}$为**平稳随机过程**,或简称为**平稳过程**,如果对任意 $t_1 \in T, t_2 \in T, \tau \in T$,其分布函数 $F(\cdot)$ 满足

$$F(t_1; x_1) = F(t_1 + \tau; x_1) \tag{1.1.32}$$

和

$$F(t_1, t_2; x_1, x_2) = F(t_1 + \tau, t_2 + \tau; x_1, x_2) \tag{1.1.33}$$

平稳过程有如下性质:

定理 1.1.3 设$\{X(t), t\in T\}$为平稳过程,则对任意 $t_1 \in T, t_2 \in T, t \in T$,有

$$EX(t) \triangleq m(t) = m \tag{1.1.34}$$

$$\Gamma(t_1, t_2) = \Gamma(t_1 - t_2) \tag{1.1.35}$$

其中 m 为常数。

上述定理说明,平稳过程的均值函数是一个常数,平稳过程的自相关函数只与时间差有

关，而与时间 t_1, t_2 的位置无关。平稳过程是工程中很重要的一类随机过程，后面我们还要详细讨论平稳过程性质及若干计算方法。

不相关增量过程

定义 1.1.8　称 $\{X(t), t \in T\}$ 为**不相关增量过程**，如果对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T$，增量序列

$$\{X(t_{i+1}) - X(t_i), i = 1,2,\cdots,n-1\}$$

是不相关的随机变量序列。对于不相关增量过程，显然有

$$E[X(t_{i+1}) - X(t_i)][X(t_{j+1}) - X(t_j)] = E[X(t_{i+1}) - X(t_i)]E[X(t_{j+1}) - X(t_j)] \tag{1.1.36}$$

$$i,j = 1,2,\cdots,n-1, i \neq j$$

独立增量过程

定义 1.1.9　称 $\{X(t), t \in T\}$ 为**独立增量过程**，如果对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T$，增量序列

$$\{X(t_{i+1}) - X(t_i), i = 1,2,\cdots,n-1\}$$

是相互独立的随机变量序列。进一步，若增量 $X(t_{i+1}) - X(t_i)$ 的概率分布函数只与 $t_{i+1} - t_i$ 有关，而与 t_{i+1}, t_i 无关，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为齐次独立增量过程。显然，独立增量过程一定是不相关增量过程，反之不真。但对于正态过程，两者是等价的。

正交增量过程

定义 1.1.10　称 $\{X(t), t \in T\}$ 为**正交增量过程**，如果对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T$，增量序列

$$\{X(t_{i+1}) - X(t_i), i = 1,2,\cdots,n-1\}$$

是正交序列，即有

$$E[X(t_{i+1}) - X(t_i)][X(t_{j+1}) - X(t_j)] = 0 \tag{1.1.37}$$

$$i,j = 1,2,\cdots,n-1, i \neq j$$

正交增量过程的相关函数为

$$\Gamma(t_1, t_2) = \begin{cases} \Gamma(t_1, t_1), t_1 \leqslant t_2 \\ \Gamma(t_2, t_2), t_2 \leqslant t_1 \end{cases} \tag{1.1.38}$$

如果独立增量过程 $\{X(t), t \in T\}$ 或不相关增量过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的均值函数为常数，即 $EX(t) = C$，则该过程必是正交增量过程。

马尔可夫过程

定义 1.1.11　称 $\{X(t), t \in T\}$ 为**马尔可夫过程**，如果对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t \in T$ 及任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x$，其中 n 为任意正整数，有

$$\begin{aligned} & P\{X(t) < x / X(t_1) = x_1, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, X(t_n) = x_n\} \\ & = P\{X(t) < x / X(t_n) = x_n\} \end{aligned} \tag{1.1.39}$$

式(1.1.39)表明，在 $X(t_i) = x_i, i = 1,2,\cdots,n$ 为已知的条件下，事件 $(X(t) < x)$ 发生的概率只与最近时刻 t_n 的情形有关，而与 $t_{n-1}, t_{n-2}, \cdots, t_1$ 时刻的情形无关，把这种性质称为"无后效性"。

如果把 t_n 理解为"现在"，那么 $t > t_n$ 就是"未来"，而 $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1}$ 就是"过去"，

马尔夫过程的“无后效性”告诉我们,过程$\{X(t),t\in T\}$在“将来”的情形只与“现在”有关而与“过去”无关。

为了描述马尔可夫过程,有如下定理:

