大学生习题课系列丛书

GAILVLUN YU SHULITONGJI
XITIKE SHIERJIANG

概率论与数理统计习题课12讲

[经济·管理类]

周概容 编著

北京航空航天大学出版社
http://www.buaapress.com.cn

概率论与数理统计
习题课 12 讲

［经济·管理类］

周概容　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书是学习“概率论与数理统计”课程的同步教学辅导书，阶段复习的指导书，也是自学本课程一本很好的参考书。其主要内容是：事件及其概率，随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征，极限定理和大数定律，抽样分布，参数估计，假设检验，相关分析、回归分析和方差分析。全书以习题课的形式展开，分为12个专题，每个专题分为：目的与要求；内容提要；思考题与例题分析；课内练习题及课外习题。其中“思考题与例题分析”又划分为若干个专题。课内练习题和课外习题部分与思考题和例题分析内容相对应。

本书的读者对象，主要是高等学校经济、管理类专业，以及理工科非数学专业的师生。对于自学本课程者，特别是对于准备考硕士研究生和MBA者，本书也是一本难得的复习引导书。本书也可以供数学专业的学生以及各级管理人员和工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题课12讲：经济·管理类/周概容编著.
北京：北京航空航天大学出版社，2003.8
ISBN 7-81077-366-6

Ⅰ.概… Ⅱ.周… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第074500号

概率论与数理统计习题课12讲
[经济·管理类]
周概容 编著
责任编辑 郑忠妹
*
北京航空航天大学出版社出版发行
北京市海淀区学院路37号，邮编100083，发行部电话82317024
北京市云西华都印刷厂印装 各地书店经销
*
开本：850×1 168 1/32 印张：10.75 字数：289千字
2003年8月第1版 2003年8月第1次印刷 印数：5 000册
ISBN 7-81077-366-6 定价：15.00元

前　言

经济数学基础，包括“微积分”、“线性代数”和“概率论与数理统计”等三门课程，是高等学校经济和管理类各专业的核心课程，是全国硕士研究生入学考试“数学”的必考内容，也是学习许多后续课程的必备知识。这些课程旨在培养学生的抽象概括能力、逻辑推理能力、运算能力和运用数学方法解决实际问题的能力。

学习数学必须做一定数量的的习题。做习题可以帮助学生正确地理解、牢固地掌握和熟练地运用有关的概念、性质、公式与方法。习题课是数学教学不可缺少的和十分重要的环节。然而由于种种原因，往往不能保证习题课的正常进行。因此我们编写了这套“习题课”的教学参考书，共三册：《微积分习题课 20 讲》，《线性代数习题课 12 讲》和《概率论与数理统计习题课 12 讲》。

概率论与数理统计，是研究随机现象的数学学科，与其他数学学科比较，其研究方法和思维方式都独有特色、别具一格。解概率论与数理统计习题，不但要善于运用有关概念、性质和选择相应的公式，而且需要一定的直观想象力与判断力。这正是概率统计习题的难点所在。本书根据当前高等学校经济和管理类各专业通用的教材（见文献[1]～[4]），并且参照《全国硕士研究生入学考试数学考试参考书》，将习题课分为 12 讲。每一讲分为：目的和要求、内容提要、思考题和例题分析、课内练习题和课外习题等五个部分展开叙述。习题的题型有“计算题”、“证明题”和“选择题”，其中选择题一律为单项选择题（即在所给出的选项中，只有一项符合题目的要求）。“目的和要求”部分指出学生应掌握、理解和了解的内容；“内容提要”包括有关概念、性质和公式。每一讲的主干部分是“思考题和例题分析”。12 个专题分别列举思考题和典型例题，每道题都给出了解题的思路分析和详细解答。最后，与“思考题和例题分析”相对应给出了适量的课内练习题和课外习题，并也都附有解答。

