新世纪高等学校教材名师导学与辅导丛书

概率论与数理统计

浙大三版

学习指导

高等数学教学与命题研究组 编
清华大学数学系 贾仲孝 主审

最新

中国林业出版社

新世纪高等学校教材名师导学与辅导丛书

概率论与数理统计学习指导

(浙大三版)

高等数学教学与命题研究组　　编
清华大学数学系　贾仲孝　主审

中国林业出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/高等数学教学与命题研究组编．-北京:中国林业出版社,2003.1

ISBN 7-5038-3317-3

Ⅰ.概…　Ⅱ.高…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料　②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第097901号

高等数学教学与命题研究组

主编: 刘巨鑫

编写: 刘巨鑫　张　静　马晓娟　阳碧云

主审: 贾仲孝

出版　中国林业出版社(100009　北京西城区刘海胡同7号)

E-mail　cfphz@public.bta.net.cn　　电话　66184477

发行　中国林业出版社

印刷　北京林业大学印刷厂

版次　2003年1月第1版

印次　2003年1月第1次

开本　850mm×1168mm　1/32

印张　13.5

字数　340千字

印数　1~5 000册

定价　15.00元

前言

概率论与数理统计是理工科院校(非数学专业)一门重要的理论基础课程。它不仅是学习后续课程及在各个学科领域中进行理论研究和实践工作的必要基础,对学习者其他能力的培养也有着重要的作用。如何更好地帮助学习者学好这门课程,加深学生对所学内容的理解和掌握,提高其综合运用知识解决实际问题的能力,以及如何更好地指导学生进行相应的备考,成为我国各类理工科院校共同关注的问题。

为了配合各院校概率统计的教学与学生的复习、备考,我们依托北京大学等高校强大的师资力量,根据高等院校理工科(非数学专业)概率论与数理统计教学大纲的基本要求及浙江大学主编的《概率论与数理统计》(第三版)的严谨结构组织编写了本书。全书由清华大学数学系贾仲孝教授主审。

本书的编写特点如下:

(1)本书结构与内容均依据浙大版教材编写,可作为高等院校本科、专科、专科升本科及其他各类在校学生学习概率论与数理统计的同步辅导用书和参加自学考试、考研前的复习指南,亦可作为在校教师教授《概率论与数理统计》这门课程的教学参考用书。

(2)本书以图表形式列出了每一章的学习要点、基本知识点及它们之间的相互关系,使读者一目了然,从而对每一部分的内容进行系统掌握。

(3)本书的每一章,不仅涵括了内容与考点、解题方法及例题解析,还特别为读者指出了学习的重点与难点,并对常考知识点进行了分析,能帮助学生举一反三地掌握这门课程。

(4)本书精心选择例题,按类编排,并对各种常考题型及解题思路、方法和技巧进行了详细分析、总结和归纳。同时,重要特点还在于逐一指出了学生最易犯的错误,使读者能在学习过程中少走弯路。

(5)作为概率统计这门课程的同步辅导,本书为读者精选了大量有针对性的同步测练与提高习题,并按教学计划与进度编排了期中、期末两个阶段测试题,便于学习者进行阶梯式的自我检测。所有习题难度由低到高,解析由浅入深,注意照顾到不同水平层次的学生。

(6)作为概率统计这门课程的备考指南,本书分类编选了近年来相应的考研真题(包括最新真题)并加以解析,使读者能真正、全面地衡量自己对这门课程的整体掌握程度,并对全国硕士研究生入学考试中概率统计试题的形式、难度有一定的了解,也便于立志考研的读者有针对性地进行复习和备考。

(7)参加本书编写的均为一线教师,他们都具有丰富的教学经验。因此,在编写技巧指导和例题讲解等方面均由浅入深、循序渐进且在难度上层次分明,切合不同学习者的实际需要。

