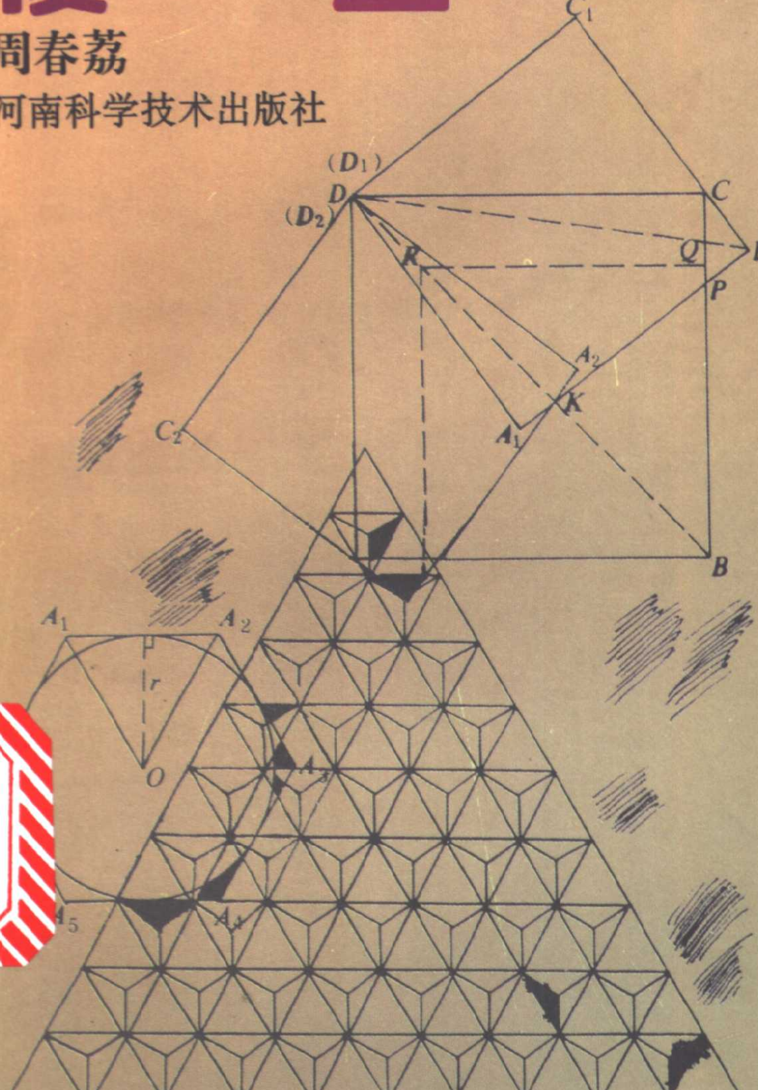
有趣的图形

覆盖

周春荔

河南科学技术出版社



让你开窍的数学

让你开窍的数学

有趣的图形覆盖

周春荔

河南科学技术出版社

内 容 提 要

图形覆盖是组合几何中的内容，问题直观简明易懂，构思精巧方法新颖. 本书构造了一种与中学数学教育密切结合的体系，用较为通俗的语言直观形象而又不失严格性地介绍了图形覆盖的基本知识，并结合例题从不同角度讲述了证明覆盖问题的基本技巧. 在内容叙述上循序渐进，逐步深入，直到面积重叠原理、维他利型问题、凸图形和海莱定理，最后介绍了有趣的盖莱“钉圆”、“果园问题”、“圆盘填装问题”，以及至今尚未解决的著名的“勒贝格问题”. 为读者系统研究图形覆盖问题在知识与方法方面提供了较为充实的资料.

本书可作为中学生的课外读物（其中大部分内容初中生就能看懂），也可作为中学数学教师开展数学课外活动或进行数学奥林匹克培训的材料，并可供初等数学研究人员参考.

