概率与随机过程习题集

下册　　随机过程

成都电訊工程学院702教研室编譯

中国人民解放军空军第二高射炮兵学院印

内　容　简　介

本书依据〔美〕H·Van Trees教授为麻省理工学院高级工程研究中心编写的《概率论及随机过程学习指导》一书编译而成，内容共分基本概率论，随机变量，统计平均，极限定理与统计学，随机过程引言，二阶矩理论，泊松过程，马尔柯夫过程，高斯过程以及过程特性的测量等十个单元。内容丰富，取材新颖，既注重基本理论的阐述，又密切联系通讯、雷达、导航、信号检测及参量估计、系统可靠性、质量管理等工程技术领域的问题。在编排顺序上也很讲究，便于自学。

本书是1980年7月四机部在成都电讯工程学院召开的《统计无线电技术》教材审稿会上推荐的教学参考书，也适于从事上述各领域的高等学校教师、高年级学生及工程技术人员阅读。

该书是下册随机过程，内容包括后六个单元。

概率与随机过程习题集

下册　随机过程

*　　*　　*

编译者：成都电讯工程学院702教研室

校对者：空军第二高射炮兵学院126教研室

开本：787×1092　1/16　页数：293　字数：48万　册数：5000

*　　*　　*

印刷：空军第二高射炮兵学院印刷所

一九八一年十月印刷

内部发行　工本费：2.50元

目　　录

第一单元　随机过程引言

1.1课　随机过程的基本概念和定义

例题　考虑离散时间一维对称随机游动过程Y_n，其中 $Y_0=0$ 和$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，这里X_i是一个取（+1，−1）值的贝努利随机变量。因此，

$$P[X_i=+1]=P[X_i=-1]=\frac{1}{2}$$

并且X_i是统计独立的。

1．画出一典型的样本函数。

2．求$P[Y_1]$和$P[Y_2]$。

3．求n的函数$P[Y_n]$。

解　1．一个典型的样本函数表示如下

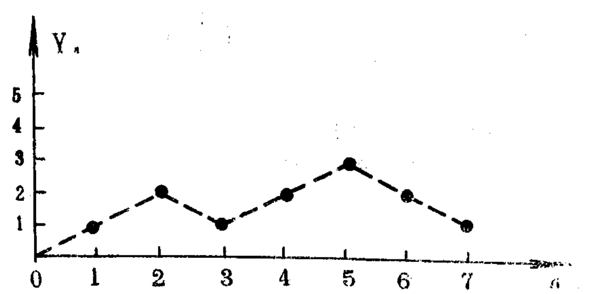

图　1、2、1

虚线是为了便于图解，下标n是整数的集合（*index　set*）。

2．根据Y_n的定义

$$P[Y_1=1]=P[X_1=1]=\frac{1}{2}$$

和

$$P[Y_1=-1]=P[X_1=-1]=\frac{1}{2}$$

当$n=2$时，Y_n可以等于2，0，或−2

$$P[Y_2=+2]=P[X_1=1\text{和}X_2=1]=P[X_1=1]P[X_2=1]=\frac{1}{4}$$

$$P[Y_2=0]=P[(X_1=1\text{和}X_2=-1)\text{或}(X_1=-1\text{和}X_2=1)]$$

$$=P[X_1=1]P[X_2=-1]+P[X_1=-1]P[X_2=1]$$

$$=\frac{1}{2}$$

同样地 $$P[Y_2=-2]=\frac{1}{4}$$

3．对于任意的n，应用特征函数求概率分布也许是最容易的。

$$\Phi_X(v)=\frac{1}{2}e^{jv}+\frac{1}{2}e^{-jv}$$

因为Y_n是统计独立的随机变量之和，故

$$\Phi_{Y_n}(v)=(e^{jv}+e^{-jv})^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{j(n-k)v}\cdot e^{-jkv}$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{j(n-2k)v}$$

对应的概率分布是

$$P[Y_n=n-2k]=\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{2^n},\qquad k=0,\ 1,\ \cdots\cdots n$$

如果需要，上式也可写为

$$P[Y_n=j]=\frac{n!}{\left(\frac{n-j}{2}\right)!\left(\frac{n+j}{2}\right)!}\cdot\frac{1}{2^n}\qquad j=-n,\ -n+2,\ \cdots\cdots,\ +n$$

