分 数

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新知識出版社

分　　数

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新知識出版社

一九五六年·上海

分　　　　　　　数

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

＊

新知識出版社出版
（上海湖南路9号）
上海市書刊出版業營業許可証出015号

中科藝文聯合厂印刷　新華書店上海發行所总經售

＊

开本：787×1092　1/32　印張：2 5/8　字数：59,000
1956年12月第1版　1956年12月第1次印刷
印数：1—100,000本

統一書号：13076·59
定　价：(7) 0.24元

序　言

本会为了学習苏联先進經驗，帮助教师積極提高教学質量，幷根据当前中学教学实际需要，决定着手編寫有关高、初中数学各科包括算術、代数、几何、三角教材內容的小册子，陸續分批出版，以提供中学数学教师作为進一步研究和了解教材的参考，从而更好地掌握教材的教学目的。同时，也可供高、初中学生作为課外鑽研的題材，以利更深刻理解教材內容。我們希望通过这一套小册子的出版，能使数学界同志对中学数学教材的研究得到廣泛的交流。

这本"分数"的小册子，是根据中学数学教学大綱修訂草案"量的度量"及"分数"編寫的。它先說明量的度量，明确分数的意义，再推出分数的基本性質及分数四則运算。在敍述时先从理論方面着手，再結合实踐導出法則，更說明数由整数擴張到分数的必要性幷建立它們的一致性。

本会在編寫本册前，曾拟就編寫計划，經編輯組討論，然后确定初步提綱，分別由黃公安、胡冠璵、尤彭莘三同志提供材料，而由范际平同志执筆寫成，再經程其襄、楊荣祥、黃公安、夏守岱諸同志校訂，最后由范际平同志作了修正。虽然这样，但由于我們水平有限，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正。

中國数学会上海分会中学数学研究委員会

1956年8月

目　　錄

一 量的度量

量的概念屬于原始概念，我們不替它下定义而只能用例子來說明它．在数学里面所研究的量有兩种：連續量和不連續量．像一班学生、一处森林、一羣鳥雀、一个教室里面的桌子，我們可以用数°数的方法來計算內中事物的个体，便是不連續量．但如果我們要計算教室里面一張桌子的長度，那就不是用数°数的方法可以办到；这种量便是連續量．同样，桌子的寬度、高度也都是連續量．又像面積、体積、重量、时間、角度、热量、濃度、比重、功、能、速度、电流強度和电压等等都是連續量．一般所謂量，是指連續量；所以往往把"連續"兩个字省去．我們要度量这些連續量，必須取一个本質和被量对象相同的东西做为度量單位．然后直接定出該被量对象容納多少倍單位．例如我們要度量布的長，可取一段布为度量單位，但实際上我們是用所制定的尺做度量單位的．因为这样不僅是便利而且可以獲得較清晰的結果．古时候人們是用肘的長或者成年人脚掌的長做尺的标准．但由于各人的手、足長短有明顯的差異，度量的結果自然是紛歧而不能使得人人滿意的，因而一个國家度量單位的标准制定是非常必要的．同时由于目前國际間往來頻繁，更需要建立起一种共同承認的不变的度量單位．我們曉得像温度的度量單位、电流度量單位、角度的度量單位，已經由科学家加以規定．对于日常生活最有关系的量便是度量衡．我們把測定东西的長短叫做度，測定东西的容量(或体積)叫做量，測定东西的輕重叫做衡．为了和十進位制發生联系才便于計算，目前國际上是采取法國的

米突制做为國际上的标准制。1889 年第一次國际度量衡全体会議上，規定了以現在保存在法國賽弗城的、用白金和鉱的合金制成的米原器做長度基本單位的标准器。这个基本單位的决定是先測定地球子午綫四分之一的長度，在 1795 年 4 月 7 日規定了地球子午綫的四分之一的千万分之一做为長度的基本單位，把它叫做米突或簡称为米，我們叫它为公尺。由于單有基本單位在日常使用仍然是不方便的，例如用公尺去度量上海到南京的距离，那就会覺得單位太小而不方便；又如用公尺去度量筆記本的長，也会感到單位太大而沒有办法去度量；所以需要制定有关的輔助單位，如下表。很自然地進率（較大的度量單位所含有比它小的度量單位的倍数）都是 10。