在本书的编写过程中,尽管我们精益求精,但由于水平有限,书中难免仍存在不妥或需商榷之处,恳请读者指教。

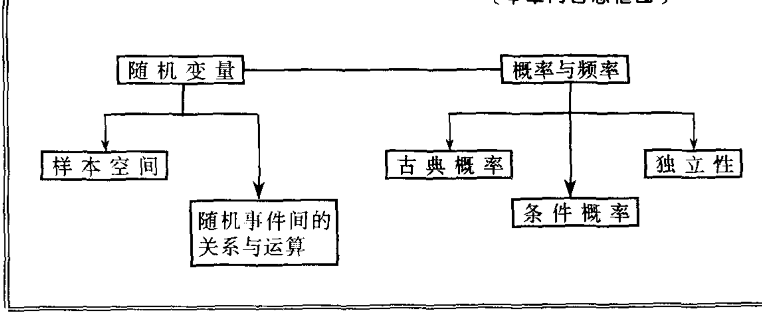
高等数学教学与命题研究组

2003年1月

目录

第一章　概率论的基本概念

〔本章内容总框图〕



目的与要求

1.理解随机试验、样本空间和随机事件的概念,掌握随机事件间的关系与运算.

2.理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典概型的概率,能应用概率的基本性质计算随机事件的概率.

3.掌握概率的加法公式、乘法公式,会应用全概率公式和贝叶斯公式计算较复杂随机事件的概率.

4.理解随机事件独立性的概念,能应用事件独立性进行概率计算.

§1.1 随机试验、样本空间、随机事件

内容与考点

1.随机试验

具有下述 3 个特点的试验称为随机试验：

1° 可以在相同的条件下重复地进行；

2° 每次试验的可能结果不止一个，且能事先明确试验的所有可能结果；

3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现．

2.样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S．样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点．

3.随机事件

(1) 试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件，简称事件．

(2) 基本事件：由一个样本点组成的单点集，称为基本事件．

(3) 必然事件：由所有样本点组成的集合，称为必然事件．

4.事件间的关系与运算

语言表达	事件的关系、运算
事件 A 发生必然导致事件 B 发生	$A \subset B$
事件 A 与事件 B 相等	$A = B(A \subset B$ 且 $B \subset A)$
事件 A 与事件 B 中至少有一个发生	$A \cup B$ 发生(和事件)
事件 A 与事件 B 同时发生	$A \cap B$(积事件，简记为 AB)
事件 A 发生但事件 B 不发生	$A \setminus B$ 发生(有时也记为“$A - B$”)
事件 A 与 B 互不相容(不同时发生)	$A \cap B = \varnothing$
事件 A 与 B 互为对立事件(逆事件)	$A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$

5.事件的运算律

交换律：$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$

结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

德·摩根律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$；$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

重难点及易犯错误分析

△**【例 1】** 某运动员连续射击 3 次，设 A_i = "第 i 次射击命中" $(i = 1,2,3)$，B_j = "3 次射击中正好击中 j 次" $(j = 0,1,2,3)$，C_k = "3 次射击中至少击中 k 次" $(k = 0,1,2,3)$，写出事件 A_i、B_j 和 C_k 的样本空间．

错误解法 设每次射击命中记为 1，不命中记为 0，用向量 (x_1, x_2, x_3) 表示 3 次射击结果，$x_i = 0$ 或 1 $(i = 1,2,3)$，则 A_i、B_j 和 C_k 的样本空间相同，均为

$$\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_8\}$$

其中 $w_1 = (0,0,0)$；$w_2 = (0,0,1)$；$w_3 = (0,1,0)$；$w_4 = (0,1,1)$；

$w_5 = (1,0,0)$；$w_6 = (1,0,1)$；$w_7 = (1,1,0)$；$w_8 = (1,1,1)$．

分析 此解法所犯的错误是由于没有真正理解样本空间的定义，并没有意识到样本空间的元素是由试验的目的所确定的，不同的试验目的将导致不同的样本空间，想当然地认为同一实验的样本空间相同是错误的．

正确解法 A_i 的样本空间即为错误解法中所给出的 Ω；3 次射击中，击中的可能次数为 0,1,2,3，故 B_j 的样本空间为 $\Omega = \{0,1,2,3\}$；3 次射击中，可能至少命中 0,1,2,3 次，故 C_k 的样本空间为 $\Omega = \{0,1,2,3\}$．