习　　题

1·1·1　考虑例题中描述的离散一维随机游动。现在假定

$$P[X_j=1]=p\text{和}P[X_j=-1]=q$$

其中，X_j是统计独立的。

1．求n的函数$P[Y_n]$。

2．求n的函数$E[Y_n]$。

3．求n的函数$V_{ar}[Y_n]$，并解释2、3小题结果的含义。

1·1·2　在本题中我们描述一个简单的通讯系统，每隔T秒，信号源输出的大小为均匀分布的随机变量X，即

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{T}, & 0\leqslant x\leqslant T\\ 0, & 其它\end{cases}$$

不同间隔内这些值是统计独立的。为了在整个讯道上传输信号源的输出信号，我们传输一个这样的脉冲，其宽度等于该随机变量值。一个典型的样本函数表示如下

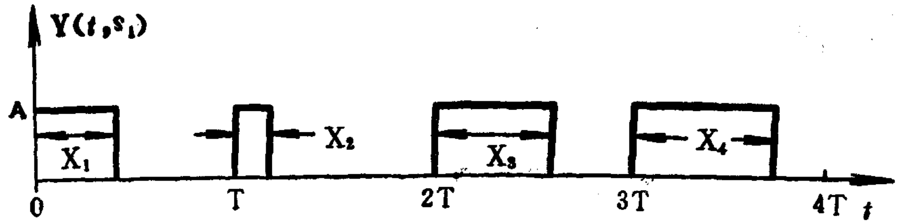

图 1、2、2

注意，下标的集合是$t>0$的全部，因此这个过程是一个连续随机过程。这种类型的信号称为脉冲宽度调制信号（PDM）

求$Y(t, s)$的概率密度$f_{Y_t}(y)$，它是时间的函数。

1·1·3　上题已考虑了概率密度（或分布）为时间的函数。在本题中我们考虑一个不同类型的问题。

在终点站有两辆相互竞争的空汽车在等候着。从$t=1$开始，每秒有一个乘客到达终点站，他上汽车A的概率为$\frac{1}{2}$，上汽车B的概率也为$\frac{1}{2}$，各个乘客的决定是独立的。因此在汽车A上的乘客数是一个二项计数过程（*binomial counting process*）

$$Y_n=\sum_{j=1}^{n}X_j,\qquad Y_0=0及P[X_j=1]=P[X_j=0]=\frac{1}{2}$$

其中X_j是统计独立的。

1．求n的函数Y_n的概率分布$P[Y_n]$。

2．汽车A只要有10个乘客就开走，例如，如果$Y_{21}=9$和$Y_{22}=10$，汽车A将在$t=22$时开走，求汽车A离开时间的概率分布。

1·1·4　在例题和习题1·1·1中所讨论的离散随机游动中，步长X_j被看作为离散随机变量，考虑X_j是统计独立的高斯随机变量$N(0, \sigma)$的情况，这样

$$f_{X_j}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

随机游动过程是$Y_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$，注意，它有一个离散的下标集合（*discrete index set*），但它的幅度是一个连续的随机变量。

1．求n的函数$f_{Y_n}(y)$。

2．求$E[Y_n]$和$V_{ar}[Y_n]$。

3．求n和m的函数的联合密度$f_{Y_nY_m}(y_n, y_m)$。

1·1·5　对题1·1·2所描述的通信系统作如下变动，为了传输信号源的输出，我们传输一个位置与信号的输出值成比例的脉冲，这个信号源的输出是一个随机变量，其概率密度$f_{X_i}(x)$在间隔$\left(0,\ \frac{5T}{6}\right)$之外为0，一个典型的样本函数表示如下

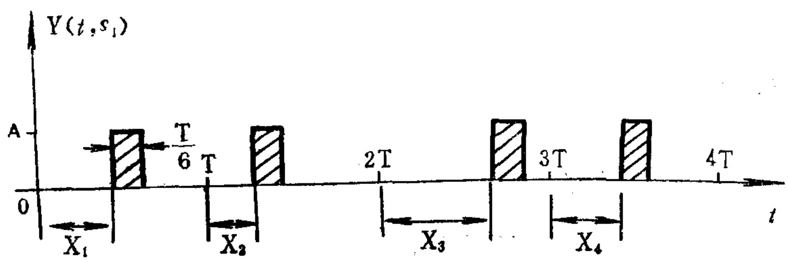

图 1、2、3

第j个脉冲的开始时间是X_j，脉冲宽度为$\frac{T}{6}$，因此决不会出现重叠。如前所述，在不同间隔的值是统计独立的，这种类型的信号称为脉冲位置调制（PPM）信号。