让你开窍的数学

有趣的图形覆盖

周春荔

责任编辑 袁 元

河南科学技术出版社出版

（郑州市农业路73号）

河南第一新华印刷厂印刷

全 国 新 华 书 店 发 行

787×1092毫米 32开本 7.25印张 140千字

1997年1月第1版 1998年4月第2次印刷

印数：4 001 7 000册

ISBN 7-5349-1806-5/G·463

定 价：7.90元

序

如果我们打开科学史，研究一些卓越人物成功的经验，就会发现一个重要的事实：他们所研究的正是他们从小就喜欢的.少年时代的达尔文数学成绩不佳，但热爱生物，结果他成为最伟大的生物学家.反之，如果强迫他研究数学，他未必能如此成功.由此可见，兴趣与工作一致，二者形成良性循环，是成功的重要因素.然而兴趣又是怎样形成的呢？这固然与天赋有关，但后天的启发和培养更为重要.数学教师的职责之一就在于培养学生对数学的兴趣，这等于给了他们长久钻研数学的动力.优秀的数学教师之所以在学生心中永志不忘，就是由于他点燃了学生心灵中热爱数学的熊熊火焰.

讲一些名人轶事有助于启发兴趣，但这远远不够.如果在传授知识的同时，分析重要的数学思想，阐明发展概况，指出各种应用，使学生

不仅知其然，而且知其所以然，不仅看到定理的结论，而且了解它的演变过程，不仅看到逻辑之美，而且欣赏到形象之美、直观之美，这才是难能可贵的.在许多情况下，直观走在逻辑思维的前面，起了领路作用.直觉思维大都是顿悟的，很难把握，却极富兴趣，正是精华所在.M.克莱因写了一部大书《古今数学思想》，对数学发展的主导思想有精彩的论述，可惜篇幅太大，内容过深，不易为中学生所接受.

真正要对数学入迷，必须深入数学本身：不仅是学者，而且是作者；不仅是观众，而且是演员.他必须克服一个又一个的困难，不断地有新的发现、新的创造.其入也愈深，所见也愈奇，观前人所未观，发前人所未发，这才算是进入了登堂入室、四顾无峰的高级境界.为此，他应具备很强的研究能力；而这种能力，必须从中学时代起便开始锻炼，经过长期积累，方可成为巨匠.

于是我们看到“兴趣”、“思维”和“能力”三者在数学教学中的重要作用.近年来我国出版了多种数学课外读物，包括与中学教材配套的同步辅导读物和题解.这套《让你开窍的数学》丛书与众有所不同，其宗旨是“引起兴趣、启发思维、训练能力”，风格近似于美国数学教育家G.Polya(波利亚)的三部名著《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》，但更切合我国的实际.本丛书共8本，可从书名看到它们涉及的范围甚为宽广.作者都有丰富的教学经验和相当高的学术水平，而且大都出版过多种数学著作.因此，他们必能得心应手，写得趣味盎然，富于启发性.这套丛书的主要对象是中学、中专的教师

和同学，我们希望它能收到宗旨中确定的效果，为中学数学教学做出较大贡献.

王梓坤

1996.7.

目录

引 子

先请读者看看下面的问题：

“任意面积为 1 的凸多边形一定可以被某个面积为 2 的平行四边形纸片所盖住”；

“一个直径等于 1 的圆不可能被两个直径小于 1 的圆纸片所盖住”；

“桌子可被 100 张正方形的台布完全盖住，现知每一张台布上都有一个火烧的圆洞. 证明：只需用其中的 3 张台布就可完全盖住桌子”.

对这些问题你一定会感到新奇而有趣，或许你会真地动手剪纸试验一番. 这类问题就是平面图形覆盖问题. 只要你熟悉平面几何的基础知识和反证法，经过精巧的构思，正确严谨的推理，就能解决一大批关于平面图形覆盖的问题. 在这个过程中，你会发现，自己分析问题和解决问题的能力会大有长进——课本上的知识巩固了，头脑灵活了，解题的“胃口”增强了，对

数学的兴趣浓烈了！从这个意义上说，妙趣横生的图形覆盖问题不正是一种启智益人的“思维体操”吗？

1

什么是图形覆盖？

考虑到读者的情况，在本节，我们只是从几何直观意义上对一些图形覆盖的基本概念作些初步的介绍.

