全国高协组织教材研究与编写委员会审定

大学物理基础

（下　册）

陈　治　刘志刚　陈祖刚

中国科学文化出版社

本书由全国高协组织教育发展中心、香港教科文出版有限公司资助出版
全国高协组织教材研究与编写委员会审定

大学物理基础

FUNDAMENTAL UNIVERSITY PHYSICS

陈治　刘志刚　陈祖刚

中国科学文化出版社

内容简介

本书是北京市教育科学“95”规划重点课题《突破课程传统界限更新内容开发工科数理基础平台》的研究成果。是作者长期从事工科基础课教学与教改实践的总结。可以作为工科大学物理课程的教学参考书。本书与其它同类教材的不同之处是更加注重了经典物理学与近代物理学之间的统一性，注重了物理学与周边课程的整合与衔接，特别是与高等数学的积极配合。将科学方法论（模型、演绎、归纳、类比、系统等）的教学渗透全书，成为统率全部素材的灵魂。全书例题丰富，图文并茂，对教学的重点和难点有循序渐进的阶梯式的论述。对学生和初涉讲坛的教师形成了绿色通道。

大学物理基础（下册）

陈治 刘志刚 陈祖刚

出版发行：中国科学文化出版社
排　　版：新天地文印中心
印　　刷：旭日印[illegible]有限公司
开　　本：787×1092mm　1/16
印　　张：13.75
字　　数：326 千字
版　　次：2002 年 9 月第 1 版
书　　号：ISBN 962－8467－63－8
定　　价：22.00 元

目　　录

振动与波动

第一章　振动 1
§1.1　简谐振动 1
1.1.1　弹簧振子 1
1.1.2　描述简谐振动的参量 1
1.1.3　弹簧振子自由振动的速度、加速度和机械能 3
1.1.4　简谐振动的旋转矢量描述 4
1.1.5　简谐量的复指数描述 5
§1.2　谐振动系统举例 6
§1.3　阻尼振动　品质因数 11
1.3.1　阻尼振动 11
1.3.2　品质因数 13
§1.4　受迫振动　共振　受迫振动 14
1.4.1　受迫振动 14
1.4.2　共振 16
1.4.3　受迫振子吸收的功率　共振宽度与锐度 17
§1.5　简谐振动的叠加　周期过程的 Fourier 分析 20
1.5.1　两个同方向同频率简谐振动的叠加 20
1.5.2　两个同方向不同频率简谐振动的叠加　拍 21
1.5.3　两个垂直方向简谐振动的叠加 22
1.5.4　周期过程的 Fourier 分析　频谱 26
第二章　机械波 29
§2.1　波动概述 29
§2.2　行波的描述与分类 29
2.2.1　张紧弦线上的一维行波 29
2.2.2　一维简谐波 31
2.2.3　行波分类 32
2.2.4　三维波场的几何描述 33
2.2.5　平面简谐波　波矢量 34
§2.3　波动方程　波速 36
2.3.1　一维波动方程　波速 36
2.3.2　三维波动方程 39
§2.4　机械波的能量　能流　强度 40
2.4.1　机械波的能量 40
2.4.2　机械波的能流、能流密度与波强 43
2.4.3　波的吸收 43
§2.5　波的叠加与边界效应 44
2.5.1　波的叠加 44
2.5.2　边界效应 45
§2.6　驻波　有界弦的固有振动和简正模 47
2.6.1　半无界弦上的驻波 47

2.6.2 有界弦的共振 49
2.6.3 有界弦的简正模 50
2.6.4 初始扰动与弦的一般激发 52
2.6.5 空气柱的纵振动 52
§2.7 Doppler 效应 54
2.7.1 声波的 Doppler 频移 55
2.7.2 声源超声速运动 艏波 56
[知识扩展] 光学 Doppler 频移 58
[附录] 声强级 59
第三章 电磁波 61
§3.0 场论概要 61
3.0.1 矢量场的通量与散度 61
3.0.2 矢量场的环流与旋度 63
3.0.3 矢性微分算符 ∇ 64
§3.1 Maxwell 方程组的微分形式 预言电磁波 65
3.1.1 Maxwell 方程组的微分形式 65
3.1.2 无源空间中的自由电磁场 预言电磁波 66
[阅读] Maxwell 方程组提出与电磁波发现的前前后后 67
§3.2 平面电磁波的传播特性 69
§3.3 电磁能流 Poynting 矢量 72
3.3.1 通过闭曲面的电磁能流 Poynting 矢量 72
3.3.2 Poynting 定理 73
§3.4 电磁场的动量 辐射压 75
§3.5 平面电磁波在两种介质表面上的反射与折射 76
3.5.1 电磁场在绝缘介质分界面的边值关系 76
3.5.2 反射和折射定律 76
3.5.3 Fresnel 公式
——反射波、透射波振幅与入射波振幅间的关系 77
§3.6 电磁波谱 78

