

最优化钻井中钻进目标函数初步研究

郭 学 增

(华东石油学院钻井教研室)

摘 要

本文从理论上叙述了以钻进成本为准则的目标函数,其重要特点:一次、二次可微性,凸性,可行集;并在分析诸特点的基础上,提出了最优钻进措施的寻求部位和解题方法。

为了充分利用钻进目标函数这一数学概念,解决生产实际问题,提出了在现场条件下使用目标函数等值图的想法。文内分析了钻进成本等值面族在各个典型截面上的特点,并指明了其有意义部分所在。从实用角度出发,认为组合等值图是具有实际意义的,它可以说明每一种钻压转速配合下,所可能取得的最大经济效益,为各个矿区改进技术措施提供理论依据。

前 言

随着工业技术的发展,最优化已成为钻井的重要工艺方向。钻进过程的最优化是其重要的组成部分。多年来,钻井工作者对于什么是合理的钻进措施进行了探索。经过长期实践提出,钻进成本的高低是衡量措施合理性的准则,即以钻进成本作为钻进过程的目标函数。

钻进目标函数 C ,可以用式(1)描述

$$C = \frac{C_B + C_R(T_T + T)}{Y} \quad (1)$$

式中 C_B ——钻头成本,元/只;
 C_R ——钻机作业费,元/小时;
 T_T ——在该井深起下钻接单根时间,小时;
 T ——该钻头在井下工作时间,小时;
 Y ——该钻头取得的进尺,米。

使用钻进成本作为目标函数,必须解决用什么模式求得钻头进尺和工作时间问题。近年来,国外使用修正的杨格模式,取得了一定的效果,积累了大量的资料。在国内,部分油田也开始验证修正的杨格模式,也取得了可喜的成果。

用修正杨格模式可以解出钻头的进尺和工作时间,其公式为

$$Y = \frac{J}{S} \cdot E \quad (2)$$

$$T = \frac{F}{S} \quad (3)$$

式(2)中, J ——一定钻进措施下的初始钻速,米/小时。

$$J = K \cdot C_H \cdot C_P (W - M) N^\lambda \quad (4)$$

式中 K ——地层可钻性系数;

C_H ——井底净化系数;

C_P ——压差影响系数;

M ——门限钻压, 吨;

λ ——转速指数;

W ——钻压, 吨;

N ——转速, 转/分。

式(2)和(3)中, S ——一定钻进措施下, 钻头牙齿的初始磨速, 1/小时。

$$S = \frac{A_f(PN + QN^2)}{1000(D_2 - D_1W)} \quad (5)$$

式(2)和式(3)中, E 、 F ——进尺与工时的效果系数。它们是牙齿最终磨损量 H_f 、钻头系数 C_1 与中间系数 C_2 的函数。

$$E = \int_0^{H_f} \frac{1 + C_1 H}{1 + C_2 H} dH = \frac{C_1}{C_2} H_f - \frac{C_1 - C_2}{C_2^2} \ln(1 + C_2 H_f) \quad (6)$$

$$F = \int_0^{H_f} (1 + C_1 H) dH = H_f + \frac{C_1}{2} H_f^2 \quad (7)$$

式(2)、(3)代入(1)式, 可得出目标函数 C 的另一形式

$$C = \frac{C_R}{EJ} (T_E \cdot S + F) \quad (8)$$

式(8)中, T_E ——井深、钻头成本折算时间, 小时。

$$T_E = T_T + \frac{C_B}{C_R} \quad (9)$$

研究式(8)可以揭示出钻进目标函数的性质, 解决到哪里去寻优和用什么方法寻优等钻进最优化所涉及的一系列问题, 这是本文要叙述的要点。

钻进目标函数的特点和寻优方法

分析式(8)可以看出, 钻进目标函数 C , 是由下列几个方面因素组成的。

1. 地层特性因素: 如研磨性系数 A_f 、可钻性系数 K 、门限钻压 M 、转数指数 λ 和地层空隙压力梯度 C_p ;
2. 钻头结构和尺寸因素: 如尺寸系数 D_1 和 D_2 , 类型系数 P 、 Q 和 C_1 ;
3. 地层与钻头的中间系数: 牙齿磨损因数 C_2 及轴承工作系数 b ;
4. 钻进措施因素: 如钻压 W 、转数 N 、牙齿最终磨损量 H_f 、井底净化系数 C_H 及压差影响系数 C_P 。

前三项因素, 只能认识它们, 却不能改变它们, 唯有第四项是钻进过程中所要优选的参数。

由于井底净化系数 C_H 与压差影响系数 C_P , 只进入到钻进目标函数 C 的分母中, 故有条件将五维最优化问题转化成三维最优化与另外两维最优化的叠合问题。即钻压、转速与牙齿磨