1．求作为时间函数的Y（t，s）的概率密度$f_{Y_t}(y)$。

2．将1小题的结果用于以下特殊情况

$$f_{X_j}(x)=\begin{cases}\frac{6}{5T}, & 0\leqslant x\leqslant \frac{5T}{6}\\ 0, & 其它\end{cases}$$

1·2课　恒定形式的随机过程

例题　考虑正弦波过程$\{x_t,\ 0\leqslant t\}$，对于t在〔0，$+\infty$〕范围内，

$$X_t=V\cos\omega t，其中\omega是常数$$

注意，所有的样本函数有相同的相位。假设幅度V是一个均匀分布的随机变量，可描述为

$$f_V(v)=\begin{cases}1, & 0\leqslant v\leqslant 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

1．画出这个过程的几个样本函数的图形。

2．确定随机变量X_t的概率密度，并当$t=0$，$\frac{\pi}{4\omega}$，$\frac{3\pi}{4\omega}$，$\frac{\pi}{\omega}$时画出它的曲线。

提示　记住$\cos\omega t$对于一个固定的t值，恰好是一个数。

3．当$t=\frac{\pi}{2\omega}$时，X_t的概率密度是什么？

提示　首先考虑概率分布函数。

解　这个过程是$X_t=V\cos\omega t$，其中V是随机变量，具有概率密度

$$f_V(v)=\begin{cases}1, & 0\leqslant v\leqslant 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

1. 我们可以画出这个过程的样本函数，对于$V=\frac{2}{3}$，我们有$X_t=\frac{2}{3}\cos\omega t$

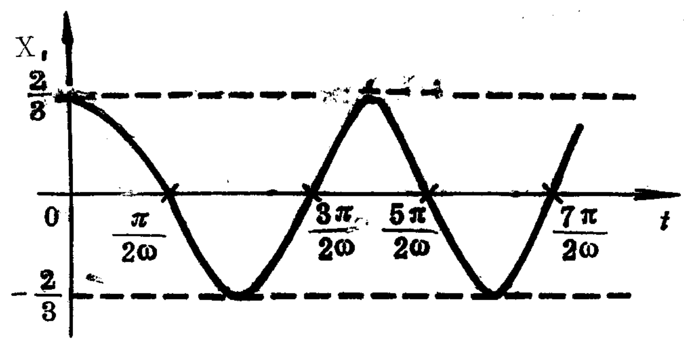

图 1、3、1

对于$V=0$，我们有$X_t=0\cos\omega t=0$

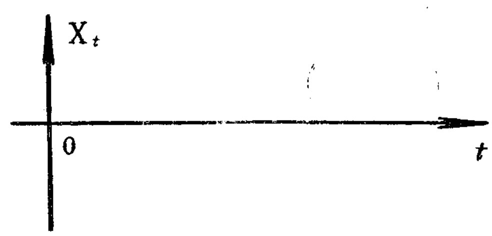

图 1、3、2

对于$V=1$，我们有$X_t=\cos\omega t$

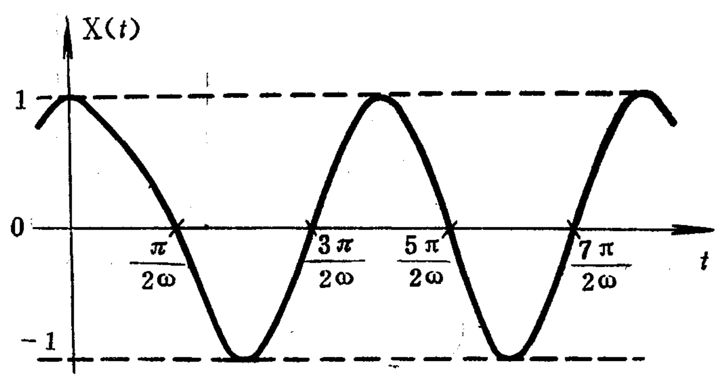

图 1、3、3

2. 对于$t=0$，$X_t=V\cos(\omega\cdot 0)=V\cos 0=V$，因此

$$f_{X_t}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

见图 1、3、4

对于 $t=\frac{\pi}{4\omega}$，$X_t=V\cos\left(\omega\cdot\frac{\pi}{4\omega}\right)=V\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}V$，因此，当V从0变到1时，$X_t$ 必须从0变到 $\frac{1}{\sqrt{2}}$。因为V是均匀分布的，所以 X_t 也是均匀分布的。因此

