数学辅导资料

杨守廉　刘增贤　田孝贵　主编

北京师范学院出版社

1987年·北京

中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试

数学辅导资料

杨守廉　刘增贤　田孝贵　主编

北京师范学院出版社

1987年·北京

内　容　提　要

本书汇集了中学教师《专业合格证书》文化专业知识的三门考试课程（解析几何、数学分析、高等代数）的辅导资料。该书是由上述三门课程的教材编写单位之一的北京师范学院数学系编写。根据教委师范教育司编《数学教学大纲》的要求，书中详尽地阐明了各部分数学内容的教学要求，精选了体现这些要求的例题和习题，并给出了解题范式和习题答案，读者和考生可据此自学自检并将有助于提高学习效率。

中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试

数学辅导资料

杨守廉　刘增贤　田孝贵　主编

北京师范学院出版社出版
（北京阜成门外花园村）
新华书店首都发行所发行　　卢龙印刷厂印刷
开本：787×1092　1/32　　印张：17.75　　字数：377千
1987年5月第1版　　1987年5月第1次印刷
印数：1—10,000册
ISBN 7—81014—019—1/G·19
统一书号：7427·137　　定价：3.70元

前　言

北京师范学院和北京教育学院受国家教委委托编写中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试用《数学分析》、《高等代数》和《解析几何》三门课程的教材，并受北京市教育局委托对参加北京市1987年度考核的考生进行了考前辅导.

由于上述三门课程的教材还没有出版，根据北京市以及全国各地考生的具体情况，北京师范学院数学系的部分教师依据大纲的要求，以樊映川编的《高等数学讲义》和北京师范学院田孝贵等编的《高等代数》为基础，编写了这份辅导资料.

本书详尽地阐明了各部分数学内容的教学要求，精选了体现这些要求的例题和习题，并附有解题范式和习题答案。本书只是辅导性的学习材料，对在上述两本教课书中已有详尽阐述，又非重点要求的部分，本书没有编入.

本书三门课程的编写各有特点，但总的都包含了基本内容与要求、问题与解答和习题三个部分．我们力求把基本内容与要求说得具体、明确，学员可据以自检并在短时间内提高学习的效率．问题（例题）与解答及习题两个部分，作为基本内容的补充和练习，使得该书更适合读者的实际情况。编者希望读者能首先自行回答书中所提的问题或例题，然后再对照解答自学自检．习题数量不多，难度也不大，建议读者全部做完，并可多做一些类似的题目，以资熟练．全篇终了附有习题答案和部分题解，供读者参考.

参加数学分析辅导资料编写工作的有杨守廉、周祖逵、范秋君、刘芸、杨锡文等同志．参加高等代数辅导资料编写工作的有田孝贵、刘玉森同志．参加解析几何辅导资料编写工作的有刘增贤、黄敬之、王汇淳同志．

