

高中
平面幾何
教科書

傅種孫著

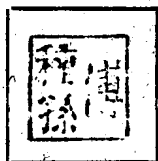
光



中華民國三十七年八月印

版

權



有

所

高中平面幾何

教科書

全冊

影印本

著者 高安傳種孫

印刷所 算學叢刻社

發行所 新華書店

北平西河沿185號
電話(3)5425號

序

民十四，北京師大附中初有三三制高中班，議訂課程之時，同人多主複習平面幾何。種孫方任教此科，因取曩日爲新京學院補習幾何之講稿，稍加增輯，油印之而試教焉。明年，又復增修，石印爲講義。其後附中雖沿用之，而未嘗訂正也。去年教育部頒布各科課程標準，算學叢刊社認爲此編對於教材之取舍，頗有與部令暗合之處，因囑重訂而印行之。倉卒將事，于教材之詳略，章節之排次，習題之選擇，文字之潤色，猶皆有未能愜意者。迫于付印，不及斟酌矣。

教書以複習難教，編書亦以複習難編，本書之不易完善，此原因之屬於事者也；學欠貫通，文難達意，見聞未博，經驗不豐，此又原因之屬於人者也。除此二因之外，尚有屬於書者，則湊集彌縫而成，體例形式，容難一貫。訂正工作，惟有俟之他日耳。

至于操觚時着意之處，約有數端。謹略陳于此，幸同好教正之。

(一) 幾何本極有系統之學。今高中于平面幾何，半途起首，論證時究應何所根據耶？故爲設首篇，列舉基本義理，彙錄初步命題，以備徵引之用。學者在初中時，所讀異書，所學異師；入高中後，難免各道其道。故首篇之設，除備徵引外，尙有一視聽之意。

(二). 本書用無定義之名詞一,曰點;無定義之關係二,曰A點介乎B,C二點之間,曰(A,B)符合于(C,D). 其他一切之形,如線段,直線,...皆認為點之集合. 一切關係,如角之符合,形之相似,...皆由上述二關係輾轉以界說之. 至于淺近名詞及關係,無關基本,又不複雜,其名甚通行,其義可想而見者,定義概從略焉.

(三). 幾何之務不在知其然而在其所以然;不在知其所以然,而在何由以知其所以然. 讀定理,既知其然矣;又從而證之,以見其所以然. 若此所謂證者,僅口得而傳,心不得而求,則此流傳二千載,用遍五大洲之十三章經,亦特教員專利之秘方耳,曷足貴哉? 初中于平面幾何之教材,已講授不少,惟于方法之運用尙欠熟練耳;故高中宜特別偏重焉. 本書于第一篇汎論推證之法;而第二篇之于證定理,第四篇之于解作圖題,概以方法為經,教材為緯. 凡此種種,皆欲啓發學者,示以思惟之道耳.

(四). 存在問題,在每門數學中皆極困難. 作圖能不能問題之在幾何亦然. 雖不足為初學道其詳,要不可不使聞其略. 本書第四篇于作圖之時,特別注意交點之有無,解數之多少;且于代數分析法之後,略述能不能問題解決之概要. 亦欲進學者于有無能否之辨,而不以畫法技能自足耳.

(五). 線段相乘之基礎在比例,比例之基礎在平行. 學者苟明乎此,則代數學中之法理,多可舉而用之于幾何. 故本書第三篇于形數溝通之方,特加申說.

(六). 軌跡定理本不難明. 學者所以不循規蹈矩而證之者,爲憚煩耳. 若教科書不示以論證之規矩,教員不加以嚴厲之督責,則學者取法乎中,僅得其下矣. 此本書第五篇所以力加矯正也.

(七). 認軌跡爲點之集合,各書之所同然. 本書既認任何形皆爲點之集合,則某種點之軌跡爲某形云者,不亦猶謂此集合即彼集合耶? 故于講軌跡之先,略論兩類全同之意,以爲之引.