所选思考题、例题、练习题和习题都是编者在多年教学中积累的同类题中精选的。特别是其中包括本人在 1987～2003 年连续

17 年，参加“全国硕士研究生入学统一考试命题组”的工作中编制和积累的大量试题和备用试题。

本书的读者对象，主要是高等学校经济、管理类专业，以及理工科非数学专业的师生；对于自学本课程者，特别是对于准备报考硕士研究生和 MBA 者，本书也是一本难得的参考书。由于本书只是回避了诸如“特征函数”等一些纯数学概念和方法，因此也可以供数学专业的学生参考使用。此外，还可供各级管理人员和工程技术人员参考使用。

作者于南开大学
2003 年 6 月

目　录

第1讲　事件及其概率

一、目的与要求

1. 了解必然现象和随机现象的基本特点，大量的随机现象和个别随机现象的区别；认识随机性和统计规律性的辨证关系，以及统计规律性是随机现象在大量重复出现时的一种固有性质，而概率论和数理统计的研究对象就是随机现象的统计规律性。

2. 直观上理解随机事件和随机变量的概念，了解基本事件和基本事件空间的概念。

3. 掌握事件的关系和运算及其基本性质。

4. 理解事件的概率的概念。理解“概率”是与长度、面积、体积、质量……类似的一种度量。“概率”作为一种度量无需“数学定义”，只需指出（或规定）它应具备的基本性质——概率的公理。在有些教材中的所谓“古典型定义”、“几何型定义”和“统计定义”，只不过是在一定条件下选择这种“度量”的合理方法。

5. 理解事件的条件概率和独立性的概念；掌握概率的基本性质和基本公式；掌握与条件概率有关的三个基本公式（乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式）。

6. 掌握事件概率的基本计算方法：直接计算（古典型和几何型）；用事件的频率估计事件的概率；概率的推算。

二、内容提要

这一讲的基本概念有事件、事件的概率、一个事件关于另一事

件的条件概率；事件的独立性。

这一讲的基本运算有事件的关系和运算；事件概率的计算。

1. 事件及其关系和运算

事件——随机现象的每一种状态或表现，随机试验（对随机现象的观测）的每一种结果，分为必然事件 Ω、不可能事件 $\varnothing$ 和随机事件（常用前面几个大写拉丁字母 $A,B,\cdots$ 表示；有时用 $\{\cdots\cdots\}$ 表示事件，而大括号中用文字或式子描述事件的内容）。

数学上，事件是基本事件的集合；一切基本事件的集合（基本事件空间）Ω 是必然事件；不含任何基本事件的空集 $\varnothing$ 是不可能事件。

事件之间的关系 包含，相等，相容，相互对立。

1° **包含** $A\subset B$，读做"事件 B 包含 A"或"A 导致 B"，表示每当 A 出现 B 也一定出现；

2° **相等** $A=B$ 表示 A 和 B 要么都出现要么都不出现；

3° **事件 A 和 B 不相容** $AB=\varnothing$ 表示 A 和 B 不可能同时出现，否则称事件 A 和 B 相容；

4° **事件 A 和 $\overline{A}$ 互为对立事件** 若其中一个出现，则另一个必不出现。

事件之间的运算 和（并）、差、交（积）。

1° **和** $A\cup B$ 或 $A+B$ 表示事件"A 与 B 至少出现一个"，称做事件 A 与 B 的**和或并**；$\bigcup\limits_i A_i$ 或 $\sum\limits_i A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少出现一个。

2° **差** $A\backslash B$ 或 $A-B$ 表示事件"A 出现但是 B 不出现"，称做 A 与 B 的差，或 A 减 B。

3° **交** $A\cap B$ 或 AB 表示事件"A 和 B 同时出现"，称做 A 和 B 的**交或积**；$\bigcap\limits_i A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时出现。

事件运算的性质 对于任意事件 A，B，C，$A_1,A_2,\cdots,A_n$，

…,有

1° 交换律　$A+B=B+A$;　$AB=BA$。

2° 结合律　$A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C$;

$ABC=A(BC)=(AB)C$。

3° 分配律　$A(B+C)=AB+AC$;

$A(B-C)=AB-AC$;

$A(A_1+\cdots+A_n+\cdots)=AA_1+\cdots AA_n+\cdots$。

4° 对偶律　$\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}$;　$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$;