本书编写仓促，不足之处在所难免，敬请读者不吝指正，以便我们在编写正式教材和学习指导书时加以改进．

编者

目　录

第一篇　解析几何（平面部分）

一、平面上的直角坐标系……………………（1）

（一）主要内容………（1）

1.1 基本概念…………（1）

1.2 基本公式…………（1）

1.3 求曲线的方程和两曲线交点的坐标……（2）

（二）例题……………（2）

（三）习题……………（7）

二、直线………………（10）

（一）主要内容………（10）

1.1 直线的倾角和斜率的概念………………（10）

1.2 直线方程的各种形式……………………（10）

1.3 定理………………（11）

1.4 直线方程各种形式间的互化，特别是将直线方程的一般式化为法线式和截距式……（11）

1.5 有关直线的基本问题……………………（11）

1.6 直线束……………（12）

（二）例题……………（12）

（三）习题……………（18）

三、圆锥曲线及其标准方程…………………（20）

（一）主要内容………（20）

1.1 圆…………………（20）

1.2 椭圆………………（21）

1.3 双曲线……………（21）

1.4 抛物线……………（21）

（二）例题……………（22）

（三）习题……………（26）

四、二次曲线的一般理论……………………（27）

（一）主要内容………（27）

1.1 二次曲线与直线的相关位置……………（27）

1.2 二次曲线的渐近方向……………………（29）

1.3 二次曲线的中心…（30）

1.4 二次曲线的渐近线……………………（33）

1.5 二次曲线的切线…（33）

1.6 二次曲线的直径…（34）

1.7 二次曲线的主方向和主直径…………（ 36 ）
1.8 平面直角坐标系的平移变换公式………（ 36 ）
1.9 平面直角坐标系的旋转变换公式……（ 36 ）
1.10 利用坐标变换化简一般二元二次方程…………………（ 37 ）
1.11 坐标变换下二次曲线的不变量……（ 38 ）
1.12 利用不变量化简二次曲线方程…………………（ 38 ）
（二）例题…………（ 39 ）
（三）习题…………（ 52 ）
五、参数方程…………（ 53 ）
（一）主要内容………（ 53 ）
1.1 曲线的参数方程的概念…………（ 53 ）
1.2 曲线的参数方程和普通方程的互化…………………（ 53 ）
1.3 利用参数方程求动点的轨迹…………（ 54 ）
1.4 几种常见曲线的参数方程…………（ 54 ）
1.5 参数方程图形的描绘…………………（ 55 ）
（二）例题…………（ 55 ）
（三）习题…………（ 59 ）
六、极坐标方程………（ 61 ）
（一）主要内容………（ 61 ）
1.1 极坐标系的建立…………………（ 61 ）
1.2 曲线的极坐标方程…………………（ 61 ）
1.3 极坐标与直角坐标的关系，曲线的直角坐标方程和极坐标方程的互化……（ 61 ）
1.4 极坐标方程的图形…………………（ 62 ）
（二）例题…………（ 62 ）
（三）习题…………（ 64 ）

第一篇　解析几何（空间部分）

一、向量代数…………（ 66 ）
（一）主要内容………（ 66 ）
1.1 空间直角坐标系…………………（ 66 ）
1.2 两个基本公式……（ 67 ）
1.3 向量（矢量）……（ 68 ）
1.4 向量的线性运算…………………（ 69 ）

1.5 共线向量和共面向量…………………（71）
1.6 向量的坐标表示…………………（72）
1.7 向量的数量积（内积）………………（73）
1.8 向量的方向角与方向余弦……………（74）
1.9 向量的向量积（外积）………………（74）
1.10 向量的混合积…………………（75）
1.11 二重向量积……（77）
（二）例题……………（77）
（三）习题……………（83）
二、平面………………（85）
（一）主要内容………（85）
1.1 平面方程的各种形式…………………（85）
1.2 定理………………（87）
1.3 平面方程不同形式的互化……………（87）
1.4 点到平面的距离…（87）
1.5 两平面的位置关系…………………（88）
（二）例题……………（88）
（三）习题……………（93）
三、空间直线…………（95）
（一）主要内容………（95）
1.1 直线方程的各种形式…………………（95）
1.2 直线方程不同形式间的互化…………（97）
1.3 直线与平面的位置关系………………（97）
1.4 空间两直线的位置关系………………（98）
1.5 平面束的方程……（99）
（二）例题……………（99）
（三）习题……………（107）
四、特殊曲面…………（111）
（一）主要内容………（111）
1.1 曲面方程的概念，曲线方程的概念…………………（111）
1.2 球面方程…………（111）
1.3 母线平行于坐标轴的柱面方程………（111）
1.4 以原点为顶的锥面方程………………（111）
1.5 旋转曲面的方程…………………（112）
1.6 参数方程…………（112）
（二）例题……………（113）
（三）习题……………（117）
五、二次曲面…………（119）
（一）主要内容………（119）
1.1 标准方程…………（119）