定理 1.1.4 设$\{X(t),t\in T\}$为马尔可夫过程,则对任意正整数 n 及任意$t_1<t_2<\cdots<t_n\in T$,其有限维密度函数$f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$可由二维密度函数$f(s,\tau;\xi,\zeta)$决定,其中$s<\tau\in T,\xi,\zeta$为任意实数。

不难证明,独立增量过程是马尔可夫过程。

正如平稳过程一样,马尔可夫过程是工程中另一类重要的随机过程,以后我们还将详细讨论马尔可夫过程。

维纳(Wiener)过程

定义 1.1.12 称$\{X(t),t\in T\}$为**维纳过程**,如果

(1)$\{X(t),t\in T\}$是独立增量过程,

(2)$X(0)=0$,

(3) 对任意$s<t\in T$,增量$X(t)-X(s)$服从正态$N(0,\sigma^2(t-s))$分布,其中$\sigma^2>0$为常数。

维纳过程的均值函数为$EX(t)=m(t)=0$,相关函数为

$$\Gamma(t_1,t_2)=\sigma^2\min(t_1,t_2) \tag{1.1.40}$$

普松(Poisson)过程

定义 1.1.13 称$\{X(t),t\in T\}$为**普松过程**,如果

(1)$\{X(t),t\in T\}$是独立增量过程,

(2)$X(0)=0$,

(3) 对任意$s<t\in T$,增量$X(t)-X(s)$服从普松分布,即

$$P\{X(t)-X(s)=k\}=\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} \tag{1.1.41}$$

$k=0,1,2,\cdots$

其中$\lambda>0$为常数。

不难求出普松过程对任意$t、s,t>s$,其增量的均值和方差为

$$E[X(t)-X(s)]=\lambda(t-s) \tag{1.1.42}$$

$$D[X(t)-X(s)]=\lambda(t-s) \tag{1.1.43}$$

普松过程的均值函数$m(t)$和中心相关函数$B(t_1,t_2)$为

$$m(t)=\lambda t \tag{1.1.44}$$

$$B(t_1,t_2)=\lambda\min(t_1,t_2) \tag{1.1.45}$$

1.2 平稳过程

平稳过程是工程中经常遇到的一类重要的随机过程,在本节,我们较详细地介绍平稳过程。

1.2.1 平稳过程定义

关于平稳过程定义,在上一节定义 1.1.7 中已经给出了严格的定义,但是,我们也可以

按定理 1.1.3 的内容给平稳过程再作一个等价的定义。

定义 1.2.1　称 $\{X(t), t \in T\}$ 为平稳过程，如果对任意 $t_1 \in T, t_1 + \tau \in T, t \in T$，有

$$m(t) \triangleq EX(t) = m \tag{1.2.1}$$

$$\Gamma(t_1 + \tau, t_1) = EX(t_1 + \tau)X(t_1) = \Gamma(\tau) \tag{1.2.2}$$

其中 m 为常数。通常，如果时间集合 T 是离散的，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为平稳序列，如果时间集合 T 是连续的，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为平稳过程。

白噪声序列

如果 $\{X(k), k = \cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$ 是互不相关的随机变量序列且 $EX(k) = 0, DX(k) = \sigma^2$，则称该序列为**白噪声序列**。对于白噪声序列显然有

$$E[X(k)X(l)] = \sigma^2 \delta(k - l) \tag{1.2.3}$$

其中称 $\delta(\cdot)$ 为克罗尼克—δ 函数(Ckronecker—δ)，其定义为

$$\delta(i) = \begin{cases} 1, i = 0 \\ 0, i \neq 0 \end{cases} \tag{1.2.4}$$

白噪声过程

称 $\{X(t), t \in T\}$ 为**白噪声过程**，如果对任意 $t_1 \in T, t_2 \in T, t \in T$，有

(1) $EX(t) = 0$

(2) $\Gamma(t_1, t_2) \triangleq EX(t_1)X(t_2) = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2)$　　(1.2.5)

其中 $\sigma^2 > 0$ 为常数，通常称 σ^2 为白噪声功率谱密度，$\delta(\cdot)$ 为狄拉克—δ 函数(Dirac—δ)其定义为

$$\left.\begin{array}{l} \delta(\tau) = \begin{cases} \infty, \tau = 0 \\ 0, \tau \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \mathrm{d}\tau = 1 \end{array}\right\} \tag{1.2.6}$$