波动光学

第一章 光的折射与反射 82
§1.1 Huygens 原理 光线 反射与折射定律 82
1.1.1 Huygens 原理 82
1.1.2 光线束与波面 82
1.1.3 Huygens 原理解释反射折射定律 83
§1.2 光程 Fermat 原理 84
1.2.1 透明介质中的光波长及光程概念 84
1.2.2 Fermat 原理 85
§1.3 反射折射定律应用举例 86
1.3.1 全内反射现象 86
1.3.2 阶跃型光导纤维 87
§1.4 成像 89
1.4.1 单心光束 视觉 物点 像点 理想光具组 89

1.4.2 光线追迹与逐次成像　实物虚物　实像虚像 90
1.4.3 物像之间的等光程性 91
§1.5 共轴球面光具组傍轴成像 92
1.5.1 球面成像　Gauss 公式 92
1.5.2 薄透镜 97
§1.6 眼睛及光学助视仪器 101
1.6.1 眼睛 101
1.6.2 放大镜 102
1.6.3 眼镜 103
1.6.4 显微镜 103
第二章　光的偏振 105
§2.1 偏振态　偏振片　起偏与检偏 105
2.1.1 线偏振光 105
2.1.2 自然光 106
2.1.3 部分偏振光 106
2.1.4 偏振片　起偏与检偏　Malus 定律 106
§2.2 起偏的物理机制 108
2.2.1 二向色性 109
2.2.2 反射、折射引起的偏振态变化　Brewster 角 109
2.2.3 散射及散射引起的偏振态改变 110
§2.3 光在单轴晶体中的传播 112
2.3.1 双折射现象 112
2.3.2 方解石及其光轴 112
2.3.3 单轴晶体的光学性质 113
2.3.4 Huygens 作图法研究双折射 114
§2.4 波晶片　椭圆偏振光与圆偏振光的获得与检验 116
2.4.1 波晶片——相位推迟器 116
2.4.2 圆偏振光和椭圆偏振光的获得 117
2.4.3 圆偏振光与椭圆偏振光的检验 117
§2.5 偏振光干涉 118
第三章　光学干涉 122
§3.1 光学干涉的一般概念 122
3.1.1 光波的相干叠加与非相干叠加 122
3.1.2 光的相干条件 122
3.1.3 相干光的获得 124
3.1.4 干涉场中光强按相差 $\delta(P)$ 的分布 124
§3.2 T. Young 实验 126
§3.3 分波面干涉装置 130
3.3.1 Fresnel 双面镜 130
3.3.2 Fresnel 双棱镜 130
3.3.3 Biller 对切透镜 130
3.3.4 Lloyd 镜 130
§3.4 薄膜的双光干涉(一) 132
3.4.1 薄膜干涉概述 132
3.4.2 薄膜表面的等厚干涉 136

§3.5 薄膜的双光干涉（二） Michelson 干涉仪 136
3.5.1 厚度均匀薄膜定域于无穷远的等倾干涉条纹 136
3.5.2 Michelson 干涉仪 138
§3.6 谱线的非单色性 光场的时间相干性 139
第四章 光波衍射 142
§4.1 光的衍射现象 Huygens—Fresnel 原理 142
4.1.1 光的衍射现象 142
4.1.2 Huygens--Fresnel 原理 143
4.1.3 不透明屏的作用和开孔的影响 144
4.1.4* 衍射积分 互补屏 Babinet 原理 144
4.1.5 衍射的分类 145
§4.2 Fraunhofer 单缝衍射 145
4.2.1 点光源照明的 Fraunhofer 单缝衍射 146
4.2.2 Fresner 波带法分析 Fraunhofer 单缝衍射 146
4.2.3 Fraunhofer 单缝衍射光强分布的定量研究 148
§4.3 Fraunhofer 双缝衍射 干涉与衍射相结合 149
4.3.1 Young 双狭缝实验的再研究 149
4.3.2 考虑缝宽的 Fraunhofer 双缝衍射 150
4.3.3 干涉与衍射的联系和区别 151
§4.4 Fraunhofer 多缝衍射 152
4.4.1 缝宽 $a \to 0$ 时的 N 光束干涉 152
4.4.2 考虑缝宽的 N 缝衍射 光栅方程 154
§4.5 衍射光栅与光谱 156
4.5.1 衍射光栅 156
4.5.2 光栅的分光原理 156
4.5.3 光栅的色散本领和色分辨本领 156
§4.6 Fraunhofer 圆孔衍射 光学仪器的分辨本领 159
4.6.1 Fraunhofer 圆孔衍射 159
4.6.2 光学仪器的分辨本领 160
[附录] 全息照相 162
§4.7 X 射线在晶体上的衍射 163
4.7.1 X 射线 163
4.7.2 晶体点阵 163
4.7.3 Bragg 公式 164