剪一张边长为1的正方形纸板甲，在桌面上画一个边长为0.8的正方形乙. 你能用单位

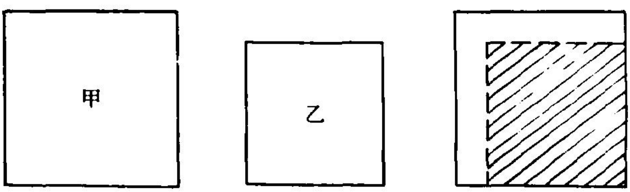


图1.1

正方形纸板甲盖住边长为0.8的正方形乙吗？

结论是显然的. 图1.1给出了一种实现用甲盖住乙的方法. 这时，我们看到：乙的每一点都在甲的覆盖之下，即正方形乙的每一点都与

一个正方形甲的点重叠.

通过上面这个简单例子的操作与分析，什么叫做图形的覆盖，其意义就比较清楚了.

定义 1.1 若 G 是一张纸片，F 是一个平面图形，如果把纸片 G 放在平面上某个适当的位置，使 F 的每一点都与 G 的点重叠，则称纸片 G 覆盖了平面图形 F.

容易想到，G 放在平面上的某个适当的位置并不一定是唯一的位置. 例如用单位正方形纸片甲去覆盖边长为 0.8 的正方形乙，就可以有许多种不同的覆盖方式.

由于我们经常要判定一张硬纸片 G 能不能盖住一个平面图形 F，所以我们约定，G 经过运动放在平面上的过程中，其形状大小均不改变. 换句话说，G 经过的运动是"合同"变换. 凡是下文中说到的纸片，都是指在运动中保持形状大小不变的"硬纸板".

定义 1.2 如果无论纸片 G 放在平面上什么位置，平面图形 F 中都至少有一点不能被 G 盖住，则称 G 不能覆盖 F.

在我们所考察的问题中，用来覆盖的纸片形状可以各异，但我们要求它必须是个平面区域(例如图 1.2 所示的由一条封闭不自交的曲线 l 所包围的平面部分(含 l 在内))；而被盖的图形可以是一个平面区域，也可以是一条平面曲线，或者是离散分布的若干个点，总之，被盖的图形是一个平面点集.

有时我们要用多张纸片去覆盖一个平面点集，因此，对多张纸片覆盖的概念也要有所限定.

定义 1.3 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 共 n 张纸片，F 是一个平面点

集. 若存在一种放置 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的方法，使 F 中每一点都至少被某个 G_i 所盖住，则称这 n 张纸片 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 能覆盖点集 F.

如果无论怎样放置这 n 张纸片，都至少有 F 中一个点不能被这 n 张纸片中任一个盖住，就称这 n 张纸片 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 不能覆盖 F.

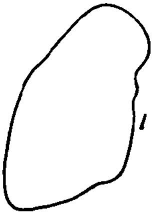


图 1.2

显然，图形覆盖有下列性质：

性质 1 纸片 G 可以覆盖住与它全等的平面区域.

性质 2 若纸片 G 能覆盖 G_1，G_1 能覆盖 G_2，则纸片 G 能覆盖 G_2.

性质 3 若纸片 G_1 能覆盖 F，纸片 G_2 也能覆盖 F，则 G_1 与 G_2 的公共部分必能覆盖 F.

性质 2 与性质 3 对研究图形覆盖是非常有用的.

性质 4 G 与 F 都是平面区域. 若 G 能覆盖 F，则 G 的面积一定不小于 F 的面积.

2

圆面覆盖

用一张圆纸片覆盖一个点集 F,则该圆纸片称为点集 F 的覆盖圆.由覆盖定义可得

定理 2.1 如果能在点集 F 所在平面上找到一点 O,使得点集 F 中的每一点与 O 的距离都不大于 r(定长),则 F 必可被一个半径为 r 的圆纸片 G 所覆盖(图 2.1).