名　称	公　里（仟米）	公　引（佰米）	公　丈（什米）	公　尺（米）	公　寸（分米）	公　分（厘米）	公　厘（毫米）
縮　寫	Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm

这样一來，我們如果用公里去度量上海到南京的距离，用公厘去度量筆記本的長，那就很方便了。

我們取每边長是 1 公尺的正方形的面積做度量面積的基本單位，叫做平方公尺；取各稜長 1 公尺的正方体的体積做度量体積的基本單位，叫做立方公尺，取各稜長 1 公寸的正方体的体積的容量做度量容積的基本單位，叫做公升。比公升大的輔助單位有公斗、公石；比公升小的輔助單位有公合、公勺、公撮。進率都是 10。茲列表如下。（見下頁）

我們取容積等于稜長是 1 公分的正方体的純水，温度是攝氏 4 度在眞空中的重量做度量重量的基本單位，叫做公分。比

名　称	公　石（百升）	公　斗（十升）	公　升	公　合（分升）	公　勺（厘升）	公　撮（毫升）
縮　寫	*Hl*	*Dl*	*l*	*dl*	*cl*	*ml*

公分大的輔助單位有公錢、公兩、公斤；比公分小的輔助單位有公厘、公毫、公絲。進率都是10。比公斤大的輔助單位有公担，1公担等于100公斤。还有公噸，1公噸等于1000公斤。玆列表如下。

名　称	公　斤（千克）	公　兩（百克）	公　錢（十克）	公　分（克）	公　厘（分克）	公　毫（厘克）	公　絲（毫克）
縮　寫	*Kg*	*Hg*	*Dg*	*g*	*dg*	*cg*	*mg*

我國度量衡过去也極不統一。目前所采用的市用制度量衡是根据上面所述的公制度量衡和我國人民沿用下來的度量衡制度而制定出來的。市用制度量容量的基本單位是升，1升等于1公升；度量重量的基本單位是斤，2斤等于1公斤；度量長度的基本單位是尺，3尺等于1公尺。所以和公制的关联是1,2,3关系。玆列表如下。表中除1斤等于16兩外，進率都是10。

長　度　表	引	丈	尺	寸	分	厘
容　量　表	石	斗	升	合	勺	撮
重　量　表	斤	兩	錢	分	厘	毫

普通度量距离时常用尺，但度量公路上的路程，便需要較大

的長度單位——里．由于1里等于15引，所以1里等于150丈．度量容量时，普通常用升或斗．但在農村中計算粮食的收穫和种子的数量过去常用石，目前都改用斤，1斤等于16兩．而政府計算全國粮食的產量則用噸，1噸等于1公噸．由于1公噸等于1000公斤，1公斤等于2斤，所以1噸等于2000斤．又度量重量时，普通常用斤．但在火車上的載运貨物常用噸．度量面積时常用平方尺（卽每边長1尺的正方形面積）．較大的輔助單位有平方丈；較小的輔助單位有平方寸、平方分．由于这些單位里的每个單位都包含100个和它相鄰的較小的單位，所以進率都是100．但对于度量土地播种面積則用畝，一畝等于60平方丈．較大的輔助單位是頃，1頃等于100畝．較小的輔助單位有分、厘，進率都是10．度量体積时常用立方尺（卽長、寬、高各1尺的正方体的体積）．較大的輔助單位有立方丈；較小的輔助單位有立方寸、立方分．由于这些單位里的每个單位，都包含1000个和它相鄰的較小的單位，所以進率都是1000．

上面所講的度量是已知量和度量單位直接相比較，这种度量方式叫做直接度量．但我們度量三角形的面積，并不是用面積的度量單位來度量它的面積，乃是用長度的度量單位去度量它的底和高的長度，再根据已經确定的三角形面積公式將所得的兩数相乘而取其積的一半，便是三角形的面積．这种度量的方式叫做間接度量．我們曉得物理学上的量，大都不能直接度量而用所确定的公式施以間接度量獲得．

