

初中學生文庫

代數捷徑

編者 華襄治



中華書局編印

代數捷徑

目次

第一章 緒論

頁數

代數的特色.....	1
記號.....	1
正數及負數.....	3
正負數的四則.....	5
代數式的分類.....	9

第二章 整式四則

加法.....	11
減法.....	13
括號用法.....	15
乘法.....	19
除法.....	24

第三章 一次方程式

等式.....	31
整式	31
方程	32

方程式中重要術語.....	32
整式的次數.....	33
方程式的次數.....	33
一元一次方程式的解法.....	34
簡法.....	39
代數式的表示事實.....	40
✓一元一次方程式應用問題.....	43

第四章 一次聯立方程式

聯立方程式.....	56
二元一次聯立方程式.....	57
二元一次方程式應用問題.....	66
三元一次方程式.....	75
✓三元一次方程式應用問題.....	84

第五章 因式

公式.....	89
公式的應用.....	89

第六章 最高公約式及最低公倍式

單項式的最高公約式.....	100
多項式的最高公約式(其一).....	101

✓ 多項式的最高公約式(其二).....	102
單項式的最低公倍式.....	108
多項式的最低公倍式(其一).....	110
✓ 多項式的最低公倍式(其二).....	111

第七章 分式

分式的基本性質.....	116
約分.....	116
分式四則.....	119

第八章 分方程式

分方程式的解法.....	123
用去分母法解分方程式.....	124
✓ 簡法.....	126
聯立分方程式.....	129
以分式表示種種事實.....	132
✓ 一元分方程式應用問題.....	133
✓ 聯立分方程式應用問題.....	135

✓ 第九章 平方根

冪與根.....	140
單項式開平方.....	141
多項式開平方(其一).....	142

多項式開平方(其二).....	142
數的開平方.....	144
分數開平方.....	149

第十章 二次方程式

一元二次方程式的形狀.....	154
無一次項的方程式.....	154
由析因式的解法.....	157
由公式的解法.....	160
判別式.....	166

第十一章 二次聯立方程式

一方程式爲一次的.....	169
兩方程式都二次的.....	171
✓ 應用問題.....	174

習題的答

代數捷徑

第一章 緒論

代數的特色

代數與算術，同為研究關於數的問題的，其相異之點，在算術用數字計算，而代數則用 $a, b, c, \dots, x, y, z$ 等字母以代替數字，使研究的途徑簡明，且其性質為一般的。例如 $3+7=7+3$, $5+4=4+5$ ，其相加之數可變更其順序而結果相同，代數上對此關係，可一般的令二數為 a, b ，以 $a+b=b+a$ 來表示；又如乘法 $3 \times 5=5 \times 3$ ，其二數之積雖交換二數的位置而結果同一，代數上可表以 $a \times b=b \times a$ ；又如已知大小二數的和差求二數的問題，依算術計算，以和差相加再二等分之得大數，由和減去差再二等分之得小數，如用字母來表示，可令大數為 x ，小數為 y ，和為 a ，差為 b ，則

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \frac{a-b}{2},$$

即為二數和差問題一般的解法。

記號

1. 符號

代數以 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 為四則符號， $=$ 為相等符號，並

於括號的用法,都與算術相同;惟乘法在數字與數字相乘,必須用 $\times$,否則常省略不記。

例如 $3 \times a = 3a$, $5 \times a \times x = 5ax$;

$$a \times b \times c = abc,$$

又如 $a \times (b - c) = a(b - c)$,

$$15 \times (x - y) = 15(x - y),$$

$$(a + b) \times (x - y) = (a + b)(x - y).$$

在不與小數點相混的地方,有用點($\cdot$)以代 $\times$ 的;

例如 $3 \times 4 \times 5 \times 6 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.