(八). 初等幾何範圍內,一切極限問題中之變數,但使以次代表一序貫之數值可耳. 不必涉及連續變化也. 故本書第六篇論極限,皆以繫之于序貫,而不空言變數.

(九). 極大極小問題,以初等方法解之,有易解者,有難解者,有絕不能解者. 本書第六篇于極大極小定理之易證者證之,其用初等方法難證及絕不能證者,則將題文變更,使內容微弱,至能證而止. 不敢稍存武斷欺騙之心.

(十). 教學之道,指示正規與矯正錯誤,須兼施並用,其效始大. 本書除詔學者以須如此如此外,間又告

以不可如彼如彼。蓋有鑑于中學生易犯之錯誤，而欲吾讀者免除之也。

(十一) 本書分量大約相當于新頒課程所定之時數。複習課程，進度較速，故篇幅稍多。次要之處，特別註明，教者可量爲取舍焉。

凡此等等，果是耶，非耶？將心至而筆未至耶？是則所厚望于博達君子之指正者，不勝盼禱之至！

此書之成，慫慂而督促之者爲程春台學長；迭經試教而指正之者，有韓問渠李宇涵二兄及魏庚人同學；屢共討論參閱者，則四君之外，尚有春台兄哲嗣京，及丁壽田傅超寰黃仲良諸君，與舊講義讀者諸生；而傅黃二君于校稿繪圖尤始終其事。書此誌謝。

民國二十二年秋 高安傅種孫序于北平師範大學

再 版 序

此次重印，章之移前者一（今第六篇之第一章），節之移後者二（今 §§ 106, 107），他皆補綴校訂而已，無他更革也。

編輯微意，尙有一事，爲前序漏列者，謹補述于此：一

（十二）相似一名，自來教科書皆無統一之定義。以至于多邊形，弓形，扇形，多面體，圓錐，圓柱，鼓形，球底錐，漏斗形，…之相似，一形一定義。相似之定義十數見，而不爲貫通焉，謂之同，則有異義之說；謂之異，又有同名之雅。此其不便一。且各書之論相似多邊形者，靡不涉及對應點（不限于頂點），對應線（不限于邊），對應角（不限于頂角）。吾人試問之曰「何謂對應角？」必曰「對應線之交角也。」「何謂對應線？」必曰「對應點之聯線也。」「何謂對應點？」必又曰「對應線之交點也。」輾轉循環，無以自解。此其不便二。今本書視形爲點之類，而二形相似之第一要件爲二形之點能一一對應。——「二類類員一一對應」之觀念，乃各門數學之所通用而不可避免者。吾人用之之時，但說明如何使之——對應可耳。至于「一一對應」之根本觀念，猶之「類」，「類員」，…，乃論理學之名詞，數學雖通用之而不加究詰也。——線，角，…本皆點之類，吾人指

對應點組成之線爲對應線，對應點組成之角爲對應角，乃極其自然。二形之點一一對應之法既定，于是相似之義可以二法定之：一

(i) 每逢此形之 A, B, C, D 與彼形之 A', B', C', D' 對應，則

$$AB : A'B' = CD : C'D';$$

(ii) 每逢 A, B, C 與 A', B', C' 對應，則

$$\angle ABC = \angle A'B'C'.$$

此二條件本互相隱含，定義中但舉其一可耳。然前者須用比例，涉及亞幾默德公理。故本書取後者。相似之義，規定如此，不但可用之于多邊形，多面體，圓，球，圓錐，圓柱，弓形，鼓形，且可用之于任何度空間之任何形。

