21世纪大学数学基础训练与能力提高丛书

高等数学

典型例题与解法［上］

李建平　等编著

- 归纳要点
- 精选例题
- 典型解法
- 模拟应试
- 考研训练

国防科技大学出版社

21世纪大学数学基础训练与能力提高丛书

高等数学典型例题与解法

（上册）

——一元函数微积分、向量代数与空间解析几何

李建平　朱健民　敖武峰　编著

国防科技大学出版社
湖南·长沙

内容简介

高等数学典型例题与解法分上、下册出版。上册内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理及导数应用，不定积分与定积分，向量代数与空间解析几何。每章分基本要求、内容提要、典型例题与方法、综合应用与提高（例题）、同步练习与综合练习、单元测试A、B卷。本书力求：对大纲要求有适合性，例题解法有典型性，练习题有代表性，对本科生练习和应试有有效性（考研生亦如此）。本科生、考研生分别使用同步、综合练习与单元测试A、B卷。适合于理工科、财经管理学科等本科生学习与考研复习使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型例题与解法·上/李建平等编著.—长沙:国防科技大学出版社,2003.7
ISBN 7-81024-977-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.①李…②朱…　Ⅲ.高等数学—高等学校—解题指导　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第053217号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4572640　邮政编码:410073
E-mail: gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑:潘生　责任校对:罗青
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
开本:787×1092　1/16　印张:20　字数:495千
2003年1月第1版第1次印刷　印数:1-4000册
*
定价:26.00元

序

数学有科学皇后之称。在现代社会，自然科学、技术科学与社会科学快速发展，数学在各科学领域的应用愈来愈广泛，而数学本身的分支增多，其理论也愈加深入。数学的发展和数学的应用紧密相关，相互促进。高等数学与现代数学已成为科学家、技术人员和管理人员用来分析和解决现代科技和社会问题的强有力的利器，不仅为解决问题提供了定量分析工具，而且提供了科学的思维方法。

大学教育为适应现代科学发展和人才培养的需要，都把数学教学摆在基础和核心的地位。培养大学生和研究生学习高等数学的浓厚兴趣和理解、应用高等数学的思想、方法的实际能力，是大学生、研究生未来从事现代化工作的必需，是大学数学教师的重任。本丛书编委和国防科技大学出版社为服务大学数学的教与学工作，试图为学生提供一套符合学习规律、适用有效的辅导教材。在编审委员会指导下，参编教师广泛参考国内流行教材和辅导教材，多次研讨写作的目的、要求和方案，定稿前又多次讨论、修改和优化。丛书凝结着作者的心血和创造性劳动。该丛书有如下特点：

1. 满足教学大纲要求，例题习题有典型性、代表性和系列性。作者参照有关学科的本科教学大纲要求，及硕士生入学考试要求而编写，限定内容范围和要求层次。广泛收集国内比较优秀的教材和习题集，反复比较，选择出有典型性、代表性的题目，继而进行分析和解答，使同学们能触类旁通。

2. 作者教学经验丰富，力图适合学生的学习规律。作者都是长期在教学第一线工作，积累了教授与导学的经验，在编写时融合了作者教学经验与教法。根据高等数学的高度抽象性、较强的逻辑性、应用广泛性的特点，掌握其思想和方法必须认真过“应用”关(解题)。而过好“应用”关，除了靠读者数学天赋、悟性，主要还是应“引导”有方。引导的方法主要是，遵循认识规律，例题习题的编排，由浅到深，由简单到复杂，由单一到综合，且提供解题的一般思路，使读者能举一反三。

3. 适合读者自学。大学生学习应有很强的独立性、主动性，况且辅导教

师不可能“招之即来”，然而优秀的“学习辅导书”也就是一位好的老师。该书安排的例题提供了分析思路，典型的同步习题和综合习题提供简答过程，全部习题提供了参考答案，十分有利于同学们自学指导。

本丛书的出版值得庆祝，它必将成为大学生、研究生愉快地进行数学训练，完成学业的益友良师。本书适合于广大的在校大学生、研究生学习，也适合于广大自学青年和在职人员自学之用。