除法用括線以代 $\div$ 的亦多,例如

$$a \div b = \frac{a}{b}, \quad (a - b) \div (x + y) = \frac{a - b}{x + y}.$$

以上加減乘除的符號稱為演算記號,此外尚有 $>$ 、 $<$ 、 $\neq$ 等不等號。

2. 係數、冪、指數

在 $3 \times a \times x = 3ax$, 其 3 稱為 ax 的係數, $3a$ 稱為 x 的係數;又於 $15axy$, 其 15 為 axy 的係數, $15a$ 為 xy 的係數。以上如係數 3、15 特稱為數字係數。又由幾個數乘得的積,其各數稱為積的因數;如以幾個相同因數乘得的積,稱為其數的冪的表示,將因數的個數,記小字於因數的右肩;例如 $xxxx = x^4$, $aaaaa = a^5$, 此 4 或 5 稱為

其 要 的 指 數

a^1 即 a 的自身,指數 1 通常可以不記.

正 數 及 負 數

1. 自然數

從 1 起,如下列整數,稱自然數.

1、2、3、4、5、6、.....

2. 零

任取自然數中一數如 4,從 4 減去 1,則得其左隣的數 3;從 3 減去 1,則得其左隣的數 2;從 2 減去 1,則又得其左隣的數 1;從 1 減去 1,此時已無殘餘,即

$$1-1=0$$

此 0 在代數上作為一個數,置於 1 的左隣.

3. 負數

從零減去 1,其差亦為數,記作 -1 ,置於 0 的左隣;又從 -1 減去 1,其差為 -2 ;從 -2 減去 1,其差為 -3 ;以下照此類推,茲表示如次:

....-7、-6、-5、-4、-3、-2、-1、0、1、2、3、4.....

一般 b 大於 a 時, $a-b$ 等於 $-(b-a)$,即

$$\underline{a-b=-(b-a)}$$

又一般從某數減去與某數相同的數,其差常爲零,即

$$a-a=0$$

上述事項,不但適用於整數,並適用於分數;例如

$$0-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{6},$$

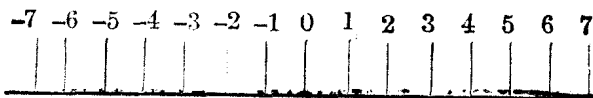
$$\frac{2}{5}-\frac{2}{5}=0.$$

由是凡小於 0 的數,稱爲負數;反之凡大於 0 的數,稱爲正數;0 介乎正數與負數之間,不屬於正數或負數。正負數及 0,稱爲代數數。

置於正負數前的 +、- 號,稱爲數的性質符號,或單稱數的符號;其 + 爲正號, - 爲負號。數的前面,沒有數的符號的,稱其數的絕對值;例如 +3 的絕對值爲 3, -7 的絕對值爲 7。

4. 數的大小

在下面數列中,



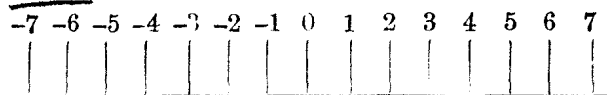
各數大於其左首的數,而小於其右首的數。

正數大於零及負數,零大於負數。

正數愈大,其絕對值愈大;負數愈大,其絕對值愈小.

正負數的四則

1. 加法



在上面數列中,數向右進則增加,向左退則減少.
某數 a 加正數 b ,就是在上面數列中從 a 向右進 b 的意思;例如

$$(+2) + (+3) = +5,$$

$$(-5) + (+4) = -1.$$

又於某數 a 加負數 b ,就是從 a 向左退 b 的絕對值的意思;例如

$$(+8) + (-6) = +2,$$

$$(-8) + (-4) = -12.$$

依以上理由,得加法規則如次:

- 一、同號二數的和,等於其絕對值的和,記以公共的符號.
- 二、異號二數的和,等於其絕對值的差,記以絕對值較大的符號.
- 三、絕對值相等而符號相異的二數,其和爲零;零與某數

相加,其和即等於某數.