$\overline{A_1+\cdots+A_n+\cdots}=\overline{A}_1\cdots\overline{A}_n\cdots$;

$\overline{A_1\cdots A_n\cdots}=\overline{A}_1+\cdots+\overline{A}_n+\cdots$。

2. 概率的概念和基本公式

概率的概念　事件的概率——事件在随机试验中出现的可能性的数值度量;以 $\mathrm{P}(A)$表示事件 A 的概率,用 $\mathrm{P}\{\cdots\cdots\}$表示事件$\{\cdots\cdots\}$的概率。事件 B 关于 A 的条件概率定义为

$$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)}$$

概率的运算法则和基本公式

1° $\mathrm{P}(\Omega)=1,\mathrm{P}(\varnothing)=0,\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A)$;

2° 减法公式　$\mathrm{P}(A-B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(AB)$;

3° 加法公式　$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$,

$\mathrm{P}(A+B+C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-$

$[\mathrm{P}(AB)+\mathrm{P}(AC)+\mathrm{P}(BC)]+\mathrm{P}(ABC)$

4° 可加性　对于任意有限或可数个两两不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有

$$\mathrm{P}(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=$$
$$\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)+\cdots+\mathrm{P}(A_n)+\cdots$$

5° 乘法公式　$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$,

$\mathrm{P}(A_1A_2\cdots A_n)=$

$$P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

6° 全概率公式　设 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 构成完全事件组：$H_1+H_2+\cdots+H_n=\Omega, H_iH_j=\varnothing(i\neq j)$，则

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P(A\mid H_k)$$

7° 贝叶斯公式　设 $H_1,H_2,\cdots H_n$ 构成完全事件组，则

$$P(H_k+A)=\frac{P(H_k)P(A\mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A\mid H_i)}\quad(1\leqslant k\leqslant n)$$

3. 事件的概率的计算

1) 直接计算　古典型和几何型；

2) 用频率估计概率　当 n 充分大时，用 n 次独立重复试验中事件出现的频率，估计在每次试验中事件的概率；

3) 概率的推算　利用概率的基本性质、基本公式和事件的独立性，由简单事件的概率推算较复杂事件的概率。

4) 利用概率分布　利用随机变量的概率分布，计算与随机变量相联系的事件的概率(见第 2,3 讲)。

4. 事件的独立性和独立试验

事件的独立性　称事件 A 和 B 独立，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，如果其中任意个 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 事件同时出现的概率等于各事件概率的乘积。若事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 相互独立，则将其中任意个事件分别换成其对立事件后，所得 n 个事件也独立。

独立试验　称试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 为相互独立的，如果与各个试验相联系的事件之间相互独立。独立重复试验又称做伯努里试验。

三、思考题与例题分析

1. 事件的关系和运算

思考题 1　对于任意二不相容事件 A 和 B，讨论命题"$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 必不相容"和命题"$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 必相容"的正确性。

分析　首先应注意到，两个命题并不是"非此即彼"，因为这里说的是任意两个不相容事件。例如，设事件 A 和 B 都不是不可能事件，若 $A=\overline{B}$，则 $AB=\varnothing$，且 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 不相容；若 $AB=\varnothing$，且 $A+B\neq\Omega$，则 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 相容。当然，对于指定的两个不相容事件，两个命题必有一个是对的，而另一个就一定是错的。

思考题 2　设 A，B 和 C 是任意三事件，讨论下列命题正确性：

(A) 若 $A+C=B+C$，则 $A=B$；

(B) 若 $A-C=B-C$，则 $A=B$。

分析　为说明两个命题都不成立，只需分别举出反例。例如 A，B 是二任意事件，且 $A\neq B$，而 $C=\Omega$ 是必然事件，则 $A+C=B+C$ 且 $A-C=B-C$ 但 $A\neq B$，从而命题(A)和(B)不成立。又如，设 $A\supset B$，$C=AB$，则 $A+C=B+C$ 且 $A-C=B-C$ 但 $A\neq B$，从而命题(A)和(B)不成立。