很明顯地在度量的結果，得出一个数，它表示一已知量所含度量單位的倍数，这个数叫做該量的数値．

我們对于同类量可以建立下面的相等、不等、和及差的定义．

如果兩个同类量用同一度量單位去度量．則

1．相等的量的数値用相等的数來表示。

2. 較大的量的数值用較大的数來表示。

3. 較小的量的数值用較小的数來表示。

4. 兩个量的和的数值等于它們各个数值的和。

5. 兩个量的差的数值等于它們各个数值的差。

这样一來，量与量間的关系变成了它們数值間的关系．我們对于量的本身只可做加和減运算而不能做乘法运算。例如兩个重量相乘，便沒有意义。但由于我們对于量的数值，好像对于数一样，应当可以進行各种运算。例如 $\triangle ABC$，如 $\angle C<90°$，則 $c^2=a^2+b^2-2ap$．（如圖 1）

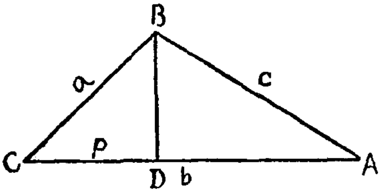

圖 1

式中文字 a,b,c,p 并不表示量（綫段），也不表示三角形的边和 a 边在 b 边上的投影；而只是表示它們用同一長度單位來度量所得出的数值。那末量的数值進入公式，也就是說進入了研究数的性質及其运算的算術范圍內。这就充分反映数学抽象性的重要。我們更要注意相等、不等、和及差的定义只是对同类量而言，对于不同类量是不可能比較的。例如我們是沒有方法可以比較長度和重量的。

量的数值后面附有度量單位名称的，叫做名数．如果名数只是由一个名称的單位所組成叫做單名数，例如 5 尺、3 升、7 斤；如果名数是由不同名称的單位所組成叫做复名数，例如 2 尺 7 寸 5 分、3 斗 9 升、8 斤 10 兩；又如果兩个名数表示同一个量的时候，我們認为它們相等，例如由于 2 尺 7 寸 5 分和 275 分表示同一个長度，所以这兩个名数被認为相等。

除了上面所講的量的度量，时間也是構成宇宙的主要的量。时間的基本單位是太陽日或回归年。一太陽日表示地球繞它自

已的軸自轉一次的时間。1日等于24小时，1时等于60分，1分等于60秒。一回归年表示地球繞太陽公轉一次的时間。1年是365日5时48分46秒。通常1年是365日，每年少算5时48分46秒，四年少算23时15分4秒，大概是一天，所以每隔四年在二月里添一天，叫做閏年。但这样又多算了44分56秒，在400年內本來应当是100个閏年，这样多算了3天2时53分20秒，所以400年內应当去掉三个閏年。由于我們所用的公曆是从耶穌誕生的时候为曆法的开始，所以公元年数能被4整除的那一年都是閏年。例如1948年、1956年、1964年等。又如公元年数是100的倍数（能被4整除），只有能被400整除的那一年才是閏年。例如1600年，2000年等都是閏年。而1700年、1800年、1900年等都不是閏年；那就都叫做平年。时間的輔助單位有世紀、月、周等。1世紀等于100年，1年等于12月，1周等于7天。

計算时間的問題可分为下面所述的三类：

1. 已知前一个事件發生的时候及兩个事件中間相隔的时候，要求后一事件發生的時候，是用加法求解。

例 某学生于1952年8月29日入学，經过5年9个月15天后畢業，該生在何时畢業？

解 从紀元开始到1952年8月29日已經过了1951年7月28日。再利用加法，布式如下：

1951年	7月	28日
+）5年	9月	15日
1956年	16月	43日
+ 1年	+ 1月	−31日
1957年	17月	12日
	−12月	
	5月	

43 日大于一个月的天数，5 月是 31 天，所以 43 日－31 日＝12 日。因得該生畢業时从紀元开始已經过去了 1957 年 5 月 12 日，那末他畢業日期是 1958 年 6 月 13 日。