损量的优选问题，可以与净化参数、压差参数的优选分别进行。

本文仅局限于研究 $W-N-H_f$ 三维空间中目标函数 C 的特点，故暂且认为净化因素与压差因素处于最优参数下，即 $C_H = 1$, $C_p = 1$ 。

钻进目标函数 C 的定义域为

$$\begin{cases} M(\text{或} 0) < W < D_2/D_1 \\ 0 < N \\ 0 < H_f \end{cases}$$

超出上述三组不等式形成的定义域，钻进目标函数 C 变为负值，失去了钻进成本的意义。

钻进目标函数 C ，在定义域中具有如下特点：

1. 连续性：符合定义域的三维空间内任何一个钻进措施点 $C(W, N, H_f)$ ，都对应着一个钻进成本值，且可以证明任何无限小的变量增值，均对应于无限小的函数增值，与微分的方向无关。这说明了钻进目标函数 C ，具有连续性和一次可微性。

2. 二次可微性：符合定义域的任何一点钻进措施点 $C(W, N, H_f)$ ，其一阶偏导数也是连续的，故可写出一阶、二阶偏导函数。这些函数是：

$$\frac{\partial C}{\partial W} = \frac{C_R}{EJ} \left[\frac{T_E \cdot S \cdot D_1}{D_2 - D_1 W} - \frac{T_E S + F}{W - M} \right] \quad (10)$$

$$\frac{\partial C}{\partial N} = \frac{C_R}{EJ} \left[\frac{T_E A_f (P + 3QN^2)}{1000(D_2 - D_1 W)} - \frac{(T_E S + F)\lambda}{N} \right] \quad (11)$$

$$\frac{\partial C}{\partial H_f} = \frac{C_R}{EJ} \left[1 + C_1 H_f - \frac{(T_E S + F)(1 + C_1 H_f)}{E(1 + C_2 H_f)} \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial W^2} = \frac{C_R}{EJ} \left[\frac{2T_E D_1^2 S}{(D_2 - D_1 W)^2} - \frac{2T_E S D_1}{(W - M)(D_2 - D_1 W)} + \frac{2(T_E S + F)}{(W - M)^2} \right] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial W \partial N} = \frac{C_R}{EJ} & \left[\frac{T_E A_f D_1 (P + 3QN^2)}{1000(D_2 - D_1 W)^2} - \frac{T_E A_f (P + 3QN^2)}{1000(D_2 - D_1 W)(W - M)} \right. \\ & \left. - \frac{T_E S D_1 \lambda}{(D_2 - D_1 W)N} + \frac{(T_E S + F)\lambda}{(W - M)N} \right] \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial N^2} = \frac{C_R}{EJ} & \left[\frac{T_E A_f 6QN}{1000(D_2 - D_1 W)} - \frac{2T_E A_f \lambda (P + 3QN^2)}{1000(D_2 - D_1 W)N} \right. \\ & \left. + \frac{\lambda(1 + \lambda)(T_E S + F)}{N^2} \right] \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial N \partial H_f} = \frac{C_R}{EJ} & \left[\frac{T_E A_f (P + 3QN^2)}{1000(1 + C_2 H_f)(D_2 - D_1 W)} + \frac{\lambda(T_E S + F)(1 + C_1 H_f)}{E(1 + C_2 H_f)N} \right. \\ & \left. - \frac{\lambda(1 + C_1 H_f)}{N} \right] \quad (16) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial H_f^2} = \frac{C_R}{EJ} \left\{ C_1 - \frac{(1 + C_1 H_f)^2}{E(1 + C_2 H_f)} \right\}$$

$$- \frac{(T_E S + F) [E(C_1 - C_2) - (1 + C_1 H_f)^2]}{E^2(1 + C_2 H_f)^2} \} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial H_f \partial W} = \frac{C_R}{EJ} \left[\frac{(T_E S + F)(1 + C_1 H_f)}{E(1 + C_2 H_f)(W - M)} - \frac{T_E S D_1 (1 + C_1 H_f)}{E(1 + C_2 H_f)(D_2 - D_1 W)} - \frac{1 + C_1 H_f}{W - M} \right] \quad (18)$$

令 (10)、(11) 和 (12) 三式等于零, 可以在三维空间中得到三个空间曲面, 即最优钻压面、最优转速面和最优磨损面, 这三个空间曲面的空间形状如图1、2、3。