初版出後，同好多有教正之者，本版類皆採納。其或見解各殊，未之從同，亦于爭議處稍加詮釋，以明原意。刪削之未能，則以太費事也。教者選擇而授焉可耳。

校勘之役，除前序所舉諸君外，則同學魏庚人趙慈庚趙楨三君費力尤多，理應誌謝。

廿三年夏傅種孫又識。

三 版 序

此版視再版稍有增刪修訂之處，然大體未變也。印成勘誤，魯魚亥豕之處較少，皆同學趙慈庚，底鍾英二君警校精細之力。謹此致謝。

廿四年夏編者識

目 錄

首篇 徵引錄

第一章 導言

節	面
1. 幾何論證之本源	1
2. 公理,原名之選擇及幾何之派別	2
3. 歐几里得幾何	3

第二章 基本義理

4. 點 (公理 I)	4
5. 一點對於二點間之關係及順序公理 (公理 II, III)	4
6. 直線及定線公理 (公理 IV)	5
7. 延長線及延長公理 (公理 V)	5
8. 線段及密佈公理 (公理 VI)	6
9. 共線點之順序 (公理 VII)	6
10. 符合及符合公理 (公理 VIII, IX)	7
11. 半線及遷線公理 (公理 X)	8
12. 距離之和及加法公理 (公理 XI)	9
13. 直線上之方向	9
14. 形 符合形	10
15. 直線形及其符合公理 (公理 XII)	11
16. 不共線點及其存在公理 (公理 XIII)	12
17. 三角形及截割公理 (公理 XIV)	12
18. 平面及定面公理 (公理 XV)	13
19. 角及遷角公理 (公理 XVI)	13

20. 垂直線及直角公理 (公理 XVII)	15
21. 符合三角形公理 (公理 XVIII)	15
22. 圓及交圓公理 (公理 XIX)	16
23. 平行線及平行公理 (公理 XX)	17
24. 共圓點之順序及共點線之順序	17
25. 平面上之方向	18
26. 角之大小加減	20

第三章 初中平面幾何摘要

27. 二三角形	22
28. 同平面上二圓	22
29. 一直線與一圓	23
30. 等圓 (或同圓) 上之弧, 弦, 圓心角	24
31. 一點至一直線之垂線及斜線	24
32. 一線段	24
33. 一角	25
34. 一三角形	25
35. 二平行線與一割線	26
36. 平行四邊形	26
37. n 邊形	27
38. 圓周角, 圓內角, 圓外角	27
39. 一點與一圓之關係	27
40. 正 n 邊形	28
41. 諸平行線	28
42. 互等角三角形	29
43. 由一點至一圓之切線及割線	29

第一篇 推證通法

第一章 順證法及反證法

44. 順證法及反證法之意義.....31
45. 反證法之方式.....32
46. 反證法中之分別反駁.....33

第二章 逆定理

47. 關係語.....37
48. 逆定理及其製造法.....38
49. 逆定理之證法第一.....40
50. 逆定理之證法第二.....43

第三章 綜合法與分析法

51. 綜合法與分析法.....46

第四章 歸納法

52. 普通歸納法.....50
53. 算學歸納法.....53

第二篇 證題雜術

第一章 相等

54. 全等三角形.....59
55. 用全等三角形證相等法(證題術 I).....60
56. 疊合法(證題術 II—IV).....64
57. 證相等之雜術(證題術 V—X).....66

第二章 垂直

58. 證題術 XI.....68
59. 證題術 XII.....68

第三章 平行

60. 證題術 XIII70

第四章 和差

61. 證題術 XIV73

62. 證題術 XV74

第五章 代數證法

63. 證題術 XVI78

第六章 共線點與共點線

64. 共線點與共點線(證題術 XVII—XIX)80

65. 證題術 XX—XXI85

第七章 共圓點與共點圓

66. 共圓點與共點圓89

67. 二圓合一(證題術 XXII)89

68. 一點在一圓上(證題術 XXIII)90

69. 共圓點(證題術 XXIV)91

70. 共點圓(證題術 XXV)93

第八章 不等

71. 不等之根據96

72. 不等腰三角形97

73. 證題術 XXVI98

74. 證題術 XXVII99

75. 有二邊互等之兩三角形100

76. 證題術 XXVIII101

77. 證題術 XXIX102

78. 證題術 XXX102

第三篇 幾何計算

第一章 線段計算

79. 線段量法.....	107
80. 線段計算.....	108
81. 關於線段計算之推證法	109
82. 線段計算之基本定理【公式 I—XI】.....	110
83. 證題術 XXXI【公式 XII—XIV】.....	113
84. 互等角三角形法(證題術 XXXII)【公式 XV—XXIII】	117
85. 多項式(證題術 XXXIII)【公式 XXIV—XXVIII】.....	119
86. 代數證法(證題術 XXXIV)【公式 XXIX—XXXII】.....	122