注意，该题的结果反映了事件的运算与数的运算的不同之处。

思考题 3(单项选择题)　设 A，B 是任意二事件，讨论下列命题正确性，并指出不正确的命题。

(A) 若 A，B 不相容，则 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 可能不相容；

(B) 若 A，B 相容，则 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 也可能相容；

(C) 若 A，$\overline{B}$ 不相容，则 $\overline{A}$，B 也可能相容；

(D) 若 A，$\overline{B}$ 相容，则 $\overline{A}$，B 可能不相容。

分析　只需举例说明(A)，(B)，(C)可能成立。例如，当 $B=\overline{A}$ 时(A)正确；设 $AB\neq\varnothing$，且 $A+B\neq\Omega$，但是 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 不相容即

$\overline{A}\overline{B}=\varnothing$，则$\overline{\overline{A}\overline{B}}=A+B=\Omega$，这与$A+B\neq\Omega$矛盾，可见$\overline{A}$，$\overline{B}$也相容，从而(B)正确；设$A$，$\overline{B}$不相容$A\overline{B}=\varnothing$且$A+\overline{B}\neq\Omega$，但是$\overline{A}$，$B$不相容$\overline{A}B=\varnothing$，则$\overline{\overline{A}B}=A+\overline{B}=\Omega$，这与$A+\overline{B}\neq\Omega$矛盾，可见$\overline{A}$，$B$也相容，从而(C)正确。

于是不正确的是(D)。事实上，设$A=\overline{B}$，则$\overline{A}=B$，从而$\overline{A}$，B相容，故(D)确实不正确。

例1(单项选择题)　对于任意事件A,B,C，若$\overline{A+B}\supset C$，则(　　)。

(A) $\overline{A}+\overline{B}\supset\overline{C}$；　　(B) $\overline{A}\overline{B}\supset\overline{C}$；

(C) $A+B\subset\overline{C}$；　　(D) $AB\subset C$。

分析　应选(C)。因为，由$\overline{A+B}\supset C$，可见$A+B\subset\overline{C}$。此外，容易证明选项(A)，(B)，(D)不成立。事实上，当$A=B$时(A)和(D)都不成立；由于当$\overline{A+B}\supset C$时有$\overline{A}\overline{B}=\overline{A+B}\supset C$，可见(B)不成立。

例2　写出下列随机试验E的基本事件空间Ω。

(1) 设E是自集合$\{0,1\}$的两次还原抽样。

(2) 设E是接连对同一目标射击直到命中目标为止，并观察射击的次数。

(3) 设E是接连进行3次射击，并观测每次射击命中目标的次数。

(4) 设E是自集合$\{0,1,2,3\}$的两次非还原抽样。

(5) 设E是观察某交通干线两次重大交通事故之间的时间间隔。

分析　(1) 用坐标为0或1的二维向量表示随机试验的基本事件，可得随机试验E的基本事件空间$\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$。

(2) 由于随机试验的结局是正整数，可见$\Omega=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$。

(3) 基本事件可以用0和1形成的长为3的数列(三位二进制数)表示，得试验E(接连3次射击)的基本事件空间$\Omega=\{000,$

001,010,011,100,101,110,111},其中0和1分别依次表示脱靶和命中。

(4) $\Omega=\left\{\begin{matrix}(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\\(1,0),(2,0),(3,0),(2,1),(3,1),(3,2)\end{matrix}\right\}$。

(5) $\Omega=(0,\infty)$。

例3　设 A 和 B 是任意二事件,化简下列二式:

(1) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$;

(2) $AB+\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\overline{B}-\overline{AB}$。

分析　该题要求利用事件的关系和运算及其性质,完成事件算式的运算。

(1) 由事件运算的性质,有

$$(A+B)(A+\overline{B})=AA+A\overline{B}+BA+B\overline{B}=A+A(\overline{B}+B)=A$$

$$(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=\overline{A}\overline{A}+\overline{A}\overline{B}+B\overline{A}+B\overline{B}=\overline{A}+\overline{A}(B+\overline{B})=\overline{A}$$

$$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=A\overline{A}=\varnothing$$