2. 已知后一个事件發生的时候及两个事件中間相隔的时候，要求前一事件發生的时候，是用減法求解。

例 俄國大文学家涅克拉索夫逝世于 1878 年 1 月 8 日，他活了 56 年 1 个月零 5 天。求他誕生的日期。

解 从紀元开始到 1878 年 1 月 8 日，已經过了 1877 年零 7 日。再利用減法，布式如下：

	1877年	0月	7日
−)	56年	1月	5日
	1820年	11月	2日

那就是說从紀元开始到涅克拉索夫誕生那天，已經过了 1820 年 11 月 2 日。所以涅克拉索夫誕生的那天是 1821 年 12 月 3 日。

3. 已知两个事件各个發生的时候，求这两个事件中間相隔的时候，用減法求解。

例 苏沃罗夫誕生于 1730 年 12 月 13 日，逝世于 1800 年 5 月 6 日。問他活了多少时候。

解 从紀元开始到苏沃罗夫逝世那天，已經过了 1799 年 4 月 5 日，到苏沃罗夫誕生那天已經过了 1729 年 11 月 12 日。再利用減法，布式如下：

	1799年	4月	5日
−)	1729年	11月	12日
	69年	4月	23日

为了能够減去 12 日，向月上借一月，因为一月是 30 日，得 30 日＋5 日＝35 日；而 35 日－12 日＝23 日。

为了能够减去11月，向年上借一年，因为一年是12月，得12月+3月=15月；而15月-11月=4月。
1798年-1729年=69年．所以苏沃罗夫活了69年4月23日．

我們曉得在物理学中常常需要利用复合的度量單位來度量某种量．例如抽水机將5200仟克的水汲到6米高的地方，所做的功是用仟克数与米数的乘積來度量，即所做的功是31200仟克米．又如汽車載运4噸的貨物行150公里所做的功是600噸公里．在社会主义的建設中，采用的工作日和劳动日都是复合單位．例如12个人在7天內可掘出一个盆地，我們定义人数与天数乘積为工作日；那末这个工程便需要84工作日．又如農業生產合作社中社員的报酬是按劳动日支付的，我們定义一个人在一天內所做的工为一个劳动日；那末如果一个社員在一年內做了342个劳动日，就是說他做的工等于342个人一天所做的工，或者等于1个人做342天的工．

二　分数的意义及其性質

讓我們用長度基本單位——尺去度量黑板的長。如果量得五次后，还得到比一尺小的剩余，那末我們將尺分为10等分再用尺所分的等分——即輔助單位寸去量黑板的剩余部分。假如剛好量得7次，則黑板長度是5尺7寸。我們曉得用尺去量黑板的剩余部分，恰巧是尺的十分之一的7倍，而不是尺的整数倍数。那就是黑板的剩余部分如果用尺去度量不会是整数倍数；如果用尺的十分之一去量恰是7倍。我們說剩余部分是$\frac{7}{10}$尺，而$\frac{7}{10}$叫做分数。

一般說起來，量A如果用度量單位B去度量，如果不是整数倍数时，度量的結果便不能用整数來表示。我們便把B分为n等分，取其中一等分做度量單位而去量它的剩余部分。假如剛好量m次量尽了，那末量A的剩余部分的度量結果用$\frac{m}{n}$來表示所產生的新数；这新数叫做分数，数m叫做分子而数n叫做分母。

从上面定义我們曉得分数$\frac{3}{4}$是將整体1分为4等分而取3等分的意思。但我們还可以从另一方面去了解它。为着把3个重量相同的蘋果平分給4个兒童，可以將每一个蘋果分成相等4个部分，而每个兒童剛好拿每一个蘋果所分成的一部分。这样一來，每个兒童就会獲得一个蘋果的$\frac{3}{4}$。所以分数$\frac{3}{4}$不僅是一个單位的四分之三也是三个單位的四分之一份。那就是說**分数可以看做是兩个自然数相除（分子除以分母）而不能整除时的商**。因而我們要注意分数的分母是决不能为零的。我們更体会

当量的度量和数的除法在自然数集合中不能实施的时候，为了保証它們实施的可能性，就必須再擴大数的范圍而引出分数。所以分数產生后，才解决了不能整除的情况．即兩自然数相除，除得尽其商仍是自然数，除不尽其商是分数．因而我們对于倍数概念也由整数而擴充到分数．例如我們説 A 是 B 的 $\frac{3}{2}$ 倍，意思是 $\frac{A}{B}=\frac{3}{2}$.

为了从理論上建立分数的性質而導出分数的运算，讓我們首先定义分数 $\frac{m_1}{n_1}$ 大于、小于或等于分数 $\frac{m_2}{n_2}$ 是各决定于

$$m_1n_2>m_2n_1,\quad m_1n_2<m_2n_1,\quad m_1n_2=m_2n_1.$$

例如　由于　$3\times 20=15\times 4$,

$\therefore$　$\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$.

由于　$5\times 4>3\times 6$,

$\therefore$　$\frac{5}{6}>\frac{3}{4}$.