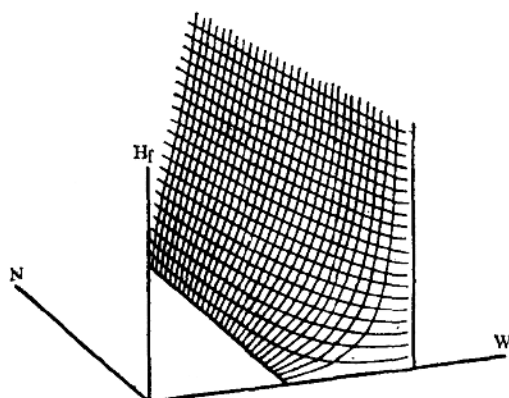


图 1 最优钻压面

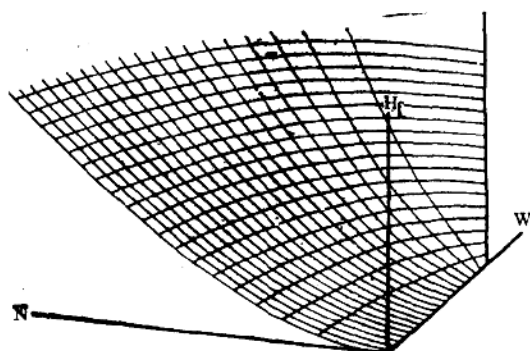


图 2 最优转速面

解方程组 $\frac{\partial C}{\partial W} = 0, \frac{\partial C}{\partial N} = 0, \frac{\partial C}{\partial H_f} = 0$, 可以得出一个驻点 $C_0(W_0, N_0, H_{f0})$,

该点即为上述三个空间曲面的交点。根据目标函数 C 的二阶偏导方阵正定的特性, 可以证明该驻点是一个局部极小值点, 即钻进成本最低点。

3. 凸性: 钻进目标函数 C 在定义域中, 是一个凸函数。定义域中任取两个措施点 A 和 B , 其坐标分别为 (W_A, N_A, H_{fA}) 和 (W_B, N_B, H_{fB}) , 其对应的钻进成本值为 C_A 和 C_B 。可以证明 A, B 间任何一个线性插值点 $C(W, N, H_f)$ 的钻进成本值, 均小于 C_A, C_B 间的线

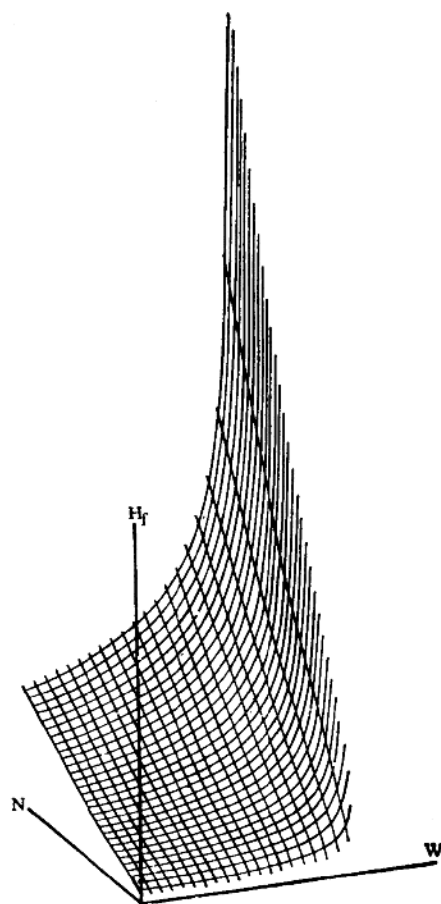


图 3 最优磨损面

性插值。根据钻进目标函数 C 是凸函数这一特点，可证明全域只有一个极小值点。用一阶偏导为零解出的驻点 C_0 ，就是全域唯一的极小值点。

4. 目标函数的可行集：定义域中并不是所有技术措施点都是可行的。对于牙齿钻头来讲，牙齿磨损量受到双重限制，即牙齿磨损量不可以大于1；牙齿磨损量不可以大于对应于轴承磨损量为1的牙齿磨损量。用两组不等式，可以描述牙齿磨损量的双重限制。

