初等固體力學

（SI版）

原著者：B. W. Young

譯述者：王　堯　雄

科技圖書股份有限公司

序

從事工程構件的力、應力與變位分析，一般包括在材料力學與結構理論中。但這兩門課程中，含有不少共同的主題，尤其在最初的部分，因而認爲有合併以免重覆的必要，合稱爲固體力學。

寫本書的目的，用簡明形式寫出，以供機械、土木、結構工程科系學生初次研讀之用。各章的組織，先說明其基本原理，繼以例題說明其原理的應用，最後附以嚴選的習題以資練習，後附答案以供核對。這些例題與習題，均係筆者多年來在講授時所搜集資料中鄭重選出，用這些原無答案的問題，利用本書所供應的一般資料作答均認爲滿意。一共有二百道題，其中一半已作了完整的解答。

本書已提出必需而扼要的理論，但因受頁數限制，將較廣泛的主題予以刪除。如欲作進一步的研究可另參考他書，筆者鄭重推薦以下兩書。

(1) S.P. Timoshenko and J.M. Gere. Mechanics of materials. VNR書局1972出版。（按本書已由本公司譯成中文「材料力學」於1973出版迄今）。

(2) J. Case and A.H. Chilver. Strength of materials and structures. 2e. E. Arnold 書局1971出版。（按該書已由貞觀出版社翻印原文）。

B.W. Young. 楊

Sussex 大學

目 錄

第一章　平衡的基本原理

當一枚機器零件，或結構構件被安置在所需的用途之前，設計師必需使其具有足夠的強度與勁度，以便在使用期間，能承受可能遭遇到的荷重。

固體力學(solid mechanics)的目的，是說明應力分佈在構件或結構物的方式，並算出產生的變形。藉着這些資料，設計師就能決定斷面的正確形狀，並選定合適的材料。

所加的力(force)可能爲動態的(dynamically)或靜態的(statically)。本書雖亦提及突發性荷重的影響，但涉及的課題幾乎全爲靜態。有關動態荷重的研究將歸屬於其他的教科書。

現將研討的技術及原理，可適用在所有已知其荷重 - 變形特性的材料。但，本章的課題與材料的行爲大致無關。此處將研討靜定系統(statically determinate system)的力分析。後面幾章將論及力與變形間的關係，以便靜定及超靜定系統(statically indeterminate system)兩者的超靜定系統的力分析與變形分析(deformation analysis)都成爲可能。靜定的概念，讀者可能尚不熟悉，下節將加以說明。

1.1 靜態平衡方程式

我們先觀察一個受力與力矩所組成的一般荷重物體，如欲平衡，需要那些條件。

力的概念應已充分了解。我們知道力有大小、方向與作用綫，而力矩(moment)的概念，較不明顯。力對一點的力矩，被定義爲力與該點作用綫的垂直距離之乘積。

不受束縛的物體承受力與力矩系統時，會產生移動。在三維空間中，此種移動通常是由沿着三條互成直角的軸的移動分量 (component of translation)，以及對此三軸的旋轉分量(components of rotation)所組成。因此，物體的移動有六個自由度(degrees of freedom)。如果將注意力侷限在兩維空間，則情況就會簡化，因這樣物體只有三個自由度：其中兩項是沿着互成直角兩軸的移動分量，以及平面上的一項旋轉。

成功的結構物(structure)必有一項明顯的要求，那就是支承的方式，應防止在應力作用下，物體作整體性的移動。

圖1.1爲結構支承的三種基本形式(structural support)。圖1.1a所示的輥軸支承(roller support)容許物體繞着樞(pin)或鉸鏈(hinge)旋轉(如圖中小圓圈所示)，且能沿水平移動，其垂直移動爲反力R_v所阻止。圖1.1b的樞支承(pinned support)容許物體旋轉，但移動的水平及垂直分力係因兩項獨立的反力R_v及R_h而受阻。圖1.1c的固定支承(fixed support)能產生三項獨立的反力(兩個力R_h及R_v，與力矩M)，來阻止物體的旋轉以及垂直與水平方向的移動。因此，在二維空間中欲完全限制某一物體，我們最少需有三項獨立的反力，它們可爲互成直角的兩力與一力矩，或由三個力所組合的效果，與兩力及一力矩相同。