$$f_{X_t}(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

见图 1、3、5

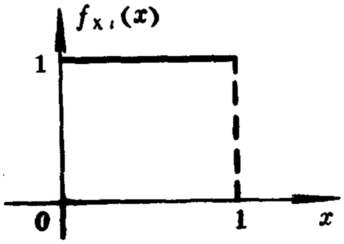

图 1、3、4

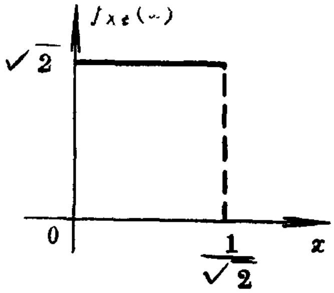

图 1、3、5

对于 $t=\frac{3\pi}{4\omega}$，$X_t=V\cos\left(\omega\cdot\frac{3\pi}{4\omega}\right)=V\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}V$，因此，(见图1、3、6)。

$$f_{X_t}(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

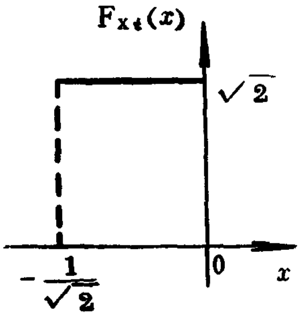

图 1、3、6

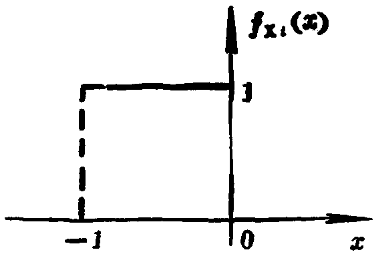

图 1、3、7

最后，对于 $t=\frac{\pi}{\omega}$，$X_t=V\cos\left(\omega\cdot\frac{\pi}{\omega}\right)=V\cos\pi=-V$，因此，(见图1、3、7)

$$f_{X_t}(x)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

3．对于 $t=\frac{\pi}{2\omega}$，$X_t=V\cos\left(\omega\cdot\frac{\pi}{2\omega}\right)=V\cos\frac{\pi}{2}=0$，因此，不论V值的大小，对于 $t=\frac{\pi}{2\omega}$，X_t 值总为零。因此，X_t 的概率分布函数是一个在 $x=0$ 处阶跃的简单阶跃函

数，X_t的概率密度函数是个在$x=0$处的冲激。

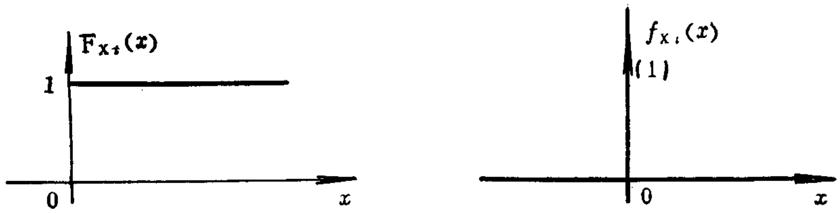

图 1、3、8

习　　题

1·2·1　考虑一个其样本函数是由周期性“锯齿”波组成的随机过程。两个典型的样本函数表示如下：

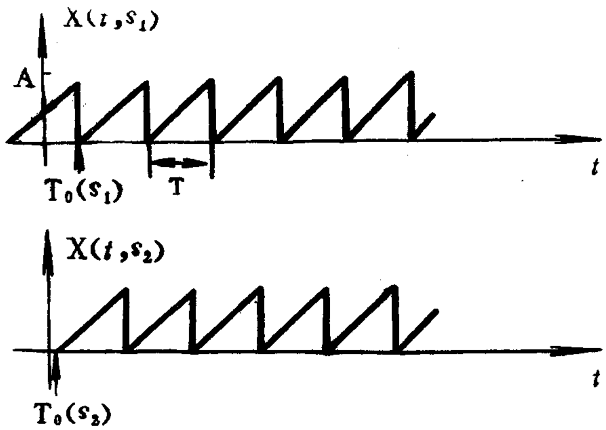

图 1、3、9

每一个样本函数都有相同的形状，但它们的参考时间不同，我们定义$t=0$以后的零值点为T_0，假定T_0是均匀随机变量，

$$f_{T_0}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{T}, & 0\leqslant t\leqslant T\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

1．求$X(t,s)$的概率密度$f_{X_t}(x)$，$X(t,s)$是时间的函数。

2．$X(t,s)$是一阶平稳吗？

1·2·2　考虑随机过程

$$Y_t\cong X\cos\omega t-Z\sin\omega t,\quad -\infty<t<\infty$$

其中X和Z是统计独立、同分布的零均值高斯随机变量$N(o,\sigma)$，ω是常量。

1．写出$Y_t=V\cos(\omega t+\Phi)$，$-\infty<t<\infty$，求$f_V(v)$，$f_\Phi(\varphi)$和$f_{V\Phi}(v\cdot\varphi)$。V和Φ是统计独立的吗？