(2) 由事件运算的性质,有

$$AB+\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\overline{B}-\overline{AB}=$$

$$(A+\overline{A})B+(A+\overline{A})\overline{B}-\overline{AB}=$$

$$B+\overline{B}-\overline{AB}=\Omega-\overline{AB}=AB$$

例4　证明 $AC=BC$ 成立的充分和必要条件,是 $\overline{A+B}C=\overline{A}C+\overline{B}C$。

证明　(1) 必要性　易见下列各关系式等价:

$$AC=BC,\qquad AC+BC=BC$$

$$(A+B)C=BC,\qquad \overline{A+B}+\overline{C}=\overline{B}+\overline{C}$$

$$BC=AC,\qquad BC+AC=AC$$

$$(A+B)C=AC,\qquad \overline{A+B}+\overline{C}=\overline{A}+\overline{C}$$

其中每4个组两组关系式的最后一步都用到"事件的对偶律"。这样,我们证明了,若 $AC=BC$,则

$$\overline{A+B}+\overline{C}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

将该等式两侧的事件都与事件 C 相交,得 $\overline{A+B}C=\overline{A}C+\overline{B}C$。从

而，证明了等式 $AC=BC$ 成立的必要条件，是

$$\overline{A+B}C=\bar{A}C+\bar{B}C$$

（2）充分性　设$\overline{A+B}C=\bar{A}C+\bar{B}C$ 成立，则由“事件的对偶律”，可见

$$\overline{\overline{A+B}C}=\overline{\bar{A}C+\bar{B}C},\qquad A+B+\bar{C}=AB+\bar{C}$$

在 $A+B+\bar{C}=AB+\bar{C}$ 两侧先同交以事件 C，然后再同交以事件 A，得

$$AC+BC=ABC,\qquad AC+ABC=ABC$$

$$(A+AB)C=ABC,\qquad AC=ABC$$

在 $A+B+\bar{C}=AB+\bar{C}$ 两侧先同交以事件 C，然后再同交以事件 B，得

$$AC+BC=ABC,\qquad ABC+BC=ABC$$

$$(AB+B)C=ABC,\qquad BC=ABC$$

于是，得 $AC=BC$，充分性得证。

2. 概率的概念和基本公式

思考题 4　设 A 和 B 是任意二事件，讨论下列命题正确性：

(1) 若 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$，则 $A=B$；

(2) 若 $\mathrm{P}(AB)=0$，则 $AB=\varnothing$。

分析　两个命题都不成立。考虑向区间[0,1]上掷随机点试验的事件：$A=\{$随机点落到区间$[0,1]$上$\}$，$B=\{$随机点落入区间$(0,1)$内$\}$。显然$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$，$\mathrm{P}(AB)=0$，然而 $A\neq B$，$AB\neq\varnothing$。

例 5　设 A 和 B 为任意二事件，已知 $\mathrm{P}(A)=0.5$，$\mathrm{P}(B)=0.6$，$\mathrm{P}(B|\bar{A})=0.4$，求概率

$$\mathrm{P}(A+B),\quad \mathrm{P}(A-B),\quad \mathrm{P}(A+\bar{B}),\quad \mathrm{P}(A|\bar{B})$$

分析　解该题用到加法、减法、乘法和“除法”等公式（有的文献中把定义“条件概率”的公式称做“除法公式”）。首先求概率 $\mathrm{P}(AB)$。因为 $B-AB=\bar{A}B$，故由概率的减法公式和乘法公式，有

$$\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(\bar{A}B)=\mathrm{P}(\bar{A})\mathrm{P}(B|\bar{A})=0.5\times0.4=0.2$$

$$P(AB)=P(B)-0.2=0.6-0.2=0.4$$

(1) 由概率的加法公式，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7$$

(2) 由概率的减法公式，有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.4=0.1$$

(3) 由概率的加法公式，有

$$\begin{aligned}P(A+\bar{B}) &= P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})= \\ & P(A)+P(\bar{B})-[P(A)-P(AB)]= \\ & 0.5+0.4-0.1=0.8\end{aligned}$$