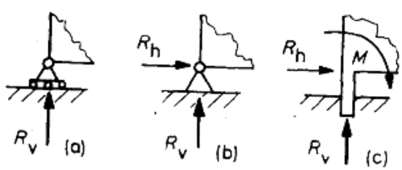

圖1.1

若外力與反力互相平衡，我們就可說，這物體在靜態平衡(statical equilibrium)。在二維空間的物體，如果合乎下列條件，即屬靜態平衡：

(1) x方向諸力的和爲零

(2) y方向(與x方向成直角)諸力的和爲零，且

(3) 對x y平面上任意點所有力矩的和爲零。

此三種條件，產生了靜態平衡的三條方程式。

如物體支承的方式需要三項獨立的反力，就支點而言，即可稱爲靜定（statically determinate）。因這三個靜態平衡方程式已足夠決定反力的大小。如果存在三個以上的獨立反力，其值就無法由僅有的三個方程式算出。就支點而言，該物體卽稱爲超靜定(statically indeterminate)。

下例說明，應用平衡方程式計算二維空間一個靜定物體的反力。

例題1.1

圖1.2爲一箱型桁梁的構件，利用兩條起重纜（lifting-cable）固定在隅角A與B上，另一條繫纜（tethering cable)固定在隅角C處,逐漸吊到固定的位置上。繫纜的目的是使箱型梁保持水平位置。箱型梁長10 m，2 m深，質量中心（center of mass)位在左端量起7 m處。箱型梁的重量爲200 kN。當固定在A、B及C處的纜索,其與水平所成角度,分別爲60°、30°與45°。試求纜索的拉力。

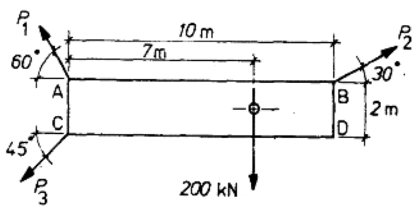

圖1.2

解：(1)由諸水平力的和爲

$$P_1 \cos 60^\circ + P_3 \cos 45^\circ - P_2 \cos 30^\circ = 0$$

因此得

$$P_1 + \sqrt{2} P_3 - \sqrt{3} P_2 = 0 \qquad (1)$$

(2)由諸垂直力的和爲

$$P_1 \sin 60^\circ + P_2 \sin 30^\circ - P_3 \sin 45^\circ - 200 = 0$$

因此得

$$\sqrt{3}\,P_1 + P_2 - \sqrt{2}\,P_3 - 400 = 0 \tag{2}$$

(3)由諸力對A點的力矩和爲

$$(200)(7) - 10\,P_2 \sin 30^\circ + 2\,P_3 \cos 45^\circ = 0$$

因此得

$$1400 - 5\,P_2 + \sqrt{2}\,P_3 = 0 \tag{3}$$

消去式(1)與式(2)中的 P_1 得

$$400 - 4\,P_2 + \sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})\,P_3 = 0 \tag{4}$$

解式(3)與(4)的聯立方程式得

$$P_2 = 354.5\,\text{kN}$$

$$P_3 = 263.5\,\text{kN}$$

代入式(1)得

$$P_1 = 241.4\,\text{kN}$$

1.2 樞接構架的靜定性

我們已提及作用在物體上的力與反力。如物體是一座結構物，或結構物的一部份，通常都是由若干構件 (member) 所組合而成，因此必需核對整個結構物的靜定度 (degree of determinacy)。爲歸納出整個靜定度的概念，我們先研究二維或平面的樞接構架 (pin-jointed frame)，然後再觀察樞接的立體構架(space frame)。