1.2 单叶双曲面与双曲抛物面的直纹性……………………（121）
（二）例题……………（123）
（三）习题……………（129）

第二篇　数学分析

一、函数……………（131）
（一）基本内容及要求……………（131）
（二）问题与解答……（132）
（三）习题……………（143）
二、极限……………（145）
（一）基本内容及要求……………（145）
（二）问题与解答……（147）
（三）习题……………（159）
三、连续函数…………（162）
（一）基本内容及要求（162）
（二）问题与解答……（162）
（三）习题……………（173）
四、导数与微分………（174）
（一）基本内容及要求……………（174）
（二）问题与解答……（176）
（三）习题……………（196）
五、微分学中值定理和泰勒公式…………（199）
（一）基本内容及要求……………（199）
（二）问题与解答……（200）
（三）习题……………（218）
六、利用导数研究函数……………（220）
（一）基本内容及要求……………（220）
（二）问题与解答……（222）
（三）习题……………（233）
七、不定积分…………（234）
（一）基本内容及要求……………（234）
（二）问题与解答……（235）
（三）习题……………（245）
八、定积分……………（246）
（一）基本内容及要求……………（246）
（二）问题与解答……（247）
（三）习题……………（264）
九、定积分的应用……（267）
（一）基本内容及要求……………（267）
（二）问题与解答……（268）
（三）习题……………（273）
十、数项级数…………（274）
（一）基本内容及要求

…………………… (274)
(二) 问题与解答…… (275)
(三) 习题…………… (292)
十一、函数项级数…… (295)
(一) 基本内容及要求
…………………… (295)
(二) 问题与解答…… (295)
(三) 习题…………… (309)
十二、幂级数………… (310)
(一) 基本内容及要求
…………………… (310)
(二) 问题与解答…… (311)
(三) 习题…………… (327)

第三篇 高等代数

一、基本概念………… (329)
(一) 集(集合)…… (329)
(二) 映射…………… (331)
(三) 数环和数域…… (334)
二、一元多项式……… (337)
(一) 一元多项式的基本概念及运算…… (337)
(二) 任意数域上多项式的因式分解…… (344)
(三) 关于整数的整除性和因式分解…… (360)
(四) 关于整数环上多项式的整除性和因式分解…………… (366)
(五) 复数域、实数域和有理数域上的多项式……………… (370)
三、消元法…………… (377)
(一) 线性方程组…… (377)
(二) 消元法的理论根据及实质………… (378)
(三) 消元法………… (379)
四、n阶行列式 ……… (389)
(一) n阶行列式的定义………………… (389)
(二) n阶行列式的性质和计算………… (395)
(三) 克莱姆规则…… (404)
五、n元向量及其线性相关性……………… (409)
(一) n元向量及其运算………………… (409)
(二) 向量的线性组合
…………………… (411)
(三) 向量的线性相关与线性无关……… (416)
(四) 极大线性无关组
…………………… (425)

（五）矩阵的秩………（428）
六、线性方程组理论
……………………（435）
（一）线性方程组解的
判定………………（435）
（二）基础解系………（448）
七、矩阵的运算………（452）
（一）线性运算及乘法
……………………（452）
（二）逆矩阵…………（458）
（三）初等矩阵………（464）
习题答案与部分题解…（476）

第一篇　解析几何（平面部分）

一、平面上的直角坐标系

（一）主要内容

1.1　基本概念

（1）　有向直线（轴），有向线段，有向线段的值，有向线段的长度．数轴，数轴上点的坐标。

（2）　平面直角坐标系．坐标轴，平面上点的横坐标，纵坐标，象限．

（3）　线段的定比分点．

（4）　曲线的方程．

1.2　基本公式

（1）　有向线段的加法公式：

设A，B，C为轴上三点，则

$$AB+BC=AC$$

公式的推广：设A_1，A_2，A_3，…，A_n是轴上任意n个点，则有

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n$$

（2）　轴上有向线段的值用起点、终点的坐标表示

设$P_1(x_1)$和$P_2(x_2)$为数轴上的两点，则

$$P_1P_2=x_2-x_1$$

（3）　平面上两点之间的距离公式：

设$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$为平面上两点，则

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

(4)　平面上线段的定比分点公式：

设$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$M(x, y)$三点共线，且$\frac{P_1M}{MP_2}=\lambda$ $(\lambda\neq-1)$，则