△**【例 2】** 说明事件 A、B 是否为对立事件：掷两枚硬币，观察正、反面出现的情况，A = {两枚都是正面}，B = {两枚都是反面}．

错误解法 由于 $A \cap B = \varnothing$，故 A、B 是对立事件．

分析 没有掌握对立事件的定义，混淆了对立与互不相容的定义．

正确解法 由题意，样本空间 S = {两枚都是正面，两枚都是反面，一枚正面一枚反面}，故 $A \cap B = \varnothing$ 但 $A \cup B \neq S$，因此，A、B 互不相容，但 A、B 不是对立事件．

△**【例 3】** 化简下列各式：

(1) $(A \cup B) \setminus (B \cup C)$　　(2) $(A \cap B) \setminus (B \setminus C)$

错误解法 (1) $(A \cup B) \setminus (B \cup C) = A \cup [B \setminus (B \cup C)] = A \cup \varnothing = A$

(2) $(A \cap B) \setminus (B \setminus C) = [(A \cap B) \setminus B] \cup C = \varnothing \cup C = C$

分析 没有掌握事件的运算法则，在去括号时运用了错误公式

$$(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C) \text{ 和 } A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$$

正确解法　(1) $(A\cup B)\setminus(B\cup C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)^C$

$$=(A\cup B)\cap(B^C\cap C^C)$$
$$=[A\cap(B^C\cap C^C]\cup[B\cap(B^C\cap C^C)]$$
$$=A\cap B^C\cap C^C$$

(2) $(A\cap B)\setminus(B\setminus C)=A\cap B\cap(B\cap C^C)^C=A\cap B\cap(B^C\cup C)$

$$=(A\cap B\cap B^C)\cup(A\cap B\cap C)=A\cap B\cap C$$

△**【例 4】**　(1) 设 $C=A\cup B$,求 $C\setminus B=?$

(2) 由 $A\cup B=A\cup C$ 可否得出 $B=C$?

错误解法　(1) $C\setminus B=(A\cup B)\setminus B=A$

(2) 由 $A\cup B=A\cup C$,可以得出　$B=C$

分析　上解法中所犯的错误主要是没有正确地应用事件的运算律.

正确解法　(1) $C\setminus B=(A\cup B)\setminus B=(A\cup B)\cap B^C$

$$=(A\cap B^C)\cup(B\cap B^C)=A\cap B^C=A\setminus B$$

(2) 由 $A\cup B=A\cup C$ 不一定能得出 $B=C$,如设 $B\subset A,C\subset A$,且 $B\neq C$,则满足 $A\cup B=A\cup C$,但此时得不出 $B=C$.

常考题型及技巧点睛

△**【例 1】**　写出下列随机试验的样本空间:

(1) 在半径为 1 的圆内任取一点,描述该点位置坐标的样本空间;

(2) 把一个长为 l 的竹竿折成 3 段,观察每一段的长度,描述这一试验的样本空间.

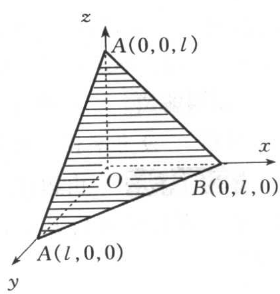


图 1－1

解　(1) 设圆心与原点重合,任取点的坐标为 (x,y),那么这一试验的样本空间为

$$S=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

(2) 设 x,y,z 分别表示这三段各自的长度,那么应该有　$x>0,y>0,z>0$

且 $x+y+z=l$. 因此样本空间

$$S=\{(x,y,z)\mid x+y+z=l,x>0,y>0,z>0\}$$

即在空间直角坐标系的第一卦限,过点 $A(l,0,0),B(0,l,0),C(0,0,l)$ 的三角形 ABC 的内部,如图 1－1 所示.

△【例 2】　写出下列随机试验的样本空间,并用样本点组成的集合表示给出的随机事件:

(1) 甲乙二人比赛,观察结果 .A = “甲不输”,B = “没有人输”.