2．画出一个典型的样本函数。

3．求Y_t的概率密度$f_{Y_t}(y)$，（Y_t为时间的函数），Y_t是一阶平稳吗？

1·2·3　考虑习题 1·2·1 中的锯齿波随机过程，现作以下修改，每一个脉冲具

有图1.3.10表示的形状，

现在A值是麦克斯韦尔随机变量，其概率密度为

$$f_A(z)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{\alpha^3\sqrt{\pi}}z^2exp\left(-\dfrac{z^2}{2\alpha^2}\right), & z\geqslant 0\\ 0, & z<0\end{cases}$$

对于不同的脉冲，A的值是独立的。一个典型的样本函数如图1.3.11所示

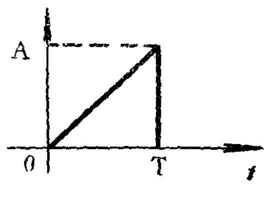

图 1、3、10

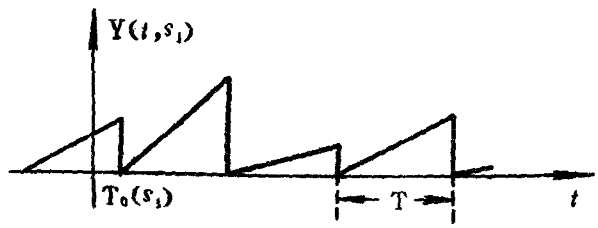

图 1、3、11

1. 你所描述的Y(t, s)是一个恒定形式（*fixed-form Process*）过程吗？
2. 求Y(t, s)的概率密度$f_{Y_t}(y)$。（Y(t,s)是时间的函数）
3. Y(t·s)是一阶平稳吗？

1·2·4 考虑以下的正弦波过程

$$Y(t,s)=A(s)\sin(\Omega(s)t+\Phi(s))$$

其中

$$f_A(a)=\begin{cases}\dfrac{2a}{A_0^2}, & 0\leqslant a\leqslant A_0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_\Omega(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{100}, & 250<\omega<350\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_\Phi(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0<\varphi<2\pi\\ 0, & 其它\end{cases}$$

1. 尽可能利用你以前得到的结果，求作为时间函数的概率密度$f_{Y_t}(y)$
2. Y(t, s)是一阶平稳吗？

1·3課　二元传輸波形

例題　考虑下面的通讯系统，每隔T秒信号源输出的大小为高斯随机变量X，N(o,σ)。不同间隔的值是统计独立的，为了在一个通讯信道上传输信号源的输出，我们传输一个振幅等于随机变量值的脉冲，一个典型的样本函数表示如下

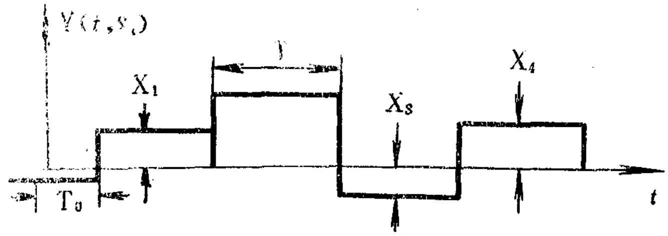

图 1、4、1

电平变化的起始时间由均匀随机变量T_0, $U(o,T)$来描述，它与振幅的变化是统计独立的，这种类型的信号称为脉冲幅度调制信号（PAM）。

1．求联合二阶密度函数$f_{Y_{t_1}Y_{t_2}}(y_1,\ y_2)$。

2．过程是二阶狭义平稳过程吗？

解 1．分两种情况来解本题，

(a) 如果$|t_1-t_2|>T$，在每个样本函数中将出现交叉，因此，

$$f_{Y_{t_1}Y_{t_2}}(y_1,\ y_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\ exp\left(-\frac{y_1{}^2+y_2{}^2}{2\sigma^2}\right),\quad |t_1-t_2|>T \qquad (1)$$

(b) 如果$|t_1-t_2|<T$，在某些样本函数中将出现交叉，设A表示"在$(t_1,\ t_2)$内交叉"则

$$f_{Y_{t_1}Y_{t_2}}(y_1,y_2)=f_{Y_{t_1}Y_{t_2}|A}(y_1,y_2|A)P(A)+f_{Y_{t_1}Y_{t_2}|A^c}(y_1,y_2|A^c)P(A^c)$$

