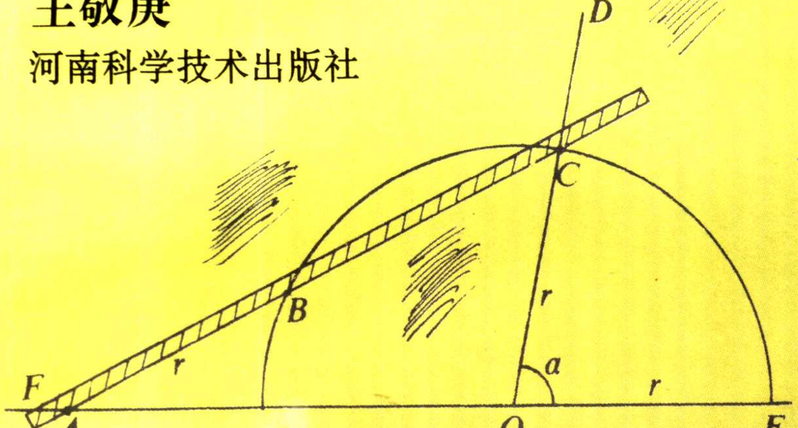
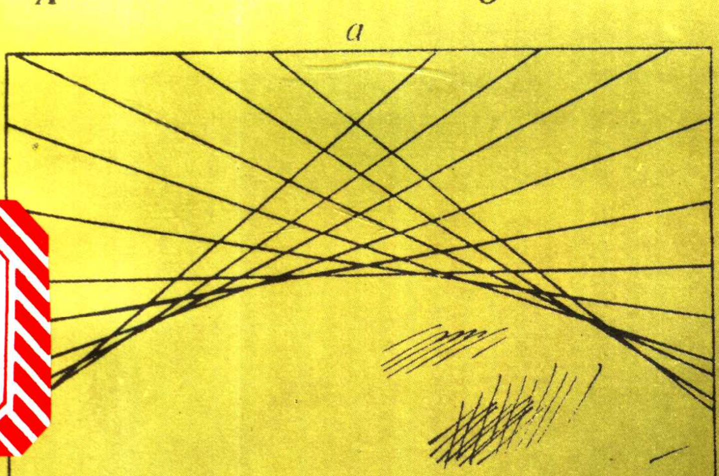
解析几何方法漫谈

让你开窍的数学

王敬庚

河南科学技术出版社





让你开窍的数学

解析几何方法漫谈

王敬庚

河南科学技术出版社

内 容 提 要

本书是一本关于解析几何的课外读物，共分四章：第1章是三则趣味问题：魔术师的地毯，藏宝地在哪里？用纸折椭圆、双曲线和抛物线．第2章简要叙述笛卡儿创立解析几何的情形，解析几何方法与综合几何方法的比较，以及三等分角等古希腊三大几何问题不能用尺规作图的解析几何证明．第3章介绍解析几何的若干解题技巧，包括轮换、巧用定比分点、斜坐标系的应用和复数方法，以及用解析几何方法巧解代数题等．第4章是通过类比联想对几个解析几何题进行引伸而构造新题的例子．

本书可供中学生及广大数学爱好者阅读，也可供中学数学教师教学参考．

让你开窍的数学

解析几何方法漫谈

王敬庚

责任编辑　袁　元

河南科学技术出版社出版

（郑州市农业路73号）

河南第一新华印刷厂印刷

全 国 新 华 书 店 发 行

787×1092毫米　32开本　8.25印张　165千字

1997年1月第1版　　1998年4月第2次印刷

印数：4 001—7 000册

ISBN 7-5349-1889-8/G·490

定　价：9.00元

序

如果我们打开科学史，研究一些卓越人物成功的经验，就会发现一个重要的事实：他们所研究的正是他们从小就喜欢的.少年时代的达尔文数学成绩不佳，但热爱生物，结果他成为最伟大的生物学家.反之，如果强迫他研究数学，他未必能如此成功.由此可见，兴趣与工作一致，二者形成良性循环，是成功的重要因素.然而兴趣又是怎样形成的呢?这固然与天赋有关，但后天的启发和培养更为重要.数学教师的职责之一就在于培养学生对数学的兴趣，这等于给了他们长久钻研数学的动力.优秀的数学教师之所以在学生心中永志不忘，就是由于他点燃了学生心灵中热爱数学的熊熊火焰.

讲一些名人轶事有助于启发兴趣，但这远远不够.如果在传授知识的同时，分析重要的数学思想，阐明发展概况，指出各种应用，使学生

不仅知其然，而且知其所以然，不仅看到定理的结论，而且了解它的演变过程，不仅看到逻辑之美，而且欣赏到形象之美、直观之美，这才是难能可贵的. 在许多情况下，直观走在逻辑思维的前面，起了领路作用. 直觉思维大都是顿悟的，很难把握，却极富兴趣，正是精华所在. M. 克莱因写了一部大书《古今数学思想》，对数学发展的主导思想有精彩的论述，可惜篇幅太大，内容过深，不易为中学生所接受.