(2) 有 A、B、C 3个盒子和 a、b、c 三个球,在每个盒子里放一个球 .A = “a 球放入 A 盒,b 球放入 B 盒”;B = “a 球不在 A 盒,b 球不在 B 盒”.

解　比赛的可能结果为:甲赢,甲输,和局,分别记为 w_1, w_2, w_3,则

$$\Omega = \{w_1, w_2, w_3\} \quad , \quad A = \{w_1, w_3\} \quad , \quad B = \{w_3\}$$

(2) 用 Yx 表示 x 在 Y 中,其中 $Y = A、B、C, x = a、b、c$,于是

$$\Omega = \{AaBbCc, AaBcCb, AbBaCc, AbBcCa, AcBaCb, AcBbCa\}$$

$$A = \{AaBbCc\} \quad , \quad B = \{AbBaCc, AbBcCa, AcBaCb\}$$

总结　上述两例主要考虑用样本点的集合表示样本空间和随机事件 .

△【例 3】　设袋内有 10 个编号为 1 ~ 10 的球,从中任取一个,观察其号码:

(1) 写出此试验的样本空间;

(2) 若 A 表示“取得的球的号码是奇数”,B 表示“取得的球的号码是偶数”,C 表示“取得的球的号码小于 5”, 则:①$A \cup B$,②AB,③$\overline{C}$,④$\overline{A}\,\overline{C}$,⑤ $\overline{B \cup C}$,⑥ $\overline{BC}$,⑦$A \setminus C$ 各表示什么事件?

(3) 事件 A 与 B 是否互不相容?

(4) AC 与 $\overline{A}\,\overline{C}$ 是否互不相容?是否对立?

解　(1) 若用 w_i 表示“取得的球的号码为 i”　$(i = 1, 2, \cdots, 10)$,则这个试验的样本空间为 $\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_{10}\}$.

(2)①$A \cup B$ 表示“取得的球的号码或者是奇数,或者是偶数”,它是必然事件,即　$A \cup B = \Omega$.

②AB 表示“取得的球的号码既是奇数又是偶数”,它是不可能事件,即

$$AB = \varnothing.$$

③$\overline{C}$ 表示“取得的球的号码大于或等于 5”,即　$\overline{C} = \{w_5, w_6, \cdots, w_{10}\}$.

④$\overline{A}\,\overline{C}$ 表示“取得的球的号码是大于 5 的偶数”,即　$\overline{A}\,\overline{C} = \{w_6, w_8, w_{10}\}$.

⑤ $\overline{B \cup C}$ 表示“取得的球的号码不是偶数也不小于 5”,也就是“取得的球的号码是大于等于 5 的奇数”,即　$\overline{B \cup C} = \overline{B}\,\overline{C} = \{w_5, w_7, w_9\}$.

⑥ $\overline{BC}$ 表示“取得的球的号码不是小于 5 的偶数”,也就是“取得的球的号码是奇数或者大于等于 5”,即　$\overline{BC} = \overline{B} \cup \overline{C} = \{w_1, w_3, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}\}$.

⑦$A \setminus C$ 表示“取得的球的号码是奇数但不小于 5”,也就是“取得的球的号码是大于等于 5 的奇数”,即　$A - C = \{w_5, w_7, w_9\}$.

(3) A 与 B 互不相容,因为取得的球的号码不会既是奇数又是偶数,即

$AB = \varnothing$. 同时,$A \cup B = \Omega$,所以 A 与 B 是对立事件 .

(4) 因为 $AC = \{w_1, w_3\}$, $\overline{A}\,\overline{C} = \{w_6, w_8, w_{10}\}$, 所以 $(AC)(\overline{AC}) = \varnothing$, 但 $AC \cup \overline{AC} = \{w_1, w_3, w_6, w_8, w_{10}\} \neq \Omega$, 因而 AC 与 $\overline{AC}$ 互不相容,但不对立 .

总结　本例题主要考查读者对样本空间及事件间关系的综合理解 .