(4) 由条件概率的定义(除法公式)，有

$$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(\bar{B})}=\frac{0.1}{0.4}=0.25$$

3. 事件的概率的计算

例 6　从 1,2,…,15 等 15 个数中随机取出 3 个，试求下列事件的概率：$A_1=\{3$ 个数最大的是 $10\}$；$A_2=\{3$ 个数大于、等于和小于 7 的各 1 个$\}$；$A_3=\{3$ 个数 2 个大于 7,1 个小于 $7\}$。

分析　从 15 个数中随机取出 3 个，总共有 $C_{15}^3=455$ 种不同取法，即总共有 C_{15}^3 个基本事件，其中有利于 A_1 的取法有 $C_9^2=36$ 种(3 个数最大的是 10，在小于 10 的 9 个数中随意取 2 个有 C_9^2 种不同取法)；有利于 A_2 的取法有 $6\times8=48$ 种(在小于 7 的 6 个数中随意取 1 个，在大于 7 的 8 个数中随意取 1 个，有 6×8 种不同取法)；有利于 A_3 的取法有 $6\times C_8^2=56$ 种(在小于 7 的 6 个数中随意取 1 个，在大于 7 的 8 个数中随意取 2 个)。于是

$$P(A_1)=\frac{36}{455}\approx0.0791,\qquad P(A_2)=\frac{48}{455}\approx0.1055$$

$$P(A_3)=\frac{56}{455}\approx0.1231$$

例 7　假设箱中共有 n 个球，其中 $m(0\leqslant m\leqslant n)$ 个是红球其余是白球。现在一个接一个地接连从箱中抽球，试就还原抽样和非

还原抽样两种不同方式，分别求第 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 次抽球抽到红球的概率 α 和 β。

分析 引进事件 $A_k=\{$第 k 次抽球抽到红球$\}(1\leqslant k\leqslant n)$。对于还原抽样，有

$$\alpha=\mathrm{P}(A_k)=\frac{m}{n}$$

对于非还原抽样有同样结果。问题有多种解法。

解法 1 设想将 n 个球一一编号。这样，不但区分球的颜色，而且区分其编号。如果将 n 个球一个接一个接连从箱中抽出，则不同抽法（基本事件）的总数为 $n!$。导致事件 A_k 的不同抽法共有 $(n-1)!\times m$ 种，即 A_k 共包含 $(n-1)!\times m$ 个基本事件：在第 k 次抽球抽到红球的情形下（这样的情形共有 m 种），其余的 $n-1$ 次抽球的不同抽法的总数，等于从 $n-1$ 个元素的全排列数。从而

$$\beta=\mathrm{P}(A_k)=\frac{(n-1)!\times m}{n!}=\frac{m}{n}$$

解法 2 仍将 n 个球一一编号。从 n 个不同的球中接连抽出 k 个球，相当于从 n 个元素中选 k 个元素的选排列。因此总共有

$$\mathrm{P}_n^k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

种不同抽法，即基本事件的总数为 P_n^k。导致事件 A_k 的不同抽法有

$$\mathrm{P}_{n-1}^{k-1}\times m=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\times m$$

种，即 A_k 共包含 $m\times\mathrm{P}_n^k$ 个基本事件：在第 k 次抽球抽到红球的情形下（这样的情形共有 m 种），前 $k-1$ 次抽球的不同抽法的总数，等于从 $n-1$ 个元素中选 $k-1$ 个元素的选排列数。于是

$$\beta=\mathrm{P}(A_k)=\frac{\mathrm{P}_{n-1}^{k}\times m}{\mathrm{P}_n^k}=\frac{m}{n}$$

注 1° 该例证明了一个直观上容易理解的事实：无论是还原抽样还是非还原抽样，抽到红球的概率与哪次抽样无关，只与红球所占的比率 m/n 有关。2° 两种解法基于对基本事件的两种不同理解。换句话说，我们通过两个不同的途径解决了同一个问题。