真正要对数学入迷，必须深入数学本身：不仅是学者，而且是作者；不仅是观众，而且是演员. 他必须克服一个又一个的困难，不断地有新的发现、新的创造. 其入也愈深，所见也愈奇，观前人所未观，发前人所未发，这才算是进入了登堂入室、四顾无峰的高级境界. 为此，他应具备很强的研究能力；而这种能力，必须从中学时代起便开始锻炼，经过长期积累，方可成为巨匠.

于是我们看到“兴趣”、“思维”和“能力”三者在数学教学中的重要作用. 近年来我国出版了多种数学课外读物，包括与中学教材配套的同步辅导读物和题解. 这套《让你开窍的数学》丛书与众有所不同，其宗旨是“引起兴趣、启发思维、训练能力”，风格近似于美国数学教育家 G. Polya(波利亚)的三部名著《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》，但更切合我国的实际. 本丛书共 8 本，可从书名看到它们涉及的范围甚为宽广. 作者都有丰富的教学经验和相当高的学术水平，而且大都出版过多种数学著作. 因此，他们必能得心应手，写得趣味盎然，富于启发性. 这套丛书的主要对象是中学、中专的教师

和同学，我们希望它能收到宗旨中确定的效果，为中学数学教学做出较大贡献.

王梓坤

1996.7.

前言

数学是教人聪明的学问.按照美国著名数学教育家波利亚的说法,中学数学教育的目标是“教会年轻人思考”.基于这一认识,在这本解析几何的课外读物中,我的目的不在于介绍很多解析几何的知识,而在于引导读者学习思考数学问题的方法,因此始终把重点放在回答“解法是如何想到的”这一问题上.几乎对每一个数学问题,我都不厌其烦地尽可能详尽地加以分析.

本书由四个互相独立的部分组成,每一部分叫做一章.每一章又包含几个问题,每个问题叫做一节,各节也是互相独立的.因此本书的每一章每一节都可以单独阅读.

第1章给出能用解析几何方法来解的三个颇有趣味的问题.

第2章简要叙述哲学家笛卡儿是如何创立

解析几何的，把解析几何方法与平面几何方法进行比较，以加深读者对解析几何方法的认识．本章最后介绍了在历史上使很多人为之绞尽脑汁的古希腊的三大作图问题(三等分任意角、二倍立方和化圆为方)，并用解析几何方法证明，只用直尺和圆规是不可能作出它们的．

第 3 章是解析几何的若干解题技巧举例．培养和提高解题能力是数学教学的中心任务，启发学生自己发现解法，是解题教学中最困难也是最有趣的部分，我把它看做解题教学的最高境界，也是我写作本章乃至全书所追求的目标．本章最后一节，介绍用解析几何方法解某些代数问题，它是传统意义上的解析几何方法(借助于坐标系，把几何问题变成代数问题来解)的反用，即借助于坐标系，把代数问题变成几何问题来解．可见解析几何是一个双刃的工具，既可以解几何问题，也可以解某些代数问题．通过这个问题的讲解，可以开阔我们的解题思路．

最后一章是通过类比联想对几个解析几何题进行引伸的例子，是讲如何从原题构造出新题的．这方面的内容一般书上很少讲，至于让同学们自己构造新题的机会就更少了．构造新题要发挥创造性，先猜后证．这种训练对数学能力的培养是大有益处的，也是充满乐趣的．

除了叙述历史的第 2.1 节以外，其他每一节后都列有多少不等的习题，供读者练习之用．虽然书末附有解答，但建议读者不要轻易去看，只要把书中的内容弄清楚了，完成习题一般不会有很大困难．如果习题不会做，说明你对书上的内容还

没有真正弄清楚.这时最好先把书上的内容弄清楚.真正弄清楚的标志不是你能看懂书上的每一步推导,而是合上书你能自己把例题解出来.能达到这一要求,做习题就容易得多了.当你做出题以后再去看解答,也许你的解法比给出的解答还要好,也许不如给出的解答好,通过比较就会有收获.如果实在做不出,也可以看解答,不过看完后,仍要合上书自己独立去解,一次不行,可重复多次,直至自己独立解出为止.如能再总结一下:解这道题的关键何在?自己为什么没有能想出它来?怎样才能想出它来?这样我们就能真正学到一点东西.这样的学习将更有益也更有趣.

对于本书中的缺点、错误和不足之处,诚恳地欢迎读者朋友批评指正.