量子物理学基础

第一章 电磁辐射的量子化 167
§1.1 光电效应 光子 167
1.1.1 金属的电子发射 167
1.1.2 光电效应的实验装置和实验结果 167
1.1.3 经典波动理论解释光电效应的困难 168
1.1.4 光子 光电效应的量子理论 168
1.1.5 光致电离 169
1.1.6 光化学 169

1.1.7 轫致辐射 171
§1.2 Compton 散射 各种光子-电子相互作用的比较 172
1.2.1 Compton 散射的实验装置和实验结果 172
1.2.2 光子和自由电子的弹性碰撞 172
1.2.3 电子偶的产生与湮没 175
1.2.4 各种光子-电子相互作用的比较 176
第二章 微观粒子的波动性 177
§2.1 粒子与波 de Broglie 关系 波粒二象性 177
2.1.1 de Broglie 关系与 Planck 常数 177
2.1.2 电子的波动性 178
2.1.3 电子衍射实验 179
2.1.4 关于波粒二象性和互补原理 180
§2.2 不确定关系 181
2.2.1 位置和动量的不确定关系 181
2.2.2 时间和能量的不确定关系 183
[深入一步] 超弦 185
§2.3 波函数及其统计诠释 186
2.3.1 物质波波函数及其统计诠释 186
2.3.2 电子双缝干涉实验 187
2.3.3 态的叠加 187
2.3.4 统计诠释和波动方程对波函数提出的要求
——波函数的标准条件 188
§2.4 Schrödinger 方程 188
2.4.1 Schrödinger 方程的建立 188
2.4.2 一维定态 Schrödinger 方程 190
2.4.3 束缚在一维无限深势阱中粒子的运动 190
2.4.4 势垒穿透 191
[附录] 扫描隧道显微镜 193
[附录] 量子围栏 193
第三章 原子中的电子 194
§3.1 氢原子 Bohr 理论与量子力学方法 194
3.3.1 氢原子光谱 194
3.3.2 Bohr 的量子理论 194
3.3.3 氢原子的定态能级和 Bohr 理论对氢光谱的解释及有关数值 195
3.3.4 氢原子的量子力学结论 量子数 量子态 196
§3.2 Pauli 不相容原理 200
3.2.1 全同粒子的不可分辨性 200
3.2.2 玻色子与费米子 200
3.2.3 Pauli 不相容原理 核外电子排布 201
第四章 固体中的电子 203
§4.1 固体能带 导体和绝缘体 203
4.1.1 能带的形成 203
4.1.2 电子在能带中的填充 204
4.1.3 导体和绝缘体的导电性能 204
§4.2 半导体 205

4.2.1 本征半导体 205
4.2.2 杂质半导体 206
4.2.3 P-N 结 207
§4.3 半导体器件 208
4.3.1 太阳能电池 发光二极管 208
4.3.2 半导体激光器 209
[附录] 能隙工程 210
[附录] 纳米科技 210

[附录] 主要参考文献 212

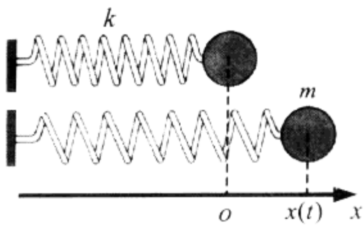
振 动 与 波 动

第一章　　振 动

对于物理性质集中的系统，如果它的状态或某种性质随时间一次又一次地以曾经发生过的方式重复变化，就称系统发生了振动。例如：弹簧振子或单摆在平衡位置附近的往复运动；LC 电路的电磁振荡；空间某点电场或磁场场矢量随时间周期性变化；声波场中，某点附近声压的周期性变化……等等。**振动泛指物理系统的周期性变化**，振动是在自然界里存在极其广泛而形式又极其多样的运动方式。**每一种参数集中的物理系统都可能以它特有的方式发生振动。然而，振动的规律，无论是从具体物理过程抽象出来的微分方程，还是它们的解——物理量随时间变化的规律，在数学上都有着相似的、甚至统一的表述。**在力、电、光各类系统中发生的振动，以力学系统的机械振动最为直观。我们从最简单、最基本的弹簧振子入手，认识振动的描述方法及其基本规律。