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

特别地，当M为P_1P_2的中点时，则

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$$

1.3　求曲线的方程和两曲线交点的坐标

求曲线方程的步骤可归结为：

(1)　选定坐标系；

(2)　在曲线上任取一点$P(x, y)$；

(3)　根据曲线上点的共同特性，写出关系式，并把这关系式用关于x、y的方程表示，再化为最简方程；

(4)　证明所得的方程就是曲线的方程（如果化简的过程都是同解变形，则可不必再加证明）.

求两条曲线的交点就是求两曲线方程的公共解.

（二）例　题

例1.　x轴上一点A，它与$B(1, -3)$点的距离等于5.

求A点的坐标.

解 由于A点在x轴上，设它的坐标为（x，0）.依题意有

$$|AB|=\sqrt{(1-x)^2+(-3)^2}=5$$

两边平方 $(1-x)^2+9=25$，解之得

$$x=-3 \text{ 或 } x=5$$

即A点的坐标为（-3，0）或（5，0）.

例2. 设A，B，C，D是同一直线上的四点.试证明不论它们的位置关系如何，都有如下算式成立

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AB\cdot BD.$$

证 在直线上以A点为原点，指定一个方向，取定单位长度，使之成为数轴.这样，A点的坐标为（0）.B，C，D点的坐标分别为（b），（c），（d）.则

$$\begin{aligned}&AB\cdot CD+BC\cdot AD\\&=(b-0)\cdot(d-c)+(c-b)\cdot(d-0)\\&=-bc+cd,\end{aligned}$$

$$AC\cdot BD=(c-0)\cdot(d-b)=cd-bc,$$

即 $$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$

例3. 三角形三个顶点是$A(2,1)$，$B(-2,3)$，$C(0,1)$.求三角形三条中线的长.

解 设AB边中点M_1的坐标为（x，y），则

$$x=\frac{2-2}{2}=0,\qquad y=\frac{1+3}{2}=2.$$

即M_1的坐标为（0，2）.依同理可得BC边上的中点M_2的坐标为（-1，2）.CA边的中点M_3的坐标为（1，1）.

所以，三条中线的长分别为

$$|CM_1|=\sqrt{(0-0)^2+(2-1)^2}=1,$$

$$|AM_2|=\sqrt{(-1-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10},$$

$$|BM_3|=\sqrt{(1+2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}.$$

例4. 在$\triangle ABC$中，AO是BC边上的中线.求证

$$|AB|^2+|AC|^2=2\left(|AO|^2+|OC|^2\right).$$

证 取线段BC所在的直线为x轴（图1—1），BC边的中点O作原点建立坐标系. 设C点的坐标是（a，0），那么B点的坐标就是（$-a$，0）. 再设A点的坐标是（b，c）.

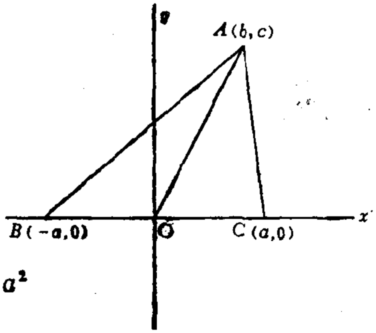

图 1-1

则 $|AO|^2=b^2+c^2$，$|OC|^2=a^2$

由此得 $2\left(|AO|^2+|OC|^2\right)$

$=2\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

又 $|AB|^2=(b+a)^2+(c-o)^2$,

$|AC|^2=(b-a)^2+(c-o)^2$

所以 $|AB|^2+|AC|^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

故 $|AB|^2+|AC|^2=2\left(|AO|^2+|OC|^2\right)$.