与讲义中一样， $P(A)=\frac{(t_1-t_2)}{T}$和$P(A^c)=1-\frac{(t_1-t_2)}{T}$，因为"交叉时间"变量$T_0$是均匀分布的，如果存在一个交叉，则$Y_{t_1}$和$Y_{t_2}$是统计独立的，如果不存在交叉，则$Y_{t_1}=Y_{t_2}$，因此

$$f_{Y_{t_1}Y_{t_2}}(y_1,\ y_2)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}exp(-\frac{y_1{}^2+y_2{}^2}{2\sigma^2})\right)\frac{|t_1-t_2|}{T}$$

$$+\left(\frac{\delta(y_1-y_2)}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}exp(-\frac{y_1^2}{2\sigma^2})\right)\left(1-\frac{|t_1-t_2|}{T}\right),$$

$$|t_1-t_2|\leqslant T \qquad (2)$$

（1）和（2）的结果完全规定了联合概率密度，注意，Y_{t_1}和Y_{t_2}是高斯的，但它们不是联合高斯的。

2．因为二阶概率密度不单独地依赖于t_1和t_2，而仅依赖于t_1-t_2的差，所以该过程是狭义二阶平稳过程。

注意，在我们所讨论的随机过程模型中，只要包括了一个均匀随机"开始"时间，这个过程就是各阶狭义平稳的，这是因为随机开始时间消除了时间轴原点的影响，而仅使相对时间变得重要了。