王敬庚

1994年12月3日于北京师范大学

目录

1

三则趣味题

1.1 魔术师的地毯

一天，著名魔术大师秋先生拿了一块长和宽都是 1.3 米的地毯去找地毯匠敬师傅，要求把这块正方形地毯改成 0.8 米宽 2.1 米长的矩形. 敬师傅对秋先生说："你这位大名鼎鼎的魔术师，难道连小学算术都没有学过吗？边长 1.3 米的正方形面积为 1.69 平方米，而宽 0.8 米长 2.1 米的矩形面积只有 1.68 平方米，两者并不相等啊！除非裁去 0.01 平方米，不然没法做." 秋先生拿出他事先画好的两张设计图，对敬师傅说："你先照这张图（图 1.2）的尺寸把地毯裁成四块，然后照另一张图（图 1.3）的样子把这四块拼在一起缝好就行了. 魔术大师是从来不

图 1.1

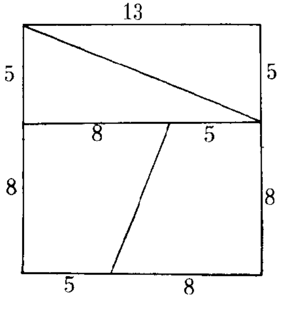


图 1.2

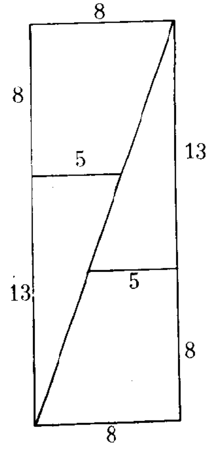


图 1.3

会错的，你放心做吧！”敬师傅照着做了，缝好一量，果真是宽0.8米长2.1米.魔术师拿着改好的地毯满意地走了，而敬师傅却还在纳闷儿：这是怎么回事呢？那0.01平方米的地毯到什么地方去了？你能帮敬师傅解开这个谜吗？

过了几个月，魔术师秋先生又拿来一块地毯，长和宽都是1.2米，只是上面烧了一个烧饼大小（约0.01平方米）的窟窿.秋先生要求敬师傅将地毯剪剪拼拼把窟窿去掉，但长和宽仍旧是1.2米.敬师傅很为难，觉得这位魔术大师的要求不合理，根本无法做到.秋先生又拿出了自己的设计图纸，要敬师傅按图1.4的尺寸将地毯剪开，再按图1.5的样子拼在一起缝好.敬师傅照着做了，结果真的得到了一块长和宽仍是1.2米的地毯，而原来的窟窿却消失了.魔术师拿着补好的地毯得意洋洋地走了，而敬师傅还在想，补那窟窿的0.01平方米的地毯是哪里来的呢？你能帮敬师傅解开这个谜吗？

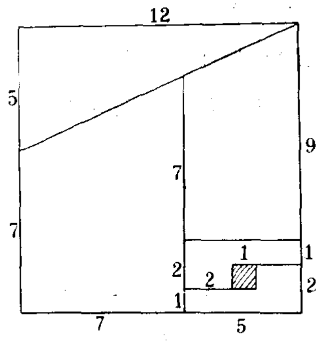


图1.4

你准备如何着手去揭开魔术大师的秘密呢？通常的办法是根据他给的尺寸按某个比例（例如10：1）缩小，自己动手剪一剪、拼一拼，也就是做一个小模型，实际量一量，看看秘密藏在什么地方.这种做模型（或做实验）的方法，是科技工作者和工程技术人员通常采用的方法.这种方法要求操作和测

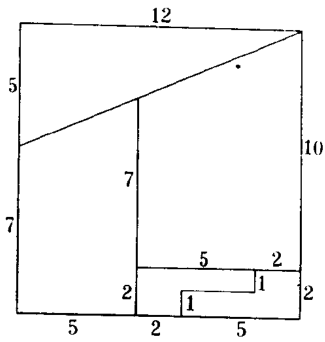


图 1.5

量都非常精确，否则你就发现不了秘密. 例如，按缩小后的尺寸，剪拼前后面积差应为 1 平方厘米，如果在你操作和测量过程中所产生的误差就已经大于 1 平方厘米了，那么你怎能发现那 1 平方厘米的面积差出在什么地方呢？

数学工作者在研究和解决问题时，通常采用另一种方法 —— 数学计算，即通过精细的数学计算来发现剪拼前后的面积差出在何处.

现在我们先来分析第一个魔术.