平面樞接構架，是由僅承受軸向力(axial force)的直綫構件所組成。因此，每一個接點均承受方向互成直角的移動之兩項分量。靜態平衡的前二項條件，因而可用在每一接點上。如果構架有 j 個接頭，就會有 $2j$ 平衡方程式。每一個構件都有一項未知的軸向力，亦有一些未知而且獨立的反力。若構架中的構件數爲 m，而獨立的反力數爲 r，即有 $m+r$ 的未知力留待計算。如果平衡方程式的數目等於未知力與反力數目的和，此構架卽爲靜定的，卽

$$2j = m + r \tag{1.1}$$

整個構架或任何未與全構架連接的部份，都需符合這個方程式。

圖 1.3，說明如何應用方程式 1.1 估計平面樞接構架的靜定度。

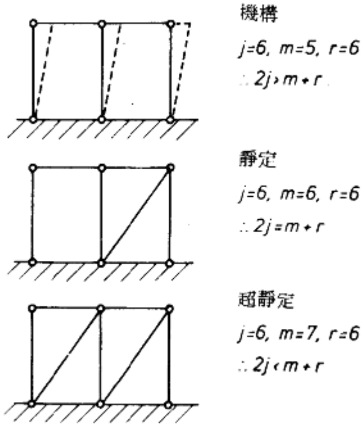

圖 1.3

例題 1.2

試計算圖 1.4 的樞接懸臂構架在牆壁上的反力。

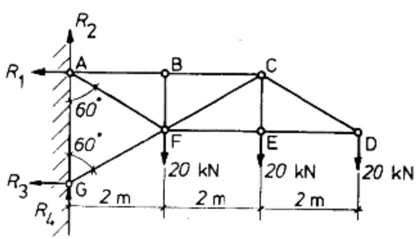

圖 1.4

解：此構架有七個接頭，十個構件以及四個獨立的反力。能符合 1.1 式，故此構架爲靜定的。

(1)求水平力的和爲

$$R_1 + R_3 = 0 \tag{1}$$

(2)求垂直力的和爲

$$R_2 + R_4 = 60\,\text{kN} \tag{2}$$

(3)求對點A的力矩和爲

$$R_3(4/\sqrt{3}) + 20(2) + 20(4) + 20(6) = 0 \tag{3}$$

由式(3)得

$$R_3 = -60\sqrt{3}\,\text{kN}$$

由式(1)得

$$R_1 = +60\sqrt{3}\,\text{kN}$$

R_3 的負號，表示該作用力的方向與原先假設的相反。現在，我們發現無法作進一步算出 R_2 與 R_4。但另外還有一項資料是 R_3 與 R_4 的合力作用綫，一定沿着GF方向，因GF爲軸向力，因此得成立

$$R_4 = -R_3 \tan 30^\circ \tag{4}$$

因此得，

$$R_4 = 60\,\text{kN}$$

$$R_2 = 0$$

然後在G處，由GF構件提供的力，其方向指向接頭，其值爲

$$F_{GF} = \sqrt{(R_3^2 + R_4^2)} = 120\,\text{kN}$$

式1.1的論點，可輕易地延伸到樞接的立體構架。每一接頭存在有三個可能的移動分量，但沒有旋轉分量。因此就有三個力平衡方程式。未知數爲每一構件中的力，以及由支點提供的獨立反力。記住，我們現在討論的是三維的支點。因此，每一個樞，有三個獨立的反力（全爲力），而每一固定支點則有六個反力（三個力及三個力矩）。與式1.1相當的三維空間的式子爲

$$3j = m + r \tag{1.2}$$

1.3 樞接平面構架的力分析

如前所述，平面構架中的每一個接點，均承受共點構件的力(concurrent member forces)。如果構架呈靜定的，即可用系統性的解法，輪流對每一接點計算這些力。在求解時，可用力多邊形圖解法或解

聯立方程式。此處不考慮用圖解法；以下將研究三種分析法。

1.3.1 接點解法(joint resolution)