例 2.1 有两张圆纸片$\odot(O_1,r_1)$,$\odot(O_2,r_2)$,如果 $r_1\geqslant r_2$(图 2.2),则圆纸片$\odot(O_1,r_1)$一定能盖住圆纸片$\odot(O_2,r_2)$.

证 将圆心 O_1 与 O_2 重合为点 O,则$\odot(O,r_2)$上任一点到 O 的距离 r_2 均不超过 r_1.所以,根据定理 2.1,$\odot(O,r_2)$必可被一个半径为 r_1 的圆纸片$\odot(O_1,r_1)$所覆盖.

例 2.1 告诉我们这样一个事实:半径较小

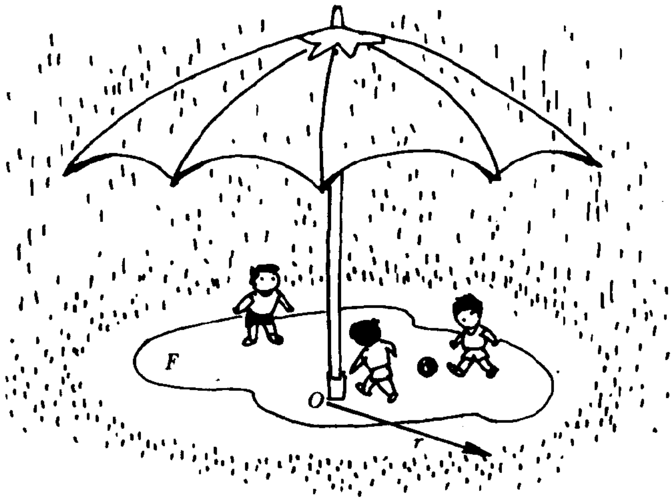


图 2.1

的圆纸片一定能被半径较大的圆纸片所覆盖.

例 2.2 若⊙(O,r)盖住两个点 A 与 B,则⊙(O,r)必能盖住连结 A,B 两点的线段 AB.

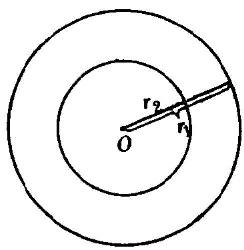


图 2.2

证 若 O,A,B 三点共线,容易想到,线段 AB 上任一点到 O 的距离都不超过 r. 所以线段 AB 可被⊙(O,r)盖住.

若 O,A,B 不共线,则连结 OA,OB,AB 可得$\triangle OAB$,不妨设 $OA\leqslant OB\leqslant r$. 设 P 为线段 AB 上任一点,连结 OP(图

2.3)，

$\because$ $OB \geqslant OA$，$\therefore \angle A \geqslant \angle B$.

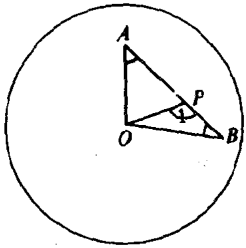


图 2.3

又 $\angle 1 \geqslant \angle A$，$\therefore$ $\angle 1 \geqslant \angle B$.

在$\triangle OBP$中，由$\angle 1 \geqslant \angle B$ 可得 $OB \geqslant OP$. 即有 $OP \leqslant OB \leqslant r$. 根据定理 2.1，线段 AB 必可被$\odot(O,r)$所覆盖.

例 2.3 若$\odot(O,r)$盖住 n 个点 $A_1, A_2, \cdots A_{n-1}, A_n$，则$\odot(O,r)$必能盖住连结这 n 个点的折线 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$.

这是例 2.2 的直接推广，其结论是显然的.

由例 2.3 可以得出下面的结论：

若圆纸片$\odot(O,r)$盖住了 n 边形的 n 个顶点 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}, A_n$，则这圆纸片$\odot(O,r)$必可盖住这个 n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$.

例 2.4 单位正方形可以被半径不小于$\sqrt{2}/2$的圆纸片所覆盖.