注意：例2的结论是平面几何中的一个定理，这里我们用解析的方法证明了它. 用解析的方法证明几何定理的方法叫解析法. 从这个例子可以看到，平面几何中的某些定理，有时用解析法证明比较容易. 应用解析法证明几何问题时，坐标系的恰当选取常可以使问题的证明简单. 在所选的坐标系下，利用已知图形的性质取定已知点的坐标；再根据解析几何中的基本公式，列式推证或计算. 在以后的内容里，将

会遇到许多这方面的例子.

选取坐标系要具体问题具体分析. 例如, 选取图形中的一个点作原点, 则这个点的坐标就是 (0, 0), 选取图形中的一条直线作x轴, 就能使这条直线上点的纵坐标为0, 如果图形中有两条互相垂直的直线, 那么就把它们选作x轴和y轴, 这样就能使一条直线上点的纵坐标为0, 另一条直线上点的横坐标为0.

例5. 利用定比分点公式, 证明三角形的三条中线共点. 这点到顶点的距离是中线全长的2/3.

证 如图1-2建立坐标系.

设三角形的顶点为$A(a_1, a_2)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$. 则三边BC, CA, AB之中点顺次为

$$O(0, 0), \quad M\left(\frac{a_1+c}{2}, \frac{a_2}{2}\right),$$

$$N\left(\frac{a_1-c}{2}, \frac{a_2}{2}\right)$$

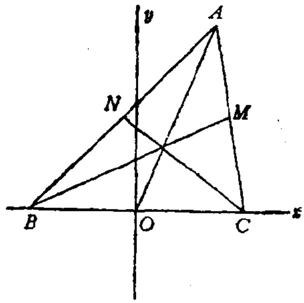

图 1-2

在AO上取P_1, 使$\frac{AP_1}{P_1O}=2$, 则P_1点的坐标

$$x_1=\frac{a_1+2\times 0}{1+2}=\frac{a_1}{3}, \quad y_1=\frac{a_2+2\times 0}{1+2}=\frac{a_2}{3}.$$

在BM上取P_2, 使$\frac{BP_2}{P_2M}=2$, 则P_2点的坐标

$$x_2=\frac{-c+2\times\frac{a_1+c}{2}}{1+2}=\frac{a_1}{3}, \quad y_2=\frac{0+2\times\frac{a_2}{2}}{1+2}=\frac{a_2}{3}.$$

在CN上取P_3，使$\dfrac{CP_3}{P_3N}=2$，则P_3点的坐标

$$x_3=\frac{+c+2\times\dfrac{a_1-c}{2}}{1+2}=\frac{a_1}{3},\quad y_3=\frac{0+2\times\dfrac{a_2}{2}}{1+3}=\frac{a_2}{3}$$

即P_1，P_2，P_3三点重合，设为P．亦即三角形三条中线交于一点P，且P到三角形顶点的距离为中线全长的2/3．

例6． 把A（0，2），B（8，0）两点间的线段分为两段，使其比等于这两点到坐标原点的距离之比．

解 设分点P的坐标为（x，y）．因为

$$\frac{AP}{PB}=\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

$$x=\frac{0+\frac{1}{4}\times 8}{1+\frac{1}{4}}=\frac{8}{5},\quad y=\frac{2+\frac{1}{4}\times 0}{1+\frac{1}{4}}=\frac{8}{5}.$$

即分点的坐标为$\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$．

例7． 一动点到$A(3,0)$点的距离，等于它到$B(-6,0)$点距离的一半，求它的轨迹方程．

解 设动点是P（x，y）．根据题设条件，有

$$|PA|=\tfrac{1}{2}|PB|.$$

即 $$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x+6)^2+y^2}$$

两边平方得 $(x-3)^2+y^2=\dfrac{1}{4}\left[(x+6)^2+y^2\right]$

化简得 $x^2+y^2-12x=0$．

即 $$(x-6)^2+y^2=36.$$

凡适合已知条件的点的坐标必适合这个方程；反之，凡坐标满足上述方程的点，必满足已知条件．因此