丛书的出版是作者和编辑辛勤劳动的结晶，在此感谢他们的劳动，并向同学们和自学青年郑重推荐此书。

侯振挺

2003 年 8 月

前言

现代大学教育是以培养学习者获取新知识的能力为主要目的的素质教育。数学素质教育是其最重要的方面之一,这是由数学的重要性和特殊性决定的。数学是自然科学的基本语言,是“整理出的宇宙秩序”,尤其是在知识经济时代,“高技术本质上是数学”,数学已成为一种重要的经济竞争力。数学同时也是“辨证思维的工具”,是当代文化的一个重要组成部分。因此,数学在大学教育中的地位越来越重要,而如何学好数学也成为当代大学生普遍关心的问题。我们认为,熟练掌握数学的基本知识和基本方法,提高综合运用和灵活运用知识的能力是学好数学的基本要求。对数学知识掌握的熟练性、综合性和灵活性,成为各类数学考试,尤其是全国硕士研究生入学考试的测试目标。“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”明确“**要求考生比较系统地理解数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法,要求考生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力**”。由此看出,单纯的死记硬背学不好数学,更考不好数学。为了帮助在校大学生及考研的同学更好地理解和掌握“高等数学”,并提高应试能力,根据国家教委审定的“高等数学课程教学基本要求”,教育部“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求,结合我们长期从事“高等数学”的教学经验及对历年考研数学试题的长期跟踪和分析研究,编写此书。

全书分上、下册,共十一章,除第十一章为实战模拟外,前十章按知识点分类确定,其顺序与教学一致。**遵照重点突出、知识自足、同步训练、循序渐进、巩固提高、举一反三、融会贯通的编写原则**,前十章每章都划分为六个板块:

基本要求 指出本章各知识点的要求。我们用“**理解、了解、知道**”来区分对基本概念和理论的高、中、低三个层次的不同要求,相应地,对运算和推导的不同要求用“**熟练掌握、掌握、会**”来加以区分。读者由此明确学习重点。

内容提要 简明概述本章主要知识点,突出必须掌握的核心知识及考试重点,以方便读者复习。

典型例题与方法 **侧重对学生熟练性的能力培养,同步指导学生学习“高等数学”课程全过程**。紧扣教学基本要求和考试重点,每个主要知识点都精选 1 ~ 3 道题目,讲解典型解法,突出解题思路,归纳解题方法。同时,针对学习中易犯的概念及逻辑错误,对高等数学中较难辨别的概念予以辨析,指导同学们掌握正确的思维方法。

综合应用与提高 **侧重对学生综合性和灵活性的能力培养,指导学生考研复习**。所选题目综合性强、题型较为新颖,一个题目往往涉及不同章节的多个知识点,通常需要熟练地综合和灵活运用所学知识才能解决,这正是考研题的主要特点。通过示范讲解和一题多解,启发和开拓解题思路,希望达到举一反三、融会贯通、触类旁通的效果。

同步及综合练习 包含难度不同的两组练习题。**“同步练习”主要针对本章知识点的**

熟练性训练;"综合练习"则是以本章知识点为中心的综合性及灵活性训练。每组练习中将类型相同的题排在一起,对奇数号题给出简答,对偶数号题给出答案及提示。这种设计,对初学者大有裨益。

单元测试 包含难度不同的两组测试题,"测试题 A"主要以课程基本要求为目标;"测试题 B"则以考研要求为目标。通过自我测试,既可以及时发现学习中存在的问题以便明确进一步复习的方向,又能通过实战体验,提高应试能力。对测试题我们给出详细的解答,方便读者对照检查。

在第十一章,提供了每学期期末与全学年的模拟测试题及其解答,并给出了近三年的全国硕士研究生入学统一考试数学试题,供读者参考。

解题的能力与科学的思维方式、熟练的技巧、涉及知识的使用意识密切相关,所以,熟练掌握基本概念、基本理论和基本方法是至关重要的,通过研习一定数量的范例学会解题不失为应试的一个有效途径。值得指出的是,数学学习中解题的目的,绝不只是为了给出答案,而是通过它启迪与培养人们的逻辑思维和科学研究方法。因此,读者学习解题时不要局限于题目的本身,不要搞题海战术,而应多思考、多联系,通过解题发展自己的能力。使用本书时,建议读者先不看解答做题,然后对照和消化解答,并找出有益的启发,以获得较大的收获。