$$H_f \leq 1 \quad (19)$$

$$H_f \leq \frac{1}{C_1} (\sqrt{1 + 2C_1 S T_B} - 1) \quad (20)$$

(20) 式中 T_B ——钻头轴承的寿命，小时。

$$T_B = \frac{b}{N W^{1.5}} \quad (21)$$

(19)、(20) 两式在定义域中划出了一个可行集。属于可行集的措施才是可行的。 $W-N-H_f$ 三维空间中，可行集的空间形状如图4。

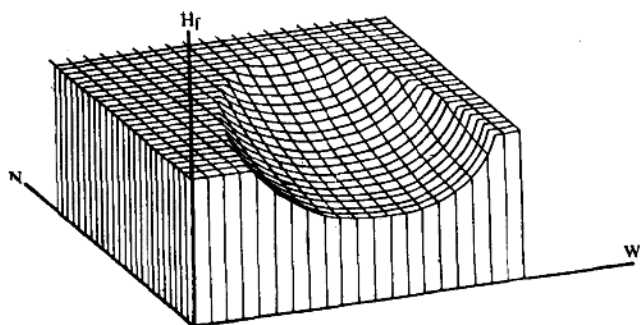


图 4 目标函数的可行集

由图 4 可以看出, 可行集是个凹集, 顶部的平面为牙齿极限磨损面 ($H_f = 1$), 顶部的凹面为轴承极限磨损面 $\left\{ H_f = \frac{1}{C_1} \left[\sqrt{1 + 2C_1ST_B} - 1 \right] \right\}$ 。可行集的其他几个边界面与定义域一致。

5. 可行集内的寻优部位与寻优方法: 当全域最优点不属于可行集时, 求得的最优技术措施, 只有理论意义而无实际意义。此时, 必须在可行集内寻优。根据钻进目标函数 C 的连续性和凸性可知, 可行最优点必然座落在可行集的边界上。这就决定了全局最优点不可行时的二次寻优部位。用经典最优化方法, 在全域寻优取得不可行结果时, 二次寻优部位落在轴承极限磨损面上或牙齿极限磨损面上。由于这些极限磨损面在三维空间中均可以用等式

$$\Phi(W, N, H_f) = 0 \quad (22)$$

形式加以描述, 故解可行最优点的方法, 应该是解等式约束的最优化方法, 其中以拉格朗日乘子法的解题方法为最好。下面分别列出 $H_f = 1$, $B_f = 1$, 以及 $H_f = B_f = 1$ 两面交线上寻优的迭代公式。

(1) 在 $H_f = 1$ 面上寻优的迭代公式

$$\frac{\left(1 + \frac{C_1}{2}\right)\left(\frac{D_2}{D_1} - M\right)}{\left[\frac{P + 3QN^2}{\lambda(P + QN^2)}\right]^2 - 1} - \frac{T_E A_f (PN + QN^3)}{1000D_1} = 0 \quad (23)$$

式 (23) 中以 N 为迭代变量, 初值取 $N = 100$ 。

(2) 在 $B_f = 1$ 面上寻优的迭代公式当 $W = \text{Const}$ 时, 迭代求 N , 初值取 $N = 100$ 。

$$\frac{T_E A_f (P + 3QN^2)}{1000(D_2 - D_1 W)} - \frac{\lambda(T_E S + F)}{N} - \frac{b}{NM^{1.5}} \left[1 - \frac{T_E S + E}{E(1 + C_2 H_f)} \right] \left(\frac{S}{N} - \frac{\partial S}{\partial N} \right) = 0 \quad (24)$$

当 $N = \text{Const}$ 时, 迭代求 W , 初值取 $W = 0.7 \frac{D_2}{D_1}$

$$\frac{T_E S D_1}{D_2 - D_1 W} - \frac{T_E S + F}{W - M} - \frac{b}{NW^{1.5}} \left[1 - \frac{T_E S + F}{E(1 + C_2 H_f)} \right] \left(\frac{1.5S}{W} - \frac{\partial S}{\partial W} \right) = 0 \quad (25)$$

(3) 在 $H_f = B_f = 1$ 两面交线上寻优的迭代公式

$$\left(\frac{T_E S D_1}{D_2 - D_1 W} - \frac{T_E S + F}{W - M} \right) 2QN - \frac{1000F}{A_f b} (2.5D_1 W^{1.5})$$

$$-1.5D_2W^{1.5}) \left[\frac{T_E A_f (P + 3QN^2)}{1000(D_2 - D_1 W)} - \frac{(T_E S + F)\lambda}{N} \right] = 0 \quad (26)$$

$$\text{式 (26) 中 } N = \sqrt{\frac{1000F(D_2 - D_1 W)W^{1.5}}{A_f b Q} - \frac{P}{Q}} \quad (27)$$

式 (26)、(27) 中迭代变量为 W ，初值取 $W = 0.7 \frac{D_2^2}{D_1}$ 。

目标函数的等值图及其应用

钻井工作者所关心的不仅是钻进目标函数的极值和取得这些极值所对应的技术措施，更为关心的，是目标函数的分布规律，是掌握各种技术措施所可能带来的经济效益，这就是研究钻进目标函数的等值图的必要性。

通过解目标函数一阶偏导为零的方程组，可以得到目标函数的全域最优值点 C_0 ，其坐标为 (W_0, N_0, H_{f0}) ，钻进成本亦用 C_0 表达，这是全域的最低钻进成本。取一定值 C_f ，使 $C_f > C_0$ ，则可以在三维空间找到一系列措施点，这些点的钻进成本均为 C_f 。这些点的集合，便构成了钻进成本为 C_f 的空间曲面，称之为目标函数的等值面。