今設 $a > b > 0$, 則

$$(+a) + (+b) = +(a+b),$$

$$(-a) + (-b) = -(a+b),$$

$$(+a) + (-b) = +(a-b),$$

$$(-a) + (+b) = -(a-b),$$

$$(+a) + (-a) = 0,$$

$$0 + (+a) = +a,$$

$$0 + (-a) = -a.$$

由代數數的和得成立以下規則:

I. 交換規則

$$a + b = b + a;$$

II. 結合規則

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

習題一

求下列各式的和:

1. $(+45) + (+32),$
2. $(+37) + (-25),$
3. $(-45) + (+18),$
4. $(-47) + (-50),$
5. $(+38) + (-56) + (+43).$

2. 減法

減法爲加法的反求,從某數 a 減去正數 b ,在以上數列中就是從 a 左退 b 的意思;從某數 a 減去負數 b ,就是從 a 右進 b 的絕對值的意思。

例如

$$(-8) - (+4) = -12,$$

$$(-8) - (-4) = -4.$$

一般

$$a - (+b) = a + (-b).$$

由是凡減去某數,可變其符號而加於被減數即得。

從某數減去零,其差即等於某數。

習題二

求下列各式的差:

1. $(+15) - (+9)$,
2. $(+10) - (+13)$,
3. $(-5) - (+9)$,
4. $(-5) - (-9)$,
5. $0 - (-18)$.

3. 乘法

乘法須依下列規則:

I. 同號二數的積,等於二數絕對值的積,記以正號。

例如 $(+3)(+5) = +15$, $(-7)(-3) = +21$.

II. 異號二數的積, 等於二數絕對值的積, 記以負號

例如 $(-3)(+5) = -15$, $(+7)(-3) = -21$.

一般設 a, b 為任意二正數, 則

$$(+a)(+b) = +ab,$$

$$(-a)(-b) = +ab,$$

$$(+a)(-b) = -ab,$$

$$(-a)(+b) = -ab.$$

【注意】某數與零的乘積為0.

由乘法得成立以下規則:

I. 交換規則 $ab = ba$;

II. 結合規則 $(ab)c = a(bc)$.

習題三

求次各式的積:

1. $(+3)(+7)$, 2. $(-3)(+7)$, 3. $(-5)(+4)$,

4. $(-15)(-3)$, 5. $(-7)(-6)$, 6. $(-8)(-9)$,

7. $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{1}{2}\right)$, 8. $\left(-1\frac{1}{2}\right)\left(-5\frac{1}{3}\right)$,

9. $(+2)(-3)(-4)$, 10. $(-2)(+3)(+4)$.

4. 除法

除法為乘法的反求, 所以符號規則與乘法相同,

同號為正, 異號為負.

例如 a, b 爲任意二正數,則

$$(+a) \div (+b) = +\frac{a}{b}, \quad (-a) \div (-b) = +\frac{a}{b};$$

$$(+a) \div (-b) = -\frac{a}{b}, \quad (-a) \div (+b) = -\frac{a}{b}.$$

以不爲零的數除零,得商爲零.

以零爲除數,通常視爲不可能.

習題四

練習以下各式的除法:

1. $(+72) \div (+8),$
2. $(-84) \div (+7),$
3. $(-135) \div (-9),$
4. $(+96) \div (-6),$
5. $\left(-\frac{5}{7}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right),$
6. $\left(-\frac{2}{5}\right) \div \left(+\frac{4}{5}\right),$
7. $0 \div \left(-\frac{3}{5}\right)$
8. $(-144) \div (-12).$

代數式的分類

就數字及字母,用加減乘除開方等符號表示的算式,叫代數式.例如

$$a+5b-3c,$$

$$ax^3+bx^2+cx+d,$$

$$\sqrt{x^2+25}+\sqrt{x^2-16},$$

$$\frac{x^3+5x^2+7x-8}{x^2-4x+5}.$$

代數式分爲有理式與無理式.