本书的出版,得到国防科技大学出版社和国防科技大学理学院数学与系统科学系领导的大力支持。衷心感谢本书的责任编辑潘生副编审,没有他的热情鼓励和辛勤劳动,本书难以付梓。电子科学与工程学院 01 级部分学员认真阅读了本书初稿,符绩桄教授、毛紫阳教员为本书提供了部分材料并和作者讨论了书中的一些问题,他们提出了许多宝贵意见,在此表示衷心感谢。本书还参考了国内外的一些教材和习题集,对其著作者表示衷心感谢。

尽管作者竭尽其力,但书中还会有错漏不当之处,恳请读者批评指正。

编　者

2003 年 8 月

21 世纪大学数学基础训练与能力提高丛书

编审委员会

目　录

第二章　导数与微分

第三章　微分中值定理及导数应用

第四章 不定积分与定积分

第五章 向量代数与空间解析几何

第一章　函数、极限与连续

一、基本要求

理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立简单应用问题的函数关系式;了解函数有界性、单调性、周期性和奇偶性;理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念;熟练掌握基本初等函数的性质与图形;理解数列极限与函数极限的概念;理解函数左、右极限的概念,以及函数极限与左、右极限的关系;熟练掌握极限的性质及运算法则;掌握无穷小量的概念及性质,了解极限存在的量与无穷小的关系;了解无穷大量的概念;熟练掌握夹逼定理、单调有界准则及两个重要极限;熟练掌握无穷小的比较及等价无穷小代换;知道柯西准则;会用极限的精确语言证明简单的极限问题;熟练掌握极限计算的基本方法;理解函数连续、左连续、右连续的概念及其性质;会判别函数间断点类型;了解连续函数的运算性质及初等函数的连续性;了解闭区间上连续函数的有界性、最值性、介值性及零点定理,会应用这些性质.

二、内容提要

1. 函数

1)*函数与反函数*　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的实数集.如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$,其中 D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域,x 为自变量,y 为因变量,$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

反过来,若把 y 视为自变量,x 视为因变量,用 y 写出 x 的表达式:$x=\varphi(y)$,则称 $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 互为反函数.

若对于自变量 x 的一个值,因变量 y 有且只有一个值与之对应,则称 y 为 x 的单值函数.若对于自变量的 x 的一个值,与其对应的 y 值不止一个,则称 y 为 x 的多值函数.

本书中函数都指单值函数.

2)*显函数与隐函数*　因变量可以由自变量用数学式子直接表示出来的函数称为显函数.若函数关系包含在一个方程式或一组方程式中,自变量与因变量无明显区分,则称隐函数.

3)*复合函数*　若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,则称 y 是 x 的复合函数,u 称为中间变量,记作 $y=f[\varphi(x)]$.无中间变量的函数称为简单函数.

4)*分段函数*　在函数的定义域的不同部分上用不同的式子表达的一个函数,叫分段函数.

5)基本初等函数与初等函数　幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数通称为基本初等函数.凡是由基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次的复合运算构成,并能用一个数学式子表示的函数都属于初等函数.

6)函数的几种特性

(1)函数的有界性　设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若* $\exists M>0, \forall x\in I$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界,否则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

(2)函数的单调性　设 x_1, x_2 是区间 I 上任意两点,且 $x_1<x_2$,若恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\qquad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(单调减少).如果上述不等式中不等号严格成立,则称 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调增加(严格单调减少).

单调增加或单调减少的函数通称为单调函数.

(3)函数的奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,即* $\forall x\in D, -x\in D$,若恒有

$$f(-x)=-f(x), \forall x\in D,$$

则称 $f(x)$ 为奇函数;若恒有

$$f(-x)=f(x), \forall x\in D,$$

则称 $f(x)$ 为偶函数.

几何上,奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

(4)函数的周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在常数 $T\neq 0$,使得对任一 $x\in D$ 时,$x\pm T\in D$,且恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

2. 极限

1)极限定义

(1)数列极限　对于数列 $\{a_n\}$,若存在数 a,满足

$\forall \varepsilon>0, \exists N\in \mathbf{Z}^+$ ($\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集),当 $n>N$ 时,有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 极限存在或收敛,记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.否则称数列 $\{a_n\}$ 发散.