C_f 取值不同，其等值面的大小和形状也随之不同。但它们均为四周封闭的曲面，一层套一层，互不相交。 C_f 值愈大，圈闭的范围愈大，形成目标函数的等值面族。

若用具有一定涵意的空间曲面，剖切等成本面族，便可在剖切截面上获得一系列封闭的等成本线，它们类似于地形图上的等高线，一圈套一圈围绕着截面上的成本最低点。

具有定值 C_f 的等成本面，其函数式可以写成 $C_f(W, N, H_f) = \text{Const}$ 。通过化简可以得出

$$T_E S + F - \frac{C_f}{C_R} E J = 0 \quad (28)$$

令 $C_f = 34, 36, 38, 40$ 元/米。

通过 C_0 点，用恒 N ，恒 W ，恒 H_f 三个平面剖切上述四个等成本面，剖切截面上的等成本线如图 5、6、7。

通过上述三个截面上的等成本线形状，可以想象出等成本面在三维空间的位置和形状。

现将 $C_f = 40$ 元/米的等成本面在三维空间的形状绘出，如图 8。

图 5、6、7 三个截面上的等成本线不一定都有实际意义，必须把它们与目标函数的可行集联系在一起。可行集以外的等成本线，只具有理论意义，可行集内部的等成本线，也不一定表明每个措施的最大经济收益。

对钻井实践最有指导意义的，是组合剖面上的等成本图。它是用三个剖切面，剖切等成本面族的组合结果。这三个剖切面是：

1. 牙齿极限磨损面即 $H_f = 1$ 。用它剖切等成本面族取得的等成本线，对牙齿先于轴承磨损情况下具有实际意义。它指出该情况下各种措施所可能取得的最好经济指标。

2. 轴承极限磨损面即 $B_f = 1$ 。用它剖切等成本面族得出的等成本线，对于轴承先于牙齿磨损条件下是有益的。它说明了这种条件下，各种钻压转速配合所能达到的最低钻进成本。

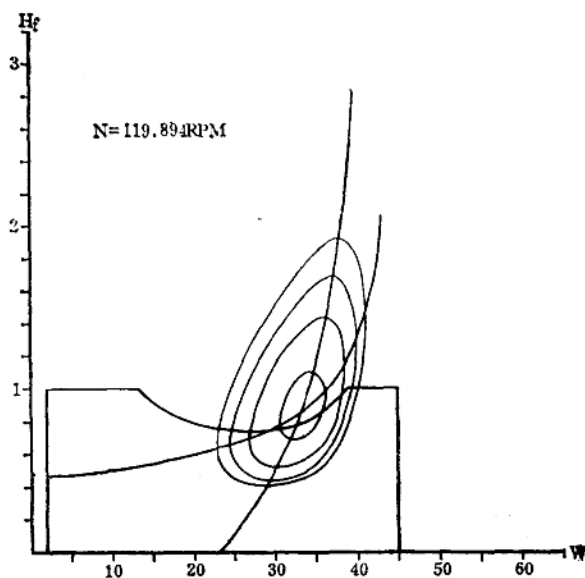


图 5 恒N截面上的等成本线

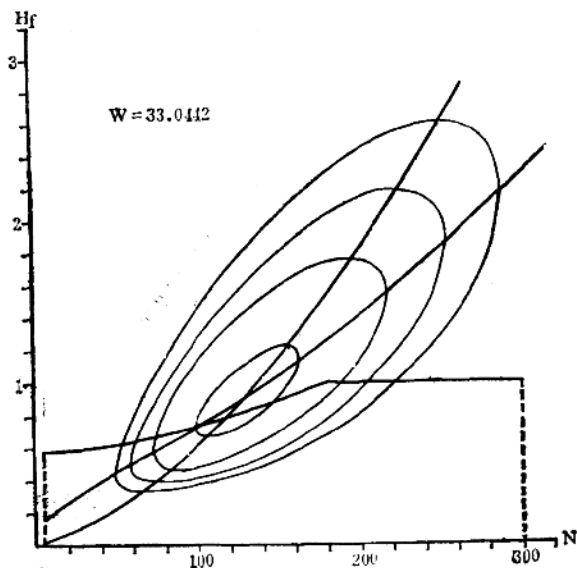


图 6 恒W截面上的等成本线

3. 可行集内部的 $\frac{\partial C}{\partial H_f} = 0$ 曲面。若全域最优点属于可行集，则该点必定在 $\frac{\partial C}{\partial H_f} = 0$ 曲面上。用它剖切等成本面族得出的等成本线，对于在牙齿和轴承损坏以前，存在成本最低点的条件下，具有突出意义。它指明每一种措施下达到成本最低点时的钻进成本值。