可以看出，白噪声序列和白噪声过程都满足平稳过程定义，因此，二者都是平稳过程，只是白噪声过程不存在二阶矩。

白噪声序列通过线性定常离散系统

系统如图 1.2.1 所示，其中系统输入 $\{X(n), n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$ 为白噪声序列，$W(z)$ 为线性定常系统传递函数，且假定是稳定的。称 $k(i)$ 为系统单位脉冲响应函数，且有

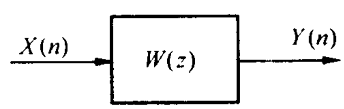

图 1.2.1　白噪声序列作用于线性定常离散系统方块图

$$k(i) = \mathscr{Z}^{-1}\{W(z)\} \tag{1.2.7}$$

其中符号 $\mathscr{Z}^{-1}\{\cdot\}$ 表示求 Z 反变换。经计算，系统输出序列 $\{Y(n), n = \cdots, 1, 0, 1, \cdots\}$ 具有如下特点：

$$EY(n) = 0 \tag{1.2.8}$$

和

$$E[Y(l)Y(m)] = \sigma^2 \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} k(i)k(i + m - l)\right] \triangleq B_Y(m - l) \tag{1.2.9}$$

而且

$$B_Y(m - l) = B_Y(l - m) \tag{1.2.10}$$

由(1.2.8)式及(1.2.9)式可知,系统输出序列$\{Y(n),n=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$是平稳序列。

白噪声过程通过线性定常连续系统

系统如图1.2.2所示,其中系统输入$\{X(t),t\in T\}$为白噪声过程,$W(s)$为线性定常连续系统传递函数,且假定是稳定的。

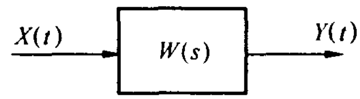

图1.2.2 白噪声过程作用于线性定常连续系统方块图

由控制理论可知,该系统的单位脉冲响应函数$k(t)$为

$$k(t)=\mathscr{L}^{1}\{W(s)\} \tag{1.2.11}$$

其中符号$\mathscr{L}^{1}\{\cdot\}$表示求拉氏反变换。

经计算,系统输出过程$\{Y(t),t\in T\}$具有如下特性:

$$EY(t)=0 \tag{1.2.12}$$

及

$$EY(t_1)Y(t_2)=\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}k(\tau)k(\tau+t_1-t_2)\mathrm{d}\tau \triangleq B_Y(t_1-t_2) \tag{1.2.13}$$

其中$\sigma^2>0$为系统输入白噪声过程的功率谱密度。并且还有

$$B_Y(t_1-t_2)=B_Y(t_2-t_1) \tag{1.2.14}$$

由(1.2.12)式及(1.2.13)式可知,系统输出过程$\{Y(T),t\in T\}$是平稳过程。

1.2.2 平稳过程性质

性质1 设$\Gamma(\tau)$是平稳过程$\{X(t),t\in T\}$的原点自相关函数,则

$$\infty>\Gamma(0)\geqslant 0 \tag{1.2.15}$$

$$\Gamma(\tau)=\Gamma(-\tau) \tag{1.2.16}$$

$$|\Gamma(\tau)|\leqslant\Gamma(0) \tag{1.2.17}$$

上述性质对平稳过程中心自相关函数$B(\tau)$也成立。

性质2 设$\Gamma(\tau)$是平稳过程$\{X(t),t\in T\}$原点自相关函数,则对T中任意$t_1,t_2,\cdots,t_n$及任意实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$,有

$$\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma(t_i-t_j)a_ia_j\geqslant 0 \tag{1.2.18}$$

上述性质对中心相关函数$B(\tau)$也成立。

性质3 平稳过程$\{X(t),t\in T\}$在T上均方连续的充要条件是其相关函数$\Gamma(\tau)$在$\tau=0$处连续。此时$\Gamma(\tau)$处处连续。

性质4 平稳过程$\{X(t),t\in T\}$在T上均方可微的充要条件是其相关函数$\Gamma(\tau)$在$\tau=0$处二次可微。

性质5 平稳过程的导数过程$\{X'(t),t\in T\}$仍是平稳过程,且

$$E[X'(t)]=0 \tag{1.2.19}$$

$$E[X'(t_1+\tau)X'(t_1)]\triangleq\Gamma^{(1)}(\tau)=-\Gamma''(\tau) \tag{1.2.20}$$

性质6 设$\{X(t),t\in T\}$为平稳过程,$f(u)$为普通分段连续函数,且满足$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|\mathrm{d}u<\infty$,则

(1)$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)X(t-u)\mathrm{d}u$均方收敛,