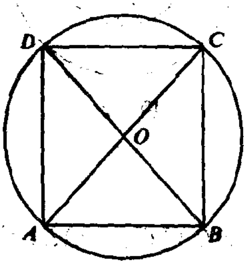


图 2.4

证 设 $ABCD$ 为单位正方形. 连结 AC，BD 交于 O，容易由勾股定理计算得

$$OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

因此，以 O 为圆心，$\sqrt{2}/2$ 为半径画圆过 A, B, C, D 四点(图 2.4)，依例 2.2 的结论可知，圆纸片$\odot(O, \sqrt{2}/2)$可

盖住单位正方形 $ABCD$. 由例 2.1 知，任何半径不小于 $\sqrt{2}/2$的圆纸片必可盖住半径为$\sqrt{2}/2$的圆纸片，再根据性质 2(传递性)即知，单位正方形可以被半径不小于 $\sqrt{2}/2$ 的圆纸片所覆盖.

例 2.5 证明:平行四边形能够被直径不小于较长对角线的圆纸片所覆盖. 即已知$\square ABCD$，$BD \geqslant AC$(图 2.5)，求证:直径不小于 BD 的圆纸片必可覆盖$\square ABCD$.

证 设对角线 AC，BD 交于点 O. 由于 O 为 BD，AC 的中点，又 $BD \geqslant AC$，所以

$$OA=OC \leqslant OB=OD.$$

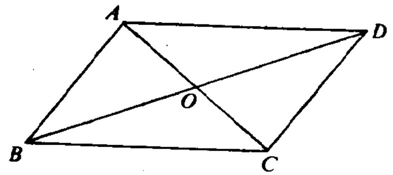


图 2.5

因此，A，C 均在以 BD 为直径的圆内. 所以 A，B，C，D 四点均被以 BD 为直径的圆纸片盖住，从而平行四边形 $ABCD$ 被以 BD 为直径的圆纸片盖住. 再根据性质 2 知，直径不小于 BD 的圆纸片必可盖住$\square ABCD$.

例 2.6 证明:周长为 $2l$ 的平行四边形能够被半径为$\frac{l}{2}$的圆纸片所覆盖.

证 设图 2.4 中$\square ABCD$ 周长为 $2l$，立刻推出 $BD<AB+AD=l$，$OD<\frac{l}{2}$. 由例 2.5 的结论即得证.

例 2.7 桌面上放有一个丝线做成的线圈，它的周长为

2l. 求证：不管线圈形状如何，都可以被一个半径为$\frac{l}{2}$的圆纸片所覆盖.

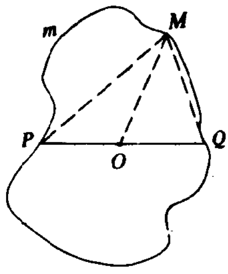


图 2.6

分析 由于线圈可以构成任意形状的曲线 m，当 m 是平行四边形时，就是例 2.6 的情形，因此可以依据例 2.6 的证明找到证题的线索. 其实，这正是将 B，D 两点平分$\square ABCD$ 的周长，圆心 O 取在 BD 中点的性质加以拓广.

证 在曲线圈 m 上取一点 P 及另一点 Q，使 P 和 Q 将曲线 m 分为等长的两段，每段各长为 l. 连结 PQ(图 2.6). 设 O 是线段 PQ 的中点，在 m 上任取一点 M，连结 MO，MP，MQ，则

$$\begin{aligned} OM &\leqslant \frac{1}{2}(MP+MQ) \\ &\leqslant \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MP}+\overset{\frown}{MQ}) \\ &= \frac{1}{2}l. \end{aligned}$$

因此，以 O 为中心，$\frac{l}{2}$为半径的圆纸片一定能覆盖整个曲线圈 m.

例 2.8 $\triangle ABC$ 中，$\angle C \geqslant 90°$，求证：$\triangle ABC$ 必能被一个半径为$\frac{1}{2}AB$ 的圆纸片所覆盖，并且这个圆是所有能覆盖$\triangle ABC$ 的圆中半径最小的.

证 我们以 AB 的中点 O 为圆心，$\frac{1}{2}AB$ 为半径画圆(图 2.7)，则 AB 为$\odot O$ 的直径. 由于$\angle C \geqslant 90°$，由与圆有关的角