由以上三个剖切面的性质决定，其有用部分是因钻头的磨损情况而异的。因此，必须把

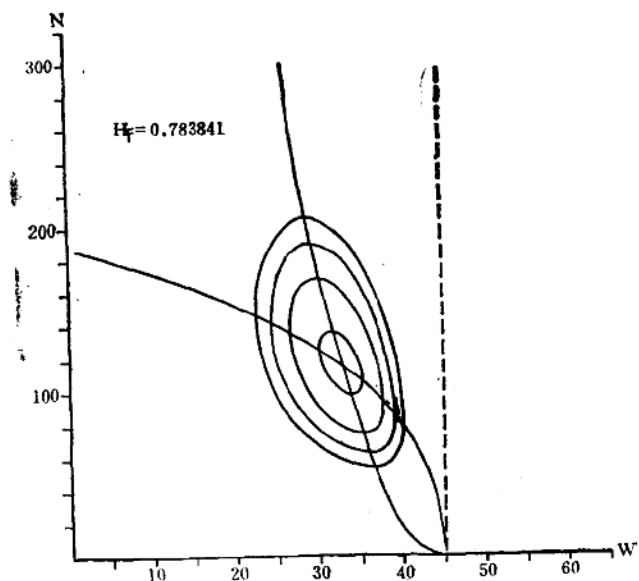


图 7 恒 H_F 截面上的等成本线

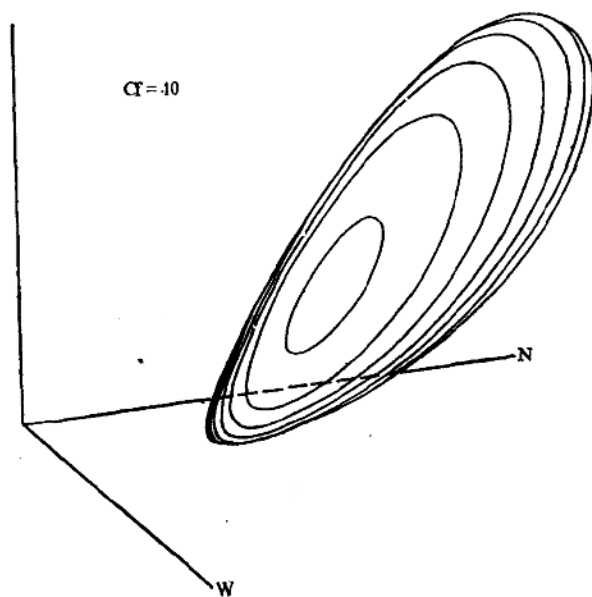


图 8 等成本面的空间形状

三个剖切截面上等成本线的有用部分，按磨损分区情况拼接起来，才能得到一幅每个措施下都指明最大可能经济效益的趋势图。

组合截面等成本图是用计算机绘制而成的，如图 9。

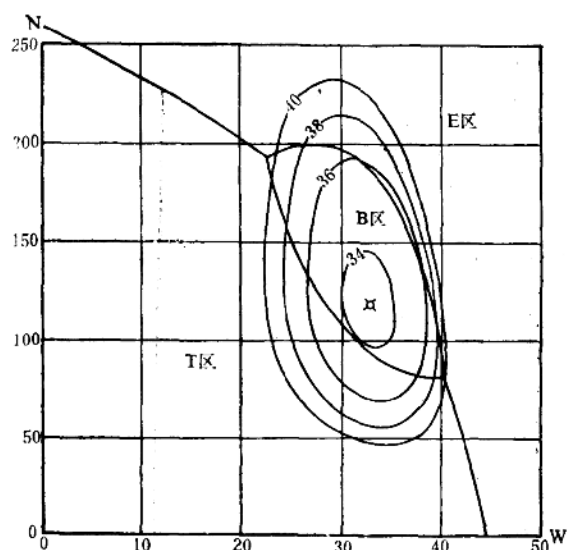


图 9 组合截面等成本图

图 9 首先是一个措施分区图，它指明什么样的措施范围是牙齿先于轴承磨损的措施范围，称为T区 (Tooth Wear Area)。又指明哪一类钻压转速配合区间属于轴承先于牙齿磨损区间，称为B区 (Bearing Wear Area)。另一部分措施区域是在牙齿与轴承均未磨坏之前，可以有一个钻进成本最优点的措施区域，称之为经济磨损区，即E区 (Economical Wear Area)。落在两区分界线上措施点，具有双重涵意。例如T区B区分界线上诸点，钻头牙齿与轴承同时磨坏，即牙齿寿命与轴承寿命相同。