§1.1　简谐振动

1.1.1　弹簧振子



放置在水平桌面上的理想弹簧，劲度为k，一端固定，一端连接一个质量为m的质点，不计任何阻力，系统一经触发，就围绕平衡位置自由振动，这样的装置就是弹簧振子。取弹簧保持原长时自由端质点所在位置为坐标原点 o，ox轴沿弹簧伸长方向，自由端质点坐标 $x = x(t)$

根据 Hooke 定律和 Newton 第二定律 $-kx = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$　令 $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ 得动力学方程

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{1.1-1}$$

将试解 $x = e^{rt}$ 代入二阶常系数齐次微分方程(1.1-1)，得特征方程 $r^2 + \omega^2 = 0$，解出特征根 $r = \pm i\omega$，即微分方程的通解为　$x = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$　$(-\infty < t < \infty)$

令两个任意常数分别取以下形式 $c_1 = \dfrac{A}{2}e^{i\phi}$　$c_2 = \dfrac{A}{2}e^{-i\phi}$　采用这个变换后，微分方程的通解有了简明的表述，两个新的任意常数A和ϕ也将具有明确的物理意义，

即　$$x = A\frac{e^{i(\omega t+\phi)} + e^{-i(\omega t+\phi)}}{2} = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{1.1-2}$$

上式表明质点位置随时间按余弦规律变化。其实，任何一个物理量随时间按余弦规律变化，就称这个物理量作简谐振动（SHM：simple　harmonic　motion）。

微分方程 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ 及其通解　$x = A\cos(\omega t + \phi)$　$(-\infty < t < \infty)$　分别从动力学和运动学角度给出了简谐振动这一类物理过程的根本特征。如果依照具体问题的特定“历史”——初始条件，确定了常数A和ϕ，也就获得了问题的定解，即这个简谐振动全过程的完整描述。

1.1.2　描述简谐振动的参量

(1) 周期 T

质点振动状态自相重复的相邻两个时刻的间隔，称为振动周期。 $f(t+T)=f(t)$

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi)=A\cos(\omega t+\phi+2\pi)=A\cos[\omega(t+\frac{2\pi}{\omega})+\phi]=x(t+T)$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{1. 1-3}$$

系统经历所有振动状态一次，称为一次全振动。全振动一次所需的时间，就是振动的周期。

(2) 频率 ν 角频率 ω

单位时间内完成全振动的次数称为振动的频率。频率的单位是 Hz （s^{-1}）

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi} \tag{1. 1-4}$$

频率的 2π 倍称为角频率 $\omega=2\pi\nu=\dfrac{2\pi}{T}$

弹簧振子自由振动的角频率（因之周期和频率）$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 取决于振子固有的物理性质与振子的初始状态无关。

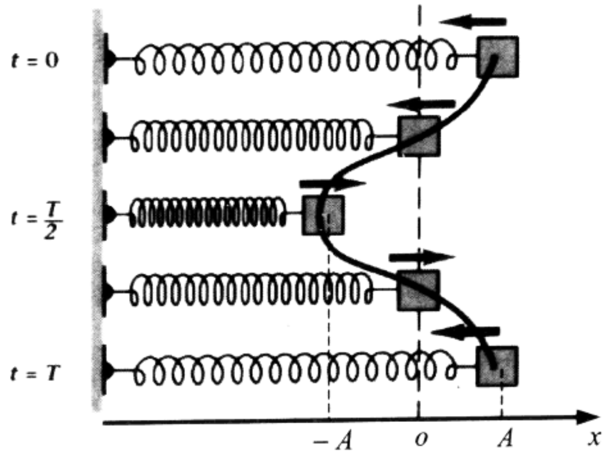
(3) 相位

振动的运动学方程 $x=A\cos(\omega t+\phi)$ 给出了周期量 x 与时间 t 的函数关系。对于状态的周期性变化，直接运用底层自变量时间 t 并不方便。以时间 t 的线性函数 $\omega t+\phi$ 作为描述振动状态的中间变量，则明确体现了余弦函数以 2π 为周期的共性。我们称 $\omega t+\phi$ 为简谐振动的相位。相位不仅唯一地确定了振动的状态，而且直接反映出状态特征。不管振动的周期是多少，相位每增加 2π 系统状态复原一次。只要了解相位在任意一个 2π 区间中变化所引起振动状态变化，就足以认识简谐振动的全过程。从以时间 t 为自变量到以相位 $\omega t+\phi$ 为自变量描述振动状态，在数学上只是减少了一层简单的函数嵌套，在物理上则凸显出相位概念的巨大优势。这种优势早已应用到周期性重复发生事件的表达之中。如：每天的作息时刻表，每周的课程表，每月一次的日程安排……等等，都不以连续计时表达时间，而是采用与相位相仿的计时概念：Am 8：00 上班 ，星期三做实验，20 日接待，…… 表述本身就体现了事件重复的周期。对于非周期性物理过程，没有每天、每周、每月的描述。