习　　题

1·3·1　让我们考虑一个二元传输波形，在实际中也会遇到它的一个简单推广，即

4 一电平波形，一些简单的样本函数表示如下

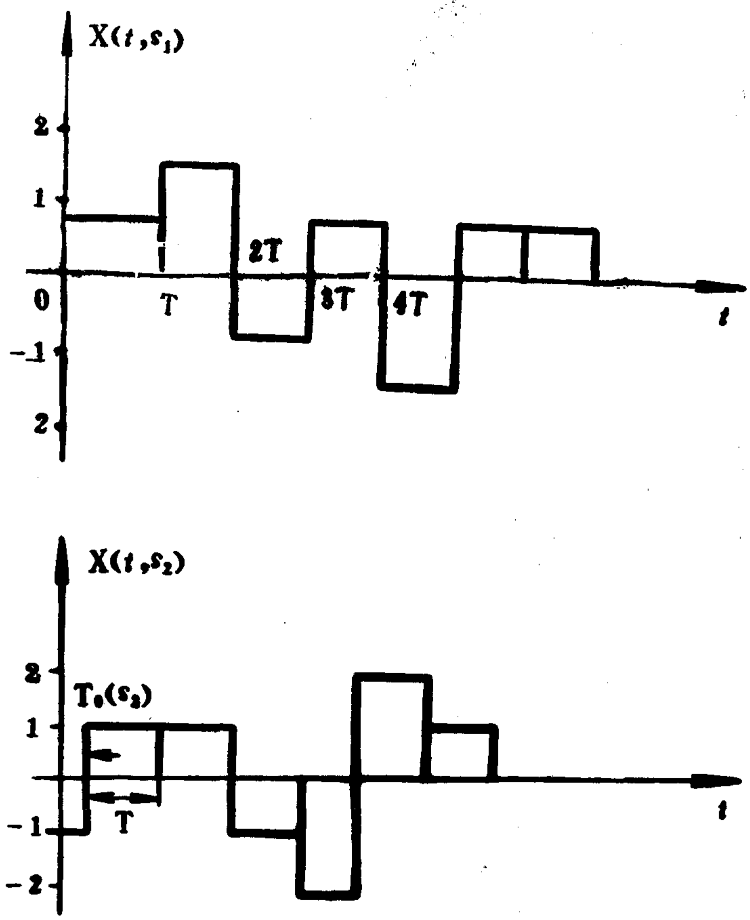

图 1、4、2

波形是由宽度为T的脉冲组成，每个脉冲的幅度是离散随机变量Y的值，

$$P(Y=2)=P(Y=1)=P(Y=-1)=P(Y=-2)=\frac{1}{4}$$

不同间隔内的值是统计独立的，脉冲参考时间是均匀分布在（0，T）上的随机变量T_0。

1．求二阶联合密度函数$f_{Y_{t_1}Y_{t_2}}(y_1, y_2)$ 。

2．此过程是二阶狭义平稳过程吗？

1·3·2 在一个系统中，基本波形是如下表示的周期性函数，记录装置引进两个效应

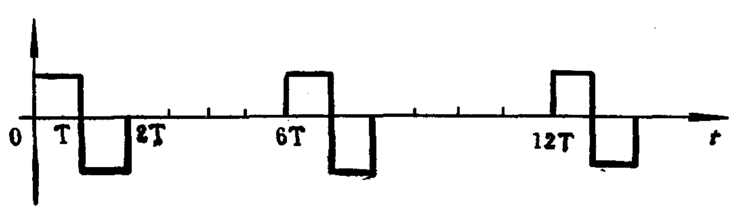

图 1、4、3

（i）一个随机移动的时间，其能够模拟成一个均匀随机变量U（0，6T）。

(ii) 一个随机"消除"，记录一个特定脉冲的概率是（1－p）。这个"消除"脉冲是统计独立的，这样，在记录器的输出端一个典型的样本函数是求一阶密度函数 $f_{X_t}(x)$。

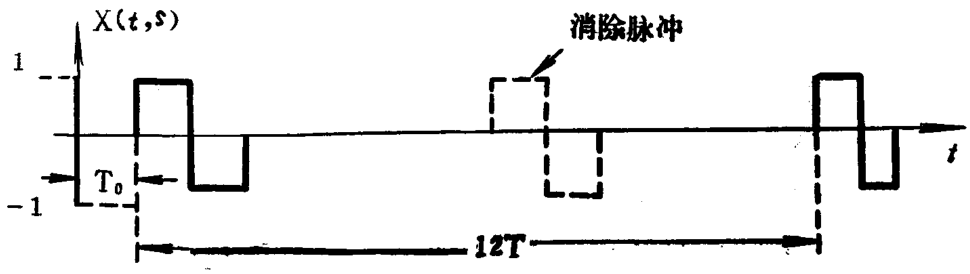

图 1、4、4

1·3·3 在随机相位的二元传输波形中，每个间隔中的脉冲是矩形的，起始时间是一均匀随机变量U（0，T）。

图 1、4、5

现在考虑，在每个间隔内脉冲是正弦波的情况下

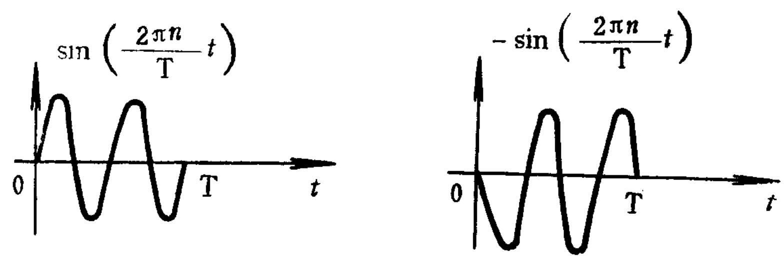

图 1、4、6

图画出了$n=2$的情况，我们感兴趣的是n为任意数时的情况，其它假定相同（包括随机起始时间）。

1．求随时间变化的一阶密度函数$f_{X_{t1}}(x)$。

2．过程是二阶平稳吗？

1·4课 随机电报波

例题 在随机电报波中，在长度τ的时间间隔内，截线的数目被看作泊松随机变量，

$$P\{\text{在}\tau\text{秒内k条截线}\}=\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau},\ k=0,1,2,\cdots \quad (1)$$

用下面两个性质，我们可以对大量的物理现象进行模拟，

(i) 在一间隔内发生的事件数是泊松分布。

(ii) 在不相交的间隔内发生的事件数是统计独立的。

为了记录已发生的事件数，我们应用一个计数过程$N(t)$，

(iii) $N(0)=0$

(iV) $N(t)$＝直到t并包括t已发生事件的序号。

满足 (i) ——(iV) 的过程称作泊松计数过程，我们将在第三单元详细研究它。在这里，我们只研究它的几个性质作为讨论某些典型过程的一部分。

1．求出以时间为函数的概率分布$P[N(t)=k]$。

2．求出以t_1和t_2（假定$t_2>t_1$）为函数的概率分布

$$P[N(t_1)=k_1,\ N(t_2)=k_2]$$

3．过程是平稳的吗？

解　1．由定义$N(0)=0$以及$N(t)$等于已发生的事件数。因此，

$$P[N(t)=k]=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},k=0,1,2\cdots \quad (2)$$