图 9 中，四条封闭区线的核心部位是全局可行最优点。该点位于轴承极限磨损面上，它所对应的钻进成本值为33.5735元/米。四条封闭区限，分别是34、36、38、40元/米的等成本线。落入34元/米成本线以内诸措施点，其可行最优经济指标，将低于34元/米；落入34元/米以外，但在36元/米等成本线以内者，其可行最优钻进成本，将介于34~36元/米之间。通过此种途径，指出每一种钻压转速配合，所可能取得的最优指标。

当油田的具体条件不允许采用全局可行最优技术措施时，可以选取油田中可行的，但又尽可能靠近可行最优点的技术措施，作为现行的技术措施。现行措施下可能取得的钻进成本，决定于现行措施点所对应的等成本线。由图 9 中可以看出，等成本线之间的距离是不等的。愈远离可行最优点，等成本线密度加大，间距愈小。这指明远离可行最优点的措施点措施上的改进，将带来较大的经济效益。反之，接近可行最优点部位的措施点措施上的改进带来的经济效益是有限的。

由油田现行措施点出发，可以由图 9 上得到启示，朝那个方面改进措施，经济上的收益会是最大的，从而使钻井工作者明确技术革新的方向，千方百计创造条件，为实现可行最优措施而努力。

为了使组合截面等成本图能应用于现场生产实际，于1983年下半年在中原油田取得了一系列实际地层数据和钻头数据之后，绘制成该油田五个层位的组合截面等成本图（见图10~14）。