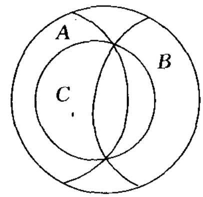


图 1-2

△【例 4】　设事件 A、B、C 满足 $C \supset AB$, $\overline{C} \supset \overline{A}\,\overline{B}$, 证明: $AC = C\overline{B} \cup AB$.

证明　〔方法 1〕$AC = AC(\overline{B} \cup B)$

$= (AC\overline{B}) \cup (ACB)$

由题意 $AB \subset C$, 故　$ACB = AB$

又由于 $\overline{C} \supset \overline{A}\,\overline{B}$, 故　$C \subset A \cup B$

从而　$C\overline{B} \subset (A \cup B)\overline{B} = A\overline{B}$

进一步　$AC\overline{B} = (A\overline{B}) \cap (C\overline{B}) = C\overline{B}$

故可得　$AC = (AC\overline{B}) \cup (ACB) = C\overline{B} \cup AB$,证毕 .

〔方法 2〕由图 1 - 2(文氏图) 也可直接观察结论是正确的 .

△【例 5】　化简下列各式:

(1)$(A \cup B)(B \cup C)$;　　　　(2)$(A \cup B)(A \cup \overline{B})$;

(3)$(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)$;

(4)$(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B})$

解　(1) 由德 · 摩根律及分配律可得

$$(A \cup B)(B \cup C) = \overline{\overline{(A \cup B)(B \cup C)}} = \overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{B \cup C}}$$

$$= \overline{\overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{B}\,\overline{C}} = \overline{\overline{B}(\overline{A} \cup \overline{C})} = \overline{\overline{B}\,\overline{AC}} = B \cup (AC)$$

(2)$(A \cup B)(A \cup \overline{B}) = [(A \cup B)A] \cup [(A \cup B)\overline{B}]$

$= A \cup (AB) \cup (A\overline{B}) \cup (B\overline{B}) = A$

(3)$(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B) = A(\overline{A} \cup B) = AB$

(4)$(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B}) = (AB)(\overline{A} \cup \overline{B}) = \varnothing$

△【例 6】　设 A、B、C 是 3 个事件,试证明: $(\overline{A}B) \cup (A\overline{B}) \cup (\overline{A}\,\overline{B}) = \overline{AB}$.

证明　〔方法 1〕$(\overline{A}B) \cup (A\overline{B}) \cup (\overline{A}\,\overline{B}) = (\overline{A}B \cup \overline{A}\,\overline{B}) \cup (A\overline{B})$

$= [\overline{A}(B \cup \overline{B})] \cup (A\overline{B}) = \overline{A} \cup (A\overline{B})$

$= (\overline{A} \cup A)(\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{AB}$

〔方法 2〕$(\overline{A}B) \cup (A\overline{B}) \cup (\overline{A}\,\overline{B}) = (\overline{A}B) \cup (A\overline{B}) \cup (\overline{A}\,\overline{B}) \cup (\overline{A}\,\overline{B})$

$= [(\overline{A}B) \cup (\overline{A}\,\overline{B})] \cup [(A\overline{B} \cup (\overline{A}\,\overline{B})]$

$= [\overline{A}(B \cup \overline{B})] \cup [\overline{B}(A \cup \overline{A})] = \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{AB}$

总结　例 4、5、6 主要是灵活地运用事件的运算律来进行证明与运算 .

同步测练与提高

1.选择题

(1) 设 $AB \subset C$,则______.

(A) $\overline{AB} \supset \overline{C}$　　(B) $A \subset C$ 且 $B \subset C$

(C) $\overline{A} \cup \overline{B} \supset \overline{C}$　　(D) $A \subset C$ 或 $B \subset C$

(2) 设 A、B 为任意两事件,则 $(A \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B})$ 表示______.

(A) 必然事件　　(B) 不可能事件

(C) A 与 B 恰有一个发生　　(D) A 与 B 不同时发生

(3) 设 A、B 为任意两事件,则下列关系成立的有______.