試考慮圖 1.5 的簡單構架。因構架只承受垂直力，所以水平反力 R_3 為零。解垂直力，並取C的力矩，得成立

$$R_1 + R_2 = 32\,\text{kN}$$
$$4R_2 = 72\,\text{kNm}$$

因此，得

$$R_1 = 14\,\text{kN},$$
$$R_2 = 18\,\text{kN}$$

為方便起見，假設所有構件均呈受拉(tention)狀態(伸張狀態)。因此，考慮一個接點時，所有的構件力的方向都離開它(見圖 1.5)。

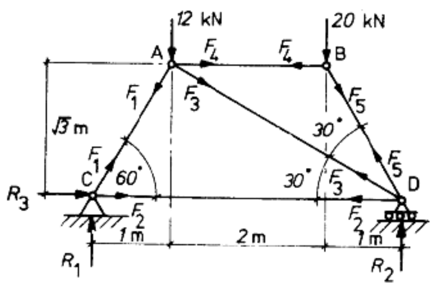

圖 1.5

雖然任何接點都可選來作為起點，但較簡便的是選擇不超過兩項未知力的接點，如圖 1.5 中的接點B與C。假設由接點C開始，先解水平力為：

$$F_1 \cos 60° + F_2 = 0 \tag{a}$$

再解垂直力為：

$$F_1 \sin 60° + 14 = 0 \tag{b}$$

因此得

$$F_1 = -28/\sqrt{3} = -16.2\,\text{kN}$$

$$F_2 = +14/\sqrt{3} = +8.1\,\text{kN}$$

負號，表示構件AC是在受壓力狀態（受到擠壓）下。

然後移到接點B；得成立

$$F_4 - F_5 \cos 60^\circ = 0 \qquad \text{(c)}$$

$$F_5 \cos 30^\circ + 20 = 0 \qquad \text{(d)}$$

因此得

$$F_5 = -40/\sqrt{3} = -23.1\,\text{kN}$$

$$F_4 = -20/\sqrt{3} = 11.5\,\text{kN}$$

最後在接點A，分解水平諸力，得

$$F_4 + F_8 \cos 30^\circ - F_1 \cos 60^\circ = 0 \qquad \text{(e)}$$

因此得$F_3 = +4\,\text{kN}$

1.3.2 切斷法（The method of section）

如果整個構架處於平衡狀態，則可假設構件力作用在切割的末端，將構架切斷後的區段，也仍保持平衡。

假設構件AB、AD及CD被切斷，並隔離構架的右半部。將得到圖 1.6 的情況。

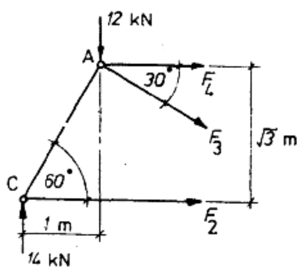

圖 1.6

位於切割末端的力，必需使荷重下的部份構架保持平衡。解水平力，得

$$F_4 + F_2 + F_3\cos 30^\circ = 0 \tag{a}$$

解垂直力，得

$$12 + F_3\cos 60^\circ - 14 = 0 \tag{b}$$

取點A的力矩

$$(14)(1) - \sqrt{3}F_2 = 0 \tag{c}$$

由式(c)得，$F_2 = 14/\sqrt{3} = 8.1\,\text{kN}$

由式(b)得，$F_3 = +4.0\,\text{kN}$

由式(a)得，$F_4 = -20/\sqrt{3} = -11.5\,\text{kN}$

這些結果與前法所得者相同。計算其餘的力F_1及F_5時則需作進一步的切割。

如果，只需求特定的構件力，則斷面法就很有用處。因這樣可以避免有時相當冗長的接點到接點的工作過程。

1.3.3 拉力係數（tension coefficients）

考慮圖1.7中的典型平面構架接點的平衡。

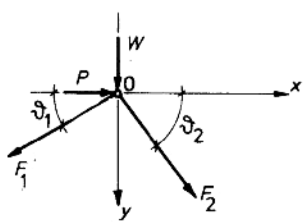

圖1.7

P及W，爲施在接點上的力，F_1與F_2爲構件力，而O_x及O_y分別爲水平軸與垂直軸。

解水平力及垂直力，得

$$P + F_2\cos\theta_2 - F_1\cos\theta_1 = 0$$

與$W+F_1\sin\theta_1+F_2\sin\theta_2=0$

置$F_1=t_1L_1$，$F_2=t_2L_2$，其中，t_1與t_2爲拉力係數，(tension coefficient)，L_1及L_2爲構件長度。上列的平衡方程式變成