第二章 相似形

87. 配景相似形【公式 XXXIII】.....	124
88. 相似形(證題術 XXXV).....	129
89. 同序相似形	135

第三章 多邊形之面積

90. 多邊形之面積【公式 XXXIV—XXXIX】.....	138
91. 面積之比【公式 XL—XLII】.....	141
92. 相似形加減法	142
93. 多邊形之就形變積.....	143
94. 三角形之就積變形.....	144
95. 多邊形之就積變形【公式 XLIII】.....	147

第四篇 作圖

第一章 基礎

96. 作圖題與存在定理	153
97. 作圖器具及其效能	153
98. 作圖之根據	155
99. 作圖之規範	157
100. 推究舉例	160

第二章 方法

101. 駁作圖題之方法	164
102. 拼合法	166
103. 造因法	167
104. 三角形奠基法	170
105. 遷移法(平移法,旋轉法,翻褶法)	172
106. 放大法(配似法)	177
107. 分析法與輔助線	180

第三章 代數分析法

108. 線段作圖	190
109. 線段方程	191
110. 代數分析法	192
111. 正多邊形	198
112. 作圖不能問題(證題術 XXXVI)	200

第五篇 軌跡

第一章 釋類

113. 類209
114. 關涉于類之語言文字及記號.....210

第二章 軌跡之意義及軌跡定理之證法

115. 軌跡212
116. 軌跡定理證法213
117. 軌跡定理證法(續).....218

第三章 描跡

118. 描跡221
119. 描跡時應注意之點.....224

第四章 軌跡問題

120. 求跡問題解法【公式 XLIV】.....226
121. 軌跡定理別式234

第五章 軌跡應用

122. 軌跡定理之用法240
123. 軌跡交點.....241
124. 軌跡與作圖.....244

第六篇 極大極小及極限

第一章 極大極小

125. 定義253
126. 直接比較法.....254

127. 極大極小問題之發生	259
128. 間接比較法	259
129. 均數逐代法	262
130. 反證法	265

第二章 極 限

131. 引言	271
132. 序貫及其極限	272
133. 關於極限之術語及記號	274
134. 升序貫及降序貫	275
135. 極限原理	277
136. 關於極限之重要定理十則	278
137. 無理數	279
138. 度量原理(公理 XXI)(亞幾默德原理)	281
139. 量法	282
140. 比	286
141. 可通約量之公度	287
142. 線段比例之基礎定理	289
143. 圓弧——圓心角——圓周角【公式 XLV-XLVIII】	291
144. 面積【公式 IL】	296
145. 圓周長及圓面積【L-LII】	301
146. 圓周率【公式 LIII-LV】	306
147. 極大極小問題之極限解法	311

高中平面幾何教科書

首 篇 徵 引 錄

第一章 導 言

§1. 幾何論證之本源。稍習幾何者，莫不知幾何之論證，言皆有本義皆有源。每見一定理必追求其所本之前提，而此所本之前題又必有其所本而後可。雖然，溯而上之，極其所至，始初之論，又何所本哉？故必定一命題，或一羣命題，不求證明以爲一切定理之基礎，而不再根究其理由，是爲公理 (axioms or postulates)，即不證明之命題 (unproved propositions) 也。

幾何重顯明貴固定，絕不許有模稜兩可之詞存乎其間，故正名尚焉。每遇一名詞，必問“作何解？”而此解之之名詞，又必有解而後可。如此遞推，終必有未解之名詞存於定義之中。故必定一名詞，或一羣名詞，不加定義，以爲解釋一切名詞之本源。是爲原名 (primary notions)，即不定義之名詞及關係 (undefined elements and relations) 也。

* 本篇之設僅備徵引，不必講授。