由于　$4\times 41<5\times 33$,

$\therefore$　$\frac{4}{33}<\frac{5}{41}$.

从这个定义我們即可推出分数的基本性質．即

分数的分子和分母如同时擴大（或縮小）相同的倍数，分数的值不变．（此处指自然数倍）

即設分数 $\frac{m}{n}$，k 为自然数，则

$$\frac{m}{n}=\frac{mk}{nk},$$

且　$\frac{m}{n}=\frac{m\div k}{n\div k}$（$m\div k$，$n\div k$ 都是可以整除情况）

証　$\because$　$m(nk)=(mk)n$,（乘法交换律与結合律）

$$\therefore \qquad \frac{m}{n}=\frac{mk}{nk}.$$

$$\text{又} \quad \because \qquad \frac{m\div k}{n\div k}=\frac{(m\div k)\times k}{(n\div k)\times k}=\frac{m}{n},$$

故得証明.

这个基本性質可用下列圖象而帮助学生直观認識.(圖 2)

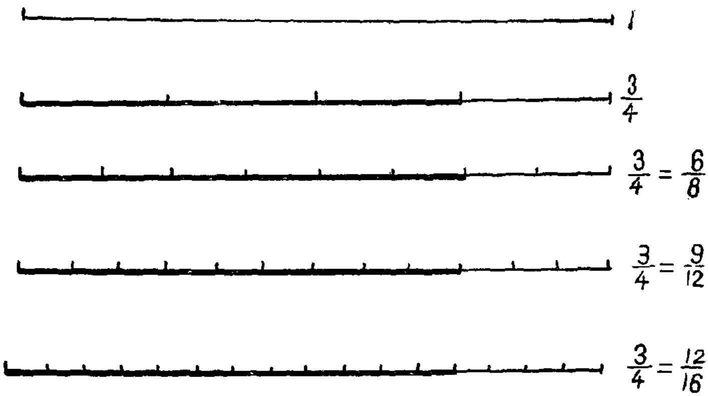

圖 2

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\cdots\cdots,$$

$$\text{即} \qquad \frac{3}{4}=\frac{3\times2}{4\times2}=\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{3\times4}{4\times4}=\cdots\cdots.$$

我們更可推得**如兩个分数的分母相同,則分子大的分数也大.** 即

$$\text{如} \qquad m>m_1, \quad \text{則} \quad \frac{m}{n}>\frac{m_1}{n}.$$

$$\because \qquad m>m_1, \quad \text{則} \quad m\times n>m_1\times n,$$

$$\therefore \qquad \frac{m}{n}>\frac{m_1}{n}.$$

八乙

例如 $$\frac{11}{18}>\frac{5}{18}.$$

又如**两个分数的分子相同，則分母小的分数大。**

卽如 $$n<n_1,\quad 則\quad \frac{m}{n}>\frac{m}{n_1}.$$

$$\because\qquad n<n_1,\quad 則\quad m\times n<m\times n_1,$$

$$\therefore\qquad \frac{m}{n_1}<\frac{m}{n}\quad 卽\quad \frac{m}{n}>\frac{m}{n_1}.$$

例如 $$\frac{3}{8}>\frac{3}{17}.$$

我們更可推得**如果分数的分子擴大（或縮小）若干倍，分母不变，那末分数的值擴大（或縮小）同样的倍数。**（此处指自然数倍）

$$\because\qquad km>m,$$

$$\therefore\qquad \frac{km}{n}>\frac{m}{n}.$$

且两个分数都是等分为 n 等分，現在所取等分的部分較原來擴大 k 倍，所以分数的值也擴大 k 倍。例如將分数 $\frac{3}{16}$ 的分子擴大 5 倍得 $\frac{15}{16}$，而 $\frac{15}{16}$ 較 $\frac{3}{15}$ 擴大 5 倍。如圖 3。

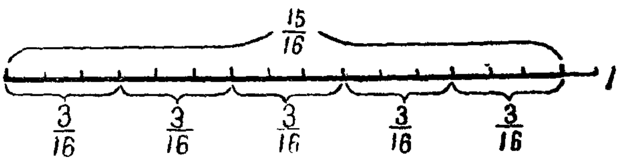

圖 3

同样可推得如果分数的分子縮小 k 倍，分母不变，那末分数的值也縮小 k 倍。

又如**分数的分母擴大（或縮小）若干倍，分子不变，那末分数**