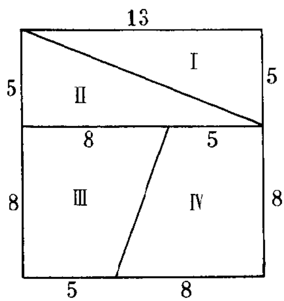


图 1.6

比较图 1.2 和图 1.3，将图 1.2 中的四块图形分别记为 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ(图 1.6)，而将图 1.3 中相应的四块分别记为 Ⅰ′，Ⅱ′，Ⅲ′，Ⅳ′(图 1.7). 现在的问题是，图 1.6 中的四块能否拼得像图 1.7 那样“严丝合缝”、“不重不漏”？也就是说，图 1.7 中所标的各个尺寸是否全都准确无误？例如图 1.7 中的 Ⅰ′ 为直角三角形 EDB，如果 $DE = 5$ 时，点 E 是否恰好落在矩形 $ABCO$ 的对角线 OB 上？同样，如果 FG

$=5$ 时，点 G 是否恰好落在 OB 上？让我们通过计算来回答这个问题.

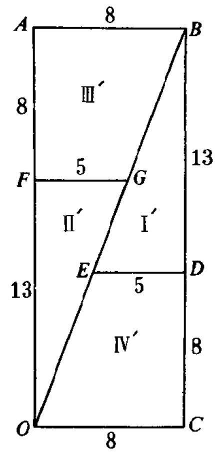


图 1.7

如图 1.8 建立直角坐标系，以 OC 所在直线为 x 轴，OA 所在直线为 y 轴，单位长度表示 0.1 米，于是有 $O(0,0)$，$A(0,21)$，$B(8,21)$，$C(8,0)$，$F(0,13)$，$G(5,13)$，$E(3,8)$，$D(8,8)$. 如何判断 E 和 G 是否恰好落在直线 OB 上呢？一种办法是将 E，G 的坐标代入直线 OB 的方程，看是否满足方程；另一种办法是分别计算 OE，OB，OG 的斜率，比较它们是否相等. 下面用后一种方法进行讨论.

设线段 OE 的斜率为 k_{OE}，则有 $k_{OE}=\dfrac{8}{3}$，$k_{OB}=\dfrac{21}{8}$，$k_{OG}=\dfrac{13}{5}$. 比较之，由 $\dfrac{8}{3}>\dfrac{21}{8}>\dfrac{13}{5}$ 得 $k_{OE}>k_{OB}>k_{OG}$，即 OE 的斜角大于 OB 的斜角，OB 的斜角又大于 OG 的斜角，可见 E 和 G 都不在对角线 OB 上，它们分别落在 OB 的两侧(图 1.8). 又由

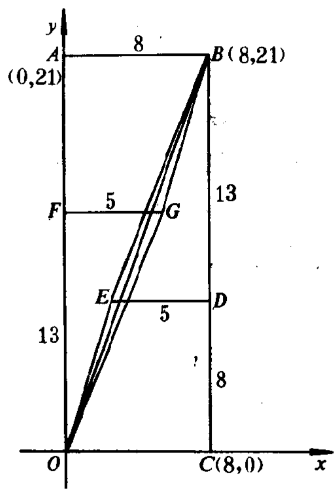


图 1.8

$$k_{EB}=\frac{21-8}{8-3}=\frac{13}{5},\quad k_{GB}=\frac{21-13}{8-5}=\frac{8}{3}$$

得 $k_{EB}=k_{OG}$，$k_{GB}=k_{OE}$，即 $EB\parallel OG$，$GB\parallel OE$. 可知将图1.6中的四块图形按照图 1.7 拼接时，在矩形对角线附近重叠了一个小平行四边形 $OGBE$（图 1.8）. 正是这一微小的重叠导致面积减少，减少的正是这个重叠的 $\square OGBE$ 的面积. 记 $E(3,8)$ 到对角线 $OB(y=\frac{21}{8}x)$ 的距离为 d，

$$d=\frac{|21\times 0.3+(-8)\times 0.8|}{\sqrt{21^2+(-8)^2}}=\frac{0.1}{\sqrt{505}}\text{米},$$

$$|OB|=\sqrt{(0.8)^2+(2.1)^2}=\sqrt{5.05}\text{米},$$

$$S_{\square OGBE}=2S_{\triangle EOB}=2\times\frac{1}{2}\times|OB|\times d=0.01\text{米}^2.$$

把面积仅为0.01平方米的地毯拉成对角线长为 $\sqrt{5.05}$ 米（约2.247 米）的极细长的平行四边形，在一个大矩形的对角线附近重叠了这么一点点，当然很难觉察出来. 魔术大师正是利用了这一点蒙混过去，然而这一障眼法却怎么也逃不过精细的数学计算这一"火眼金睛".

如果我们把上述分割正方形和构成矩形所涉及的四个数，从小到大排列起来，即

$$5,8,13,21,$$

这列数有什么规律呢？相邻两数之和，正好是紧跟着的第三个数. 按照这个规律，5 前面应该是$(8-5=)3$，3 前面应是$(5-3=)2$，2 前面应是$(3-2=)1$，1 前面应是$(2-1=)1$，21 后面应为$(13+21=)34$，34 后面应为$(21+34=)55$，等等，于是得到数列