(2)函数双边极限、单边极限及其关系

设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>x_0\,(x_0>0)$ 内有定义,若存在常数 A,满足

$\forall \varepsilon>0, \exists X>0\,(X>x_0)$,当 $|x|>X$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x\to\infty$ 时,函数 $y=f(x)$ 的极限存在,记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

设函数 $y=f(x)$ 在 $x>x_0\,(x_0>0)$ 内有定义,若存在常数 A,满足

---

* 记号“$\forall$”表示“任意给定”;记号“$\exists$”表示“存在”.

$\forall \varepsilon>0, \exists X>0(X>x_0)$,当 $x>X$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x\to+\infty$ 时,函数 $y=f(x)$ 的极限存在,记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

设函数 $y=f(x)$ 在 $x<-x_0(x_0>0)$ 内有定义,若存在常数 A,满足

$\forall \varepsilon>0, \exists X>0(X>x_0)$,当 $x<-X$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x\to-\infty$ 时,函数 $y=f(x)$ 的极限存在,记作 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

当 $x\to\infty$ 时,$f(x)$ 的双边极限存在的充分必要条件是两个单边极限存在且相等,就是说,$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

(3)函数双侧极限、单侧极限及其关系

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义,若存在常数 A,满足

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x\to x_0$ 时,函数 $y=f(x)$ 的极限存在.

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某去心左邻域内有定义,若存在常数 A,满足

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$,当 $-\delta<x-x_0<0$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x\to x_0^-$ 时,函数 $y=f(x)$ 的左极限存在,记作 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某去心右邻域内有定义,若存在常数 A,满足

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$,当 $0<x-x_0<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x\to x_0^+$ 时,函数 $y=f(x)$ 的右极限存在,记作 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 的双侧极限存在的充要条件是两个单侧极限存在且相等.就是说,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,当且仅当左、右极限存在且相等,即 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

2)极限的性质

(1)惟一性　如果数列 $\{a_n\}$ 极限存在,则其极限是惟一的;如果函数 $f(x)$ 在某过程(具体可以为 $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to x_0$, $x\to x_0^-$, $x\to x_0^+$ 这六种过程中的某一种)中极限存在,则其极限是惟一的.

(2)有界性

如果数列 $\{a_n\}$ 极限存在,则它必为有界数列.

如果函数 $f(x)$ 在某过程中极限存在,则函数 $f(x)$ 在该过程中必有界.这里指函数局部有界.如 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 过程中有界是指:$\exists M>0, \exists \delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3)保号性

如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,那么 $A\geqslant 0$.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$，那么存在 x_0 的某去心邻域，当 x 在该邻域内时，就有 $f(x)>0$.

(4)归并性(又叫海涅定理)

数列 $\{a_n\}$ 极限存在，极限为 A，则它的任意一个子数列的极限都存在，且极限都是 A. 反之亦真.

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则对于任一满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 的数列 $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0, n=1,2,\cdots)$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$. 反之亦真.

设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则对于任一满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$. 反之亦真.

另外，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=a$.

(5)夹逼定理

设 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，$n\geqslant n_0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

设在某过程中，$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim f(x)=\lim h(x)=A$，则 $\lim g(x)=A$.

(6)单调有界准则

单调增加(减少)有上界(下界)的数列必有极限.

函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0^+$（或 $x\to+\infty$）中单调增加(减少)且有上界(下界)，那么 $f(x)$ 在该过程中极限存在.

3)极限运算法则

(1)四则运算　设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有：

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B;$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B;$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\,(B\neq 0).$$

(2)复合函数的极限　设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且在 x_0 的某一去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$. 如果 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$.

(3)设 $\lim f(x)=A\neq 0$，则 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot\lim g(x)$. 其含义是：如果 $\lim g(x)$ 存在，此即为极限乘法法则；如果 $\lim g(x)$ 不存在，则原极限 $\lim[f(x)\cdot g(x)]$ 不存在.

(4)设 $\lim f(x)=A>0$，$\lim g(x)=B$，则 $\lim[f(x)]^{g(x)}=A^B$.

(5)设 $\lim f(x)=0$，$g(x)$ 为同一过程中的有界量，则 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=0$.

4)无穷小与无穷大

(1)无穷小　如果 $\lim f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为该过程中的无穷小量. 例如：

$f(x)$ 是 $x\to x_0$ 过程中的无穷小量是指 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)|<\varepsilon.$$

(2)无穷大　如果在自变量的某变化过程中，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称 $f(x)$