(A) $(A \cup B) \setminus B = A$　　(B) $(A \cup B) \setminus B \subset A$

(C) $(A \setminus B) \cup B = A$　　(D) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

2.写出下列随机试验的样本空间:

(1)10 个产品中有 3 个次品,每次从中任取一个,取出后不放回,直到将 3 只次品全部取出,记录抽取的次数;

(2) 掷一枚硬币直到出现反面为止,观察掷该硬币的次数;

(3)4 件产品中有一件次品,从中任取两件,观察取出的结果.

3.某人投篮两次,设事件 A_1 = “第一次投中”;A_2 = “第二次投中”,试表示下列各事件:B = “两次都投中”;C = “两次都未投中”;D = “恰有一次投中”;E = “至少有一次投中”;并指出 B、C、D、E 哪些是互不相容事件,哪些是对立事件?

4.已知 $(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{A \cup B}) \cup \overline{\overline{A} \cup B} = C$,求 B.

5.设事件 A、B、C 满足 $ABC = \varnothing$,把下列各事件表成一些互不相容事件的和:

(1)A;　(2)$B \setminus AC$;　(3)$B \cup (AC)$;　(4)$(AB) \cup (BC)$

6.证明:对任意事件 A、B 和 C 都有:

(1)$(A\overline{B}) \cup (B\overline{A}) \cup (AB) = A \cup B$;

(2)$C \cup (AB) = (A \cup C)(B \cup C)$;

(3) 若 $A \cup B = A \cup C$,$\overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C$,则 $B = C$.

7.化简下列各式:

(1)$(\overline{A}\,\overline{B}) \cup (\overline{A}B) \cup (A\overline{B})$;　(2)$(AB) \cup (A\overline{B}) \cup (\overline{A}B) \cup (\overline{A}\,\overline{B})$;

(3)$B \cup \overline{[(\overline{A} \cup B) \cap A]}$;

(4)$(AB\overline{C}) \cup (A\overline{B}C) \cup (\overline{A}BC) \cup (A\overline{B}\,\overline{C}) \cup (\overline{A}B\overline{C}) \cup (\overline{A}\,\overline{B}C) \cup (ABC)$

8.设 A、B、C 为任意 3 个随机事件,用 A、B、C 的运算关系表示:

(1)A、B、C 中不多于一个发生;　(2)A、B、C 中至少有两个发生.

参考答案与提示

1.(1)A　(2)C　(3)B、D

2.(1)$\Omega=\{3,4,5,\cdots,10\}$　(2)$\Omega=\{i \mid i$ 是正整数$\}$

(3) 设 3 件正品为 1,2,3,次品为 4,则

$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,4),(2,4)\}$$

3.$B=A_1A_2$;$C=\overline{A_1}\,\overline{A_2}$;$D=(A_1\overline{A_2})\cup(\overline{A_1}A_2)$;$E=A_1\cup A_2$

事件 B、C、D 两两互不相容;事件 C 和 E 是对立事件 .

4.$B=\overline{C}$　〔提示:运用事件的分配律及德 · 摩根律.〕

5.$A=(AB)\cup(A\overline{B})$;$B\setminus AC=(\overline{A}B)\cup(AB\overline{C})$;$B\cup(AC)=B\cup(A\overline{B}C)$;

$(AB)\cup(BC)=(AB)\cup(BC\overline{A})$

〔提示:处理此类问题的技巧是在适当的地方补上必然事件 Ω 相乘(积事件),使事件表达式中出现对立事件,而对立事件是互不相容的.〕

6.〔提示:应用事件运算的交换律和分配律〕

7.(1)$\overline{A}\cup\overline{B}$　(2)Ω　(3)Ω　(4)$A\cup B\cup C$

8.(1)$(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\cup(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}C)$

(2)$(AB)\cup(BC)\cup(AC)=(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)\cup(ABC)$

§1.2　频率与概率

内容与考点

1. 频　率

(1) 在相同的条件下,进行了 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数,比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率,记为 $f_n(A)$.

(2) 基本性质:

1°　$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

2°　$f_n(S)=1$;

3°　若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件,即对于 $i\neq j$,$A_iA_j=\varnothing$　($i,j=1,2,\cdots$),则