初相 ϕ：$t=0$ 时振动的相位。它取决于时间原点的选择。

(4) 振幅 A

简谐量的最大值称为振幅。对于弹簧振子 $|x|\le A$，振幅是指质点最大位移的绝对值。在振动方程中振幅 A 与初相 ϕ 是以任意常数的地位出现的，它与系统的动力学性质无关，仅仅决定于系统的初始条件。



[例题 1.1.1] 求弹簧振子自由振动的振幅和初相，已知 $x(0)=x_0$，$v(0)=v_0$

解：$x = A\cos(\omega t+\phi)$　　　$x_0 = A\cos\phi$

$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t+\phi)$　　$v_0 = -A\omega\sin\phi$

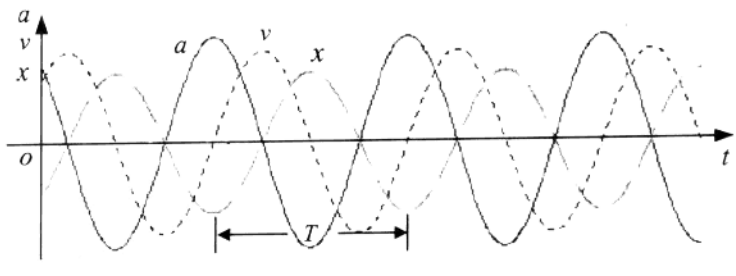
故　$\tan\phi = -\dfrac{v_0}{\omega x_0}$　　　$A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{v_0^2}{\omega^2}}=\sqrt{x_0^2+\dfrac{mv_0^2}{k}}$

1.1.3　弹簧振子自由振动的速度、加速度和机械能

弹簧振子在自由振动中的速度与加速度

$$v=\dot{x}=-A\omega\sin(\omega t+\phi)=A\omega\cos(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2})$$

$$a=\dot{v}=-A\omega^2\cos(\omega t+\phi)=\frac{kA}{m}\cos(\omega t+\phi+\pi)$$

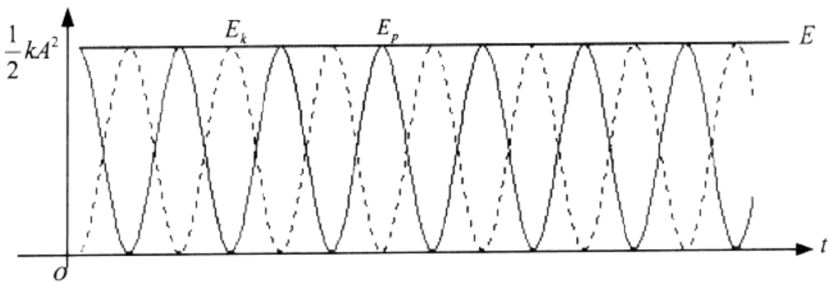


显然，速度和加速度都是简谐量，角频率仍为 ω，速度的相位超前位移 $\pi/2$，加速度的相位超前速度 $\pi/2$，与位移反相。

动能 $E_k=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\phi)=\frac{1}{2}kA^2\frac{1-\cos 2(\omega t+\phi)}{2}$

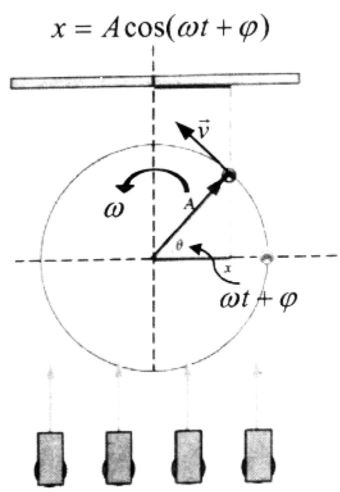
势能 $E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi)=\frac{1}{2}kA^2\frac{1+\cos 2(\omega t+\phi)}{2}$

系统机械能 $E=E_k+E_p=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$ (1.1-5)



弹簧振子自由振动满足机械能守恒条件，机械能守恒是意料之中的。振子机械能与振幅平方成正比。对于振子的简谐振动，振子动能和势能的瞬时值此长彼消，都做周期性变化，角频率为2ω。将(1.1-5)式对时间取微商，得 $m\ddot{x}+kx=0$