$$P+t_2(L_2\cos\theta_2)-t_1(L_1\cos\theta_1)=0$$

置 $W+t_1(L_1\sin\theta_1)+t_2(L_2\sin\theta_2)=0$

但 $L_1\cos\theta_1=x_1$，L_1在O_x上的投影。

$L_2\cos\theta_2=x_2$，L_2在O_x上的投影。

$L_1\sin\theta_1=y_1$，L_1在O_y上的投影。

$L_2\sin\theta_2=y_2$，L_2在O_y上的投影。

則 平衡方程式的最後形式變成

在O_x方向上，$P+t_2x_2-t_1x_1=0$

在O_y方向上，$W+t_1y_2+t_2y_2=0$

現在將拉力係數法用到圖1.5的構架中。x及y軸的原點置在所考慮的接點上。在接點C處，

在方向O_x上，$t_1(1)+t_2(4)=0$

在方向O_y上，$t_1(\sqrt{3})+14=0$

因此得 $t_1=-14/\sqrt{3}\ \mathrm{kNm^{-1}}$

$t_2=+7/2\sqrt{3}\ \mathrm{kNm^{-1}}$

在接點B處 在方向O_x上，$t_4(2)-t_5(1)=0$

在方向O_y上，$20+t_5(\sqrt{3})=0$

因此得 $t_5=-20/\sqrt{3}\ \mathrm{kNm^{-1}}$

$t_4=-10/\sqrt{3}\ \mathrm{kNm^{-1}}$

在接點A處 在O_x方向上，$t_1(1)-t_4(2)-t_3(3)=0$

因此得 $t_3=+2/\sqrt{3}\ \mathrm{kNm^{-1}}$

用拉力係數計算構件力時，最好列成表格如下。

構　件	t (kNm^{-1})	L (m)	$F=tL$ (kN)
AC，(1)	$-14/\sqrt{3}$	2	$-28/\sqrt{3}$
CD，(2)	$+7/2\sqrt{3}$	4	$+14/\sqrt{3}$
AD，(3)	$+2/\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$+4$
AB，(4)	$-10/\sqrt{3}$	2	$-20/\sqrt{3}$
BD，(5)	$-20/\sqrt{3}$	2	$-40/\sqrt{3}$

負號代表壓力（compression）。壓力狀態下的構件，稱爲撐材（struts），拉力狀態下的構件，稱爲繫材（ties）。

採用拉力係數可避免計算角度(angle)及其正弦（sines)、餘弦值(cosines)。在平面構架中，此種方法略優於接點解法(joint resolution)（1.3.1題討論過），但對立體構架，則很有用。

1.4 樞接立體構架的力分析

拉力係數是解立體構架的力分析，極爲有用的方法。這些原理，已於1.3.3款中討論過，並已用在平面構架上；但這種方法可毫無困難地延伸到三維空間上。我們將用下列中說明之。

例題1.3

計算圖1.8中樞接三腳架懸臂托座中的諸力。

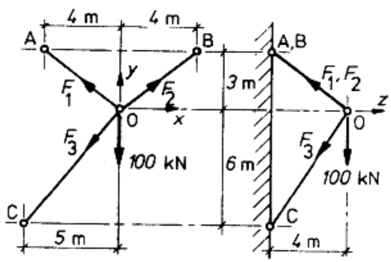

圖1.8

解：此托座共有四個接點，三個構件與九個獨立的反力。因此，符合式1.2。故三腳架爲靜定的。

三個構件力，可由接點0的平衡狀況算出。用拉力係數表示O_x方向的力平衡方程式，得

$$4t_1+5t_3-4t_2=0 \tag{1}$$

在O_y方向上，得