2．在联合分布中我们感兴趣的时间表示如下

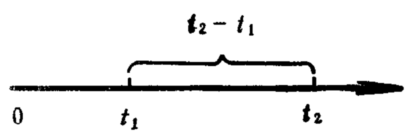

图 1、5、1

我们可以写出联合分布为

$$\begin{aligned}&P[N(t_1)=k_1,N(t_2)=k_2]\\&=P[N(t_2)=k_2|N(t_1)=k_1]P[N(t_1)=k_1]\end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式右端的第一项是一个条件概率。给定了$N(t_1)=k_1$，为了使$N(t_2)=k_2$，在间隔 (t_1,t_2) 内必须出现 (k_2-k_1)个事件。由 (ii) 知，这个事件的概率是独立于$N(t_1)$的，而由 (i) 知道它是泊松分布。这样，

$$P[N(t_2)=k_2|N(t_1)=k_1]=\begin{cases}\dfrac{[\lambda(t_2-t_1)]^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!}e^{-\lambda(t_2-t_1)} & \begin{array}{l}k_2\geqslant k_1\\k_1=0,1,2\cdots\\k_2=0,1,2\cdots\end{array}\\0, & \text{其它}\end{cases} \quad (4)$$

将 (2) 和 (4) 代入 (3) 式得

$$\begin{aligned}&P[N(t_1)=k_1,N(t_2)=k_2]\\&=\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\cdot\frac{[\lambda t_1]^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda t_1}\\&=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{k_2}(t_2-t_1)^{k_2-k_1}\cdot t_1^{k_1}}{(k_2-k_1)!k_1!}e^{-\lambda t_2}, & \begin{array}{l}k_2\geqslant k_1\\k_1=0,1,2\cdots\\k_2=0,1,2\cdots\end{array}\\0, & \text{其它}\end{cases}\end{aligned}$$

3．（2）式中的一阶分布是时间的函数，因此泊松计数过程是非平稳的。

说明　泊松计数过程，二项计数过程和随机游动过程都是独立增量过程的例子。对它下一个精确的定义是有价值的。考虑随机过程$X(t,s)$，一典型现实表示如下

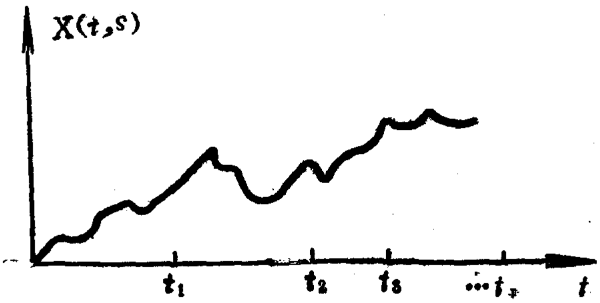

图 1、5、2

我们定义增量随机变量为

$$Y_{t_1}=X_{t_1}-X_0$$
$$Y_{t_2}=X_{t_2}-X_{t_1}$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$Y_{t_n}=X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$$

其中时间集是任意的，如果增量随机变量对于每一个选定的不相交间隔是统计独立的，则这个过程是独立的增量过程。对于一个离散符号集（discrete index set）的过程，定义是相同的。我们以后将详细研究独立增量过程和它的性质。

习　　题

1·4·1　考虑下面的电报波的推广（一般类型），此过程为$X(t,s)$，$t\geqslant 0$。

(i) $X(0)$是高斯随机变量$N(0,\sigma)$。

(ii) 每次事件发生，假定过程就取高斯随机变量$N(0,\sigma)$的一个值，并停留在那个值，直到另一个事件发生。在不同间隔的值是统计独立的，这些事件发生的时间也是统计独立的。

(iii) 在宽度τ的间隔内事件数目是一泊松随机变量，即

$$P[k,\tau]=\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau},\ k=0,1,2\cdots$$

(iV) 在不相交间隔内发生的事件是统计独立的，一个典型的样本函数表示如下

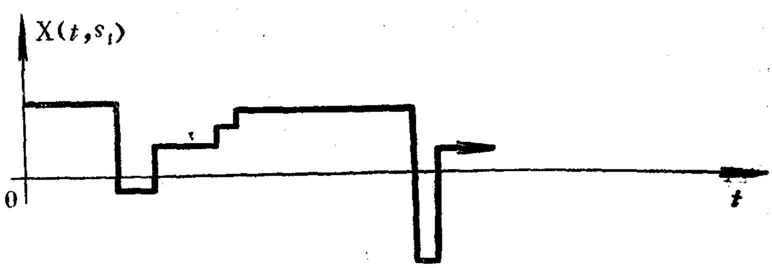

图 1、5、3