1.1.4 简谐振动的旋转矢量描述



弹簧振子的简谐振动与质点的匀速圆周运动的一些运动参量之间存在着简单的对应关系。前者可以从后者在一个坐标轴上的几何投影得出。

以振幅A为模，作一个始端在原点的矢量$\vec{A}$，它以角频率ω为角速度在oxy平面内绕原点逆时针方向旋转，设$t=0$时$\vec{A}$与ox轴的夹角等于振动的初相ϕ，那么，矢量$\vec{A}$就是与简谐振动 $x=A\cos(\omega t+\phi)$ 对应的旋转矢量。这里存在一系列的对应关系。矢量$\vec{A}$与ox轴的夹角$\theta=\omega t-\phi$ 就是谐振动的相位；矢量$\vec{A}$转动一周的时间就是振动的周期T；矢量$\vec{A}$在ox轴上的投影就是这个简谐振动；矢量$\vec{A}$末端速度$\vec{v}$在ox轴上的投影正是振子的速度$\dot{x}$（速度与ox轴的夹角是 $\omega t+\phi+\pi/2$ ）。

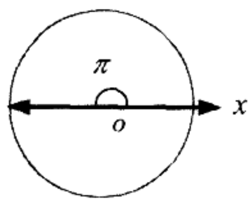
旋转矢量既不是原有意义上的空间矢量，也不是简谐振动本身。它是建立在对应关系上的简谐振动的几何表述。在简谐振动的叠加以及简谐量对时间和空间求微分或积分时对照矢量代数法则可以简化运算，增强直观表现能力。

[例题 1.1.2] 质点作振幅为A的简谐振动，已知$t=0$时质点的运动状态分别是

(1) $x(0) = -A$; (2) $x(0) = 0 \quad v(0) > 0$; (3) $x(0) = A/2 \quad v(0) < 0$;
(4) $x(0) = -A/\sqrt{2} \quad v(0) < 0$ 求：质点运动方程 $x = A\cos(\omega t + \phi)$ 中的初相 ϕ

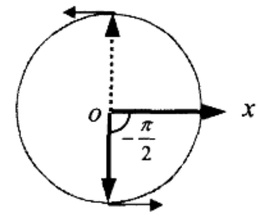
解：(1) $x(0) = -A = A\cos\phi$

$\phi = \pi$



(2) $x(0) = 0 = A\cos\phi$

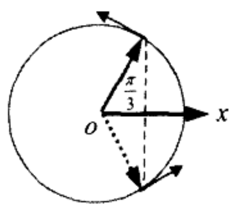
$\phi = \pm\pi/2$



$\phi = -\pi/2$

(3) $x(0) = A/2 = A\cos\phi$

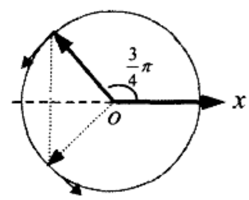
$\phi = \pm\pi/3$



$\phi = \pi/3$

(4) $x(0) = -A/\sqrt{2} = A\cos\phi$

$\phi = \pm 3\pi/4$



$\phi = 3\pi/4$

1.1.5 简谐量的复指数描述

简谐量还可以用复指数表示。它与简谐振动的旋转矢量描述同源，但使用范围更广。

一个平面旋转矢量 $\vec{A} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}A\cos(\omega t + \phi) + \hat{y}A\sin(\omega t + \phi)$ 与复平面上一个复变量 $z = x + iy = A\cos(\omega t + \phi) + iA\sin(\omega t + \phi) = Ae^{i(\omega t + \phi)}$ 相互对应。将旋转矢量 $\vec{A}$ 还原为简谐量 x 的手续是求 $\vec{A}$ 在 ox 轴上的投影；将复指数 z 还原为简谐量 x 的手续则是求 z 的实部 $x = \mathrm{Re}\, z$。复指数表示法不仅适用于加减运算，还适用于微分和积分运算，简谐量 x 与复指数 z 的对应关系也存在于 $\dot{x}$ 和 $\dot{z}$ 之间 $\dot{x} = \mathrm{Re}\,\dot{z}$。

值得注意的是，在简谐量的复指数表示中，与时间有关的部分和与时间无关的两部分能够分离开来 $z = Ae^{i(\omega t + \phi)} = Ae^{i\phi}e^{i\omega t}$ (1.1-6)

式中与时间无关的部分 $Ae^{i\phi}$ 称为复振幅。设两个同频率的简谐振动，相差为 δ

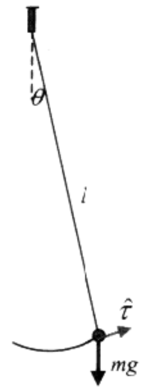
$$x_1 = A\cos\omega t \qquad z_1 = Ae^{i\omega t}$$