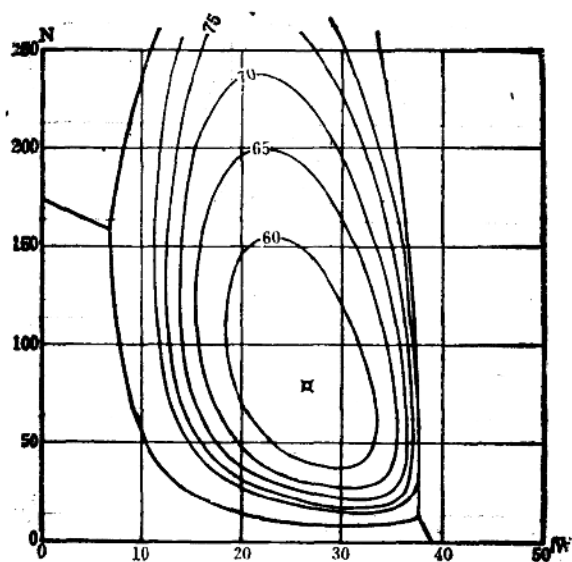


图10 东营组的组合截面等成本图

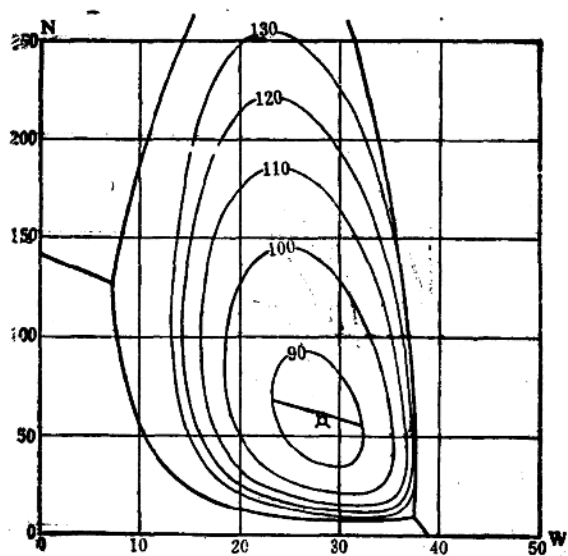


图11 沙一段的组合截面等成本图

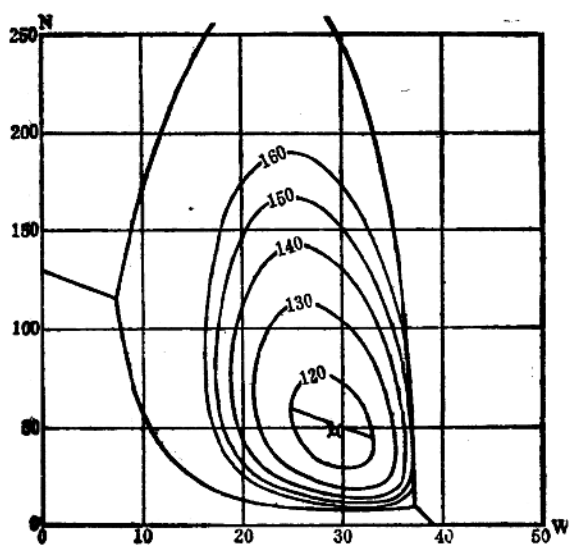


图12 沙二段下的组合截面等成本图

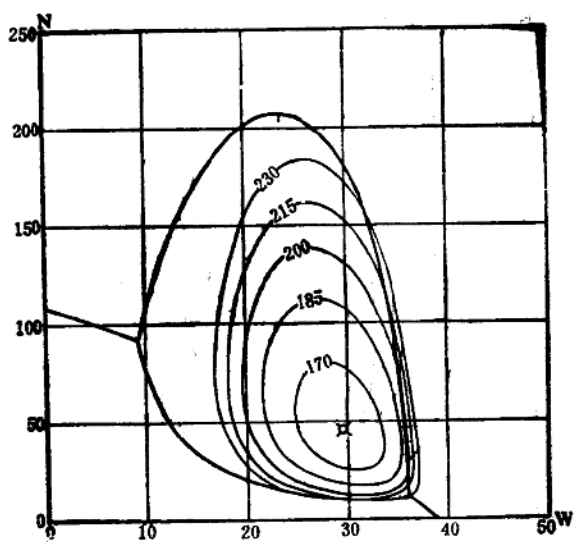


图13 沙二段下的组合截面等成本图

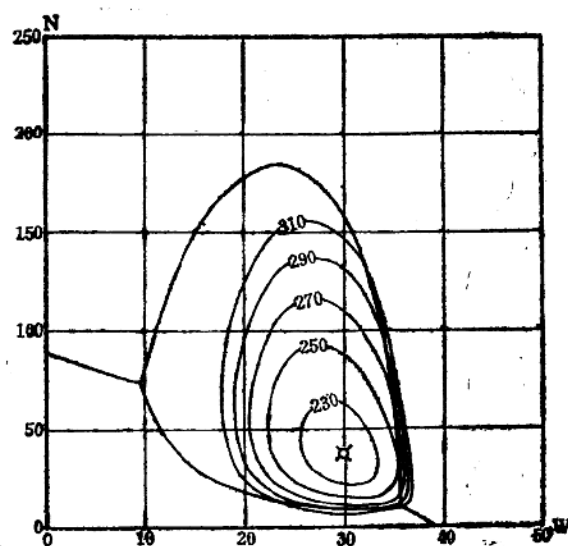


图14 沙三段的组合截面等成本图

这五个层位及其特征参数列于表1。

表1

地 层	井 段	研磨性系数 A_r	可钻性系数 K	门限钻压 M	转速指数 λ	压差影响系数 C_p	起下钻时间 T_r	备 注
东 营 组	1520—2210	0.5424	0.05253	2.5	0.74	0.629	15	
沙 一 段	2210—2580	0.7848	0.04319	4.6	0.695	0.75	18	
沙二段上	2580—2980	0.8935	0.04473	6.0	0.66	0.699	20	
沙二段下	2980—3230	1.1785	0.04040	7.1	0.63	0.679	22	
沙 三 段	3230—3500	1.5449	0.03858	7.85	0.615	0.657	25	

由图10~14中可以看出,中原油田上述五个层位若用引进的镶齿钻头钻进,钻头在井下的工作时间始终是由钻头轴承寿命决定的。根据这五张图上等成本线的分布,可以分析出现技术措施的最大经济效益及其改进方向。为钻井措施的制订和实施提供了理论依据。

结 论

1. 深入研究目标函数的各种特点,可以找出寻优部位,得出寻优方法。钻进目标函数的寻优部位,由全域最优点到到极限磨损面上的可行最优点;寻优方法,先用经典最优化方法,然后用拉格朗日乘法。
2. 目标函数的等值面族,揭示出钻进成本的分布规律,宏观上给出了钻进成本的变化趋势,为油田选用现行措施提供依据。
3. 组合截面等成本图,是三个剖切面在三个磨损区组合而成的等成本图。它标出了每一种技术措施所可能取得的最优经济指标,指出改善技术措施的方向,是预测技术中的重要资

料。

参 考 文 献

- 〔1〕 M.阿佛里耳著,《非线性规划分析与方法》,上海科学技术出版社,1979,10。
- 〔2〕 南京大学数学系计算数学专业编,《最优化方法》,科学出版社,1978,8。
- 〔3〕 M.R.SPIEGEL著,《高等数学的理论和习题》,上海科学技术出版社,1978,10。
- 〔4〕 郭学增著,《最优化钻井基础与计算》,石油工业部勘探开发培训中心教材,1982,8。
- 〔5〕 范鸣玉、张莹编,《最优化技术基础》,清华大学自动化系教材。