有理式不含開方,或含開方而根號裏無字母的,例如

$$3x^2 - 7x + \sqrt{3},$$

$$\sqrt[3]{3}a + \frac{b}{\sqrt{5}}.$$

無理式既含開方,並且根號裏有字母的;例如

$$\sqrt{a}x^3 + 3\sqrt{b}x^2 + cx + d,$$

$$\frac{5xy+z}{\sqrt{5m}}.$$

有理式又分爲有理整式與有理分式.

有理整式或單稱整式,式中不含除,或含除而除數裏

沒有字母;例如

$$5ax^3, \quad ax^2 + bx + c, \quad \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{7}x + 5.$$

有理分式或單稱分式,式中既含除,並且除數裏有字母;例如

$$\frac{6ax}{5b}, \quad \frac{5}{x} + \frac{x}{y^2}, \quad \frac{x^3-1}{a} + 8b.$$

有理整式又分爲單項式與多項式.

單項式祇有一項,多項式不止一項;例如 $x, 2x^2, -2ay$

等爲單項式, $x^2 - 3x + 2$ 爲多項式.

今將代數式的分類,列表如次:

$$\text{代數式} \begin{cases} \text{有理式} \begin{cases} \text{有理整式} \begin{cases} \text{單項式} \\ \text{多項式} \end{cases} \\ \text{有理分式} \end{cases} \\ \text{無理式} \end{cases}$$

第二章 整式四則

加 法

① 同類項加法

如 $7xy$ 、 $-3xy$ 、 $-\frac{1}{2}xy$ 或 $3a^2b$ 、 $-4a^2b$ 、等，祇有係數相異的單項式，叫同類項。

求同類項 $2a$ 與 $3a$ 的和，就是求 a 的 2 倍與 a 的 3 倍的和，其和為 a 的 $(2+3)$ 倍即 a 的 5 倍，所以

$$2a+3a=(2+3)a=5a.$$

又求 $3a$ 與 $-2a$ 的和，就是求 a 的 3 倍與 a 的 -2 倍的和，其和為 a 的 $(3-2)$ 倍即 a 的 1 倍，因係數 1 可以省寫，所以 $3a-2a=a$ 。

例 1. $7a-5a+3a-2a=(7-5+3-2)a=3a$

例 2. $7a^2b-5a^2b+3a^2b-2a^2b=(7-5+3-2)a^2b$
 $=3a^2b$

② 單項式加法

加 b 於 a 則得 $a+b$ ，因 a 與 b 非同類項，所以此式不能再併成簡單。

例 1. 求 $5a$ 、 $-4b$ 、 $5b$ 、 $-6a$ 、 $2a$ 的和。

【解】 依原有符號將各項列成一式，再併其同類

項即得.

$$\begin{aligned} 5a-4b+5b-6a+2a &= 5a-6a+2a-4b+5b \\ &= (5-6+2)a+(-4+5)b \\ &= a+b \end{aligned}$$

例 2. 試整理 $-7x^2-2x^3+5x-7x+3x^2+3x^3-1$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } -7x^2-2x^3+5x-7x+3x^2+3x^3-1 \\ &= 3x^3-2x^3-7x^2+3x^2+5x-7x-1 \\ &= x^3-4x^2-2x-1 \end{aligned}$$

【注意一】 多項式的各項,須以某字母爲主,依冪數(指數)大小順序排列.若從左向右各項,某字母冪數順次增加的,叫昇冪式;反之順次減少的,叫降冪式.上例就是依 x 的降冪整理的.

【注意二】 字母須依順序排列.

3. 多項式加法

例 1. $a-b+c$ 加 $-f+g-k$.

因兩式無同類項,且不須依字母順序及冪數大小整理,所以將第二式續列於第一式之右便可,即其和爲 $a-b+c-f+g-k$.

例 2. $3a-2b+c$ 加 $-2a+b-2c$.

依前例先列成一式, $3a-2b+c-2a+b-2c$, 再併