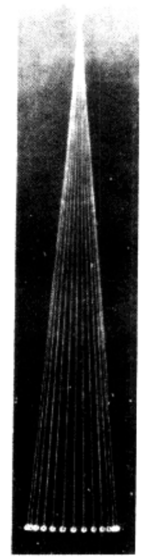
$$x_2 = A\cos(\omega t + \delta) \qquad z_2 = Ae^{i\delta}e^{i\omega t}$$

它们的差别显示在复振幅的相因子中。由于 $e^{i0} = 1 \quad e^{i\pi/2} = i \quad e^{i\pi} = -1 \quad e^{i3\pi/2} = -i$，即，以虚数单位 i 乘以复指数 z，得到的新的复变量所对应的振动相位超前原振动相位 $\pi/2$。用 z^* 表示复变量 z 的共轭复数，简谐量 x 的振幅 $A = \sqrt{zz^*}$ (1.1-7)

§1.2　谐振动系统举例

[例题 1.2.1]　单摆　不可伸长的细线长为l，上端固定，下端系一质量为m的质点，在重力场中作微振动，忽略空气阻力。求单摆振动周期。





解：设质点加速度为$\vec{a}$线张力为$\vec{T}$　则　$m\vec{g}+\vec{T}=m\vec{a}$

在自然坐标中，取切向投影

$$-mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}(l\frac{d\theta}{dt})$$

摆线与竖直方向夹角（摆线角位置）$\theta=\theta(t)$

整理得关于θ的微分方程　$\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\dfrac{g}{l}\sin\theta=0$

由于　$\sin\theta=\theta-\dfrac{\theta^3}{3!}+\dfrac{\theta^5}{5!}-\cdots\cdots$

在摆幅较小$\theta<<1$时，取一次近似　$\sin\theta\approx\theta$

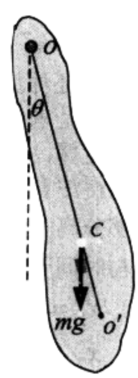
令　$\omega^2=\dfrac{g}{l}$　则　$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0$，即单摆的微幅振动是简谐振动，振动周期　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$　与摆锤质量和振幅无关。

单摆与地球系统机械能守恒　$\dfrac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2+mgl(1-\cos\theta)=E$

对上式求时间微商也可以导出单摆的动力学方程。

如果振幅θ_m较大　　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}(1+\dfrac{1}{2^2}\sin^2\dfrac{\theta_m}{2}+\dfrac{1}{2^2}\dfrac{3^2}{4^2}\sin^4\dfrac{\theta_m}{2}+\cdots\cdots)$

[例题 1.2.2]　复摆　刚体绕不过质心的水平轴o在竖直面内作小振幅的自由摆动。设刚体的质量为m，刚体绕过质心c的水平轴的转动惯量为J_c，$oc=l$。求：振动周期。



解：根据刚体定轴转动定理　$-mgl\sin\theta=(J_c+ml^2)\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

在$\theta<<1$时，复摆作小振幅的摆动的动力学方程为

$$\ddot{\theta}+\frac{mgl}{J}\theta=0 \qquad J=J_c+ml^2$$

周期为　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgl}}=2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g}}$　其中$l'=\dfrac{J}{ml}$称为等值摆长。

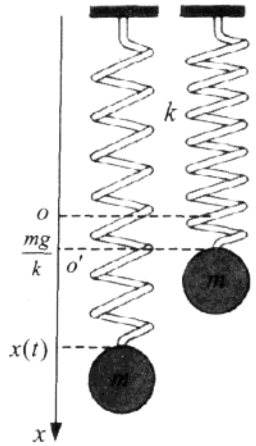
在oc延长线上取o'点，使得$oo'=l'$，则o'点称为复摆的振动中心，此时复摆自由振动周期与悬挂于o点质量m集中于o'点的单摆相同。复摆的振动中心与打击中心重合（见力学[例题 4.2.11]）。

若将这个复摆悬挂于过o'点的水平轴，o点成为振动中心，复摆振动周期不变(可逆摆)。此时，复摆振动的微分方程为

$$\ddot{\theta}+\frac{mg(l'-l)}{J'}\theta=0 \qquad 其中 \quad l'=\frac{J}{ml} \quad J'=J_c+m(l'-l)^2=J(\frac{J}{ml^2}-1)$$

则 $$\omega'^2=\frac{mg(l'-l)}{J'}=\frac{mgl(\frac{J}{ml^2}-1)}{J(\frac{J}{ml^2}-1)}=\frac{mgl}{J} \quad 故 \quad T'=\frac{2\pi}{\omega'}=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}=T$$

[例题 1.2.3] 研究竖直悬挂弹簧振子的自由振动



解：取ox轴竖直向下，弹簧保持原长时自由端位置为坐标原点o，质点m的坐标$x=x(t)$，令$x=0$为重力势能和弹性势能的零点

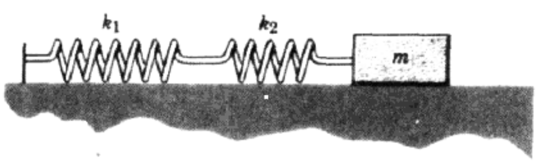
系统机械能守恒 $\frac{1}{2}m\dot{x}^2-mgx+\frac{1}{2}kx^2=E$

由 $\frac{dE}{dt}=0$ 得 $\ddot{x}+\frac{k}{m}(x-\frac{mg}{k})=0$

令 $x'=x-\frac{mg}{k}$ 因 $\ddot{x}'=\ddot{x}$ ，故 $\ddot{x}'+\frac{k}{m}x'=0$

质点以$x'=0$即$x=mg/k$的点o'为平衡位置作简谐振动，角频率仍是 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

[例题 1.2.4] 两个原长不同，劲度分别为k_1，k_2的理想弹簧串联，与质点m组成振子，求自由振动频率。



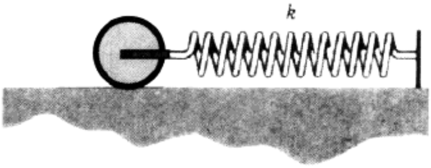
解： 当质点相对平衡位置的位移为x时，两个弹簧的伸长量分别是x_1，x_2

$$x_1+x_2=x \qquad \frac{x_1}{\frac{1}{k_1}}=\frac{x_2}{\frac{1}{k_2}}=\frac{x}{\frac{1}{k}}=\frac{x_1+x_2}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}$$

$$k_1x_1=k_2x_2 \qquad k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2} \qquad 由\ m\ddot{x}=-kx\ 知\ \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}$$

[例题 1.2.5] 如图所示，劲度为k的轻弹簧一端固定，一端连接在匀质圆柱体的转轴上，圆柱质量为m半径为r，可在水平桌面上无滑滚动. 求系统振动周期。

解：设圆柱质心坐标为x，弹簧无形变时质心的位置为坐标原点，圆柱在水平桌面上无滑滚动，静摩擦力不作功，系统机械能守恒



$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}kx^2=E$$

式中 $J=\frac{1}{2}mr^2 \quad \dot{x}=r\omega$

由 $\frac{dE}{dt}=0$ 得 $m\dot{x}\ddot{x}+\frac{1}{2}mr^2\frac{\dot{x}}{r}\frac{\ddot{x}}{r}+kx\dot{x}=0$

圆柱质心运动满足动力学方程 $\ddot{x}+\frac{2k}{3m}x=0$ 振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$

[例题 1.2.6] 求弹簧质量m不可忽略的弹簧振子自由振动频率。设弹簧劲度是k，质点质量为M ($M>>m$)。

解：设弹簧原长是l，在弹簧未形变时，在距固定端s处取一元段ds。由于$m<<M$，可以认为振动过程中弹簧形变的分布是均匀的，即在任意时刻各等长小段形变相同。元段ds的位移就是原长为s一段弹簧的伸长量$\frac{s}{l}x$；质点速度为$\dot{x}$，元段ds的速度为$\frac{s}{l}\dot{x}$，元段ds的质量为 $dm=\frac{m}{l}ds$；质点动能为$\frac{1}{2}M\dot{x}^2$时，弹簧的动能为

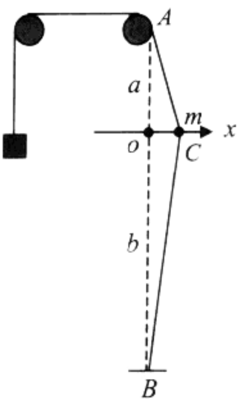
$$\int_m\frac{1}{2}dm(\frac{s}{l}\dot{x})^2=\frac{m}{2l^3}\dot{x}^2\int_0^l s^2ds=\frac{1}{6}m\dot{x}^2$$

自由振动系统机械能守恒 $\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{6}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=E$

由 $\frac{dE}{dt}=0$ 得 $\ddot{x}+\frac{k}{M+m/3}x=0$

考虑弹簧质量，振子仍作简谐振动

振动频率 $\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M+m/3}}$



[例题 1.2.7] 质量为m的小铁球附着在一根张紧弦线AB的C点上，如图所示，C点将AB分为a,b两段，弦线张力为F，质量忽略不计。给小铁球一个初始的横向微小位移后释放。求：小球作微小横振动的周期。

解：设ox垂直于静态弦线，它们的交点为原点。横向运动时小球的坐标为x，它所受到的回复力为$\frac{x}{a}F+\frac{x}{b}F$