高等数学自学丛书

无穷级数

张效先　丛树藩
张　瀚　李学敏　编

山东教育出版社

高等数学自学丛书

无穷级数

张效先　丛树藩
张　瀚　李学敏　编

山东教育出版社
一九八二年·济南

高等数学自学丛书
无穷级数
张效先 丛树藩
张 瀚 李学敏 编
*
山东教育出版社出版
(济南经九路胜利大街)
山东省新华书店发行 山东新华印刷厂临沂厂印刷
*
787×1092毫米32开本 8.25印张 174千字
1982年9月第1版 1982年9月第1次印刷
印数1—9,500
书号 13275·1 定价 0.65元

出 版 说 明

为了满足广大读者自学高等数学的需要，我们出版了这套高等数学自学丛书，包括《数学分析基础》、《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《无穷级数》、《多项式代数》、《线性代数》、《抽象代数》、《空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《布尔代数》等十册。

这套丛书起点较低，系统性较强，次序的编排尽量作到由浅入深、由易到难，注意循序渐进，并适当渗透了一些现代数学的观点。在编写过程中，力求作到内容讲述详细，文字通俗流畅；书中安排了较多的例题和习题，书末附有习题答案或提示。因此，这套丛书适合自学，也可作为这些课程的教学参考书。

这套丛书由山东师范大学数学系主持编写。此外，还得到山东大学数学系、曲阜师范学院数学系、聊城师范学院数学系等单位的大力支持和帮助，在此一并致谢。

一九八一年十二月

目　录

第一章　数　　列

本书所介绍的是无穷级数的基本理论。为此，有必要在开始时着重复习数列（指无穷数列）的概念，列出关于数列的定理，并将这些定理的证明，安排在本章的复习题里。

§1·1　数列及其极限的概念

数列的极限概念，是一切极限概念的基础，也是建立级数理论的基础。

一、数列的概念

在这本书里，凡说到的数都是实数。全体实数的集合记为R^1；全体自然数的集合记为I^+。

所谓自然数的顺序，是指全体自然数按照逐一增大而排列的顺序。即

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ n+1,\ \cdots.$$

定义 1　（数列的定义）

按照自然数顺序编了号的一列数：

$$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots, \qquad \{S_n\}$$

称为一个数列。简记为$\{S_n\}$。其中的S_1称为这个数列的第一项，S_2称为第二项，…，S_n称为第n项，…。

数列$\{S_n\}$的项S_n显然是$n \in I^+$的函数：$S_n = f(n)$。这个函数的公式表示式，称为这个数列的通项公式。在研究具

体的数列时，知道它的通项公式是很有价值的。因为我们这里所说的数列都是无穷数列，也就是说它的项数是无穷的；所以，把一个数列的项全部写出来是不可能的。但是，如果有了一个数列的通项公式，我们就能够写出它的每一项（在这里，涉及到认识无限的一个方法论的问题：一个数列的项是无穷多的，因此，不能够要求“写出它的所有的项”；但是，可以要求“写出它的任意指定的一项”）。

例 1　数列$\left\{S_n=\frac{n}{n+1}\right\}$，即

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots.$$

例 2　数列$\left\{S_n=\frac{(-1)^n}{n}\right\}$，即

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots.$$

例 3　数列$\left\{S_n=\frac{1-(-1)^n}{2}\right\}$，即

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots.$$

例 4　数列$\left\{S_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right\}$，即

$$-1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ \cdots.$$

例 5　数列$\left\{S_n=\begin{cases}n, & \text{当} n=3K\text{时}, \\ 1, & \text{当} n\neq 3K\text{时}；\end{cases}\ K=1,\ 2,\ \cdots\right\}$，即

$$1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 1,\ 9,\ \cdots.$$

例 6　数列$\left\{S_n=\frac{1}{n-(-1)^n}\right\}$，即

$$\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{7},\ \cdots.$$

有些数列，它的通项公式不易求出；或是它的通项公式很复杂，不便于使用。这时，我们宁肯不追究它的通项公式，而代之以适当的叙述，来把握这个数列的任意一项。

例 7 我们知道 2 的算术平方根是个无限不循环小数，即$\sqrt{2}=1.41421\cdots$。它的不足近似值构成如下的数列：

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \cdots.$$

因为用开平方的方法可以求出这个数列的任意一项，所以，这是个确定的数列。我们就不必追究它的通项公式了。

值得注意的是，我们仅仅给出一个数列的前若干项，严格地说，这并不能唯一地确定这个数列。如

例 8 设有数列 $2,\ 4,\ 8,\ \cdots$。

即给了这数列的前三项：$S_1=2$，$S_2=4$，$S_3=8$。于是，我们可以认为它的通项公式是

$$S_n=2^n.$$

但是，也要注意到：通项公式是

$$a_n=n^2-n+2,$$

$$b_n=2^n+(n-1)(n-2)(n-3),$$

$$c_n=2^n+\alpha(n-1)(n-2)(n-3),\ \alpha\neq 0,\ \alpha\neq 1$$

的数列，它们的前三项也都是 2，4，8。

例 9 数列$\{S_n=c$（常数）$\}$：

$$c,\ c,\ c,\ \cdots,\ c,\ \cdots$$

称为常值数列。

定义 2 （**数列的子列**）

设$\{n_i\}$是由自然数组成的数列，并且满足条件

$$n_i<n_{i+1},\ i=1,\ 2,\ \cdots,$$

则称数列$\{S_{n_i}\}$：

$$S_{n_1}, S_{n_2}, \cdots, S_{n_i}, \cdots$$

是已给数列$\{S_n\}$的子数列，或子列。

一般地说，从一个数列$\{S_n\}$中，删去有限项，或者，删去无穷多项但仍保留无穷多项，这样，由保留下来的项构成的新数列（其各项的前后顺序关系不得改变！），就是数列$\{S_n\}$的子列。但是，$\{S_n\}$本身也是它自己的子列。

例10 设有数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$：

$$1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots.$$

则下列诸数列都是它的子列：

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n+2}, \cdots;$$

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{2n-1}, \cdots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{2n}, \cdots;$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \cdots, \frac{1}{3n}, \cdots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots;$$

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \cdots, \frac{1}{10^n}, \cdots;$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots.$$

二、单调数列与有界数列

定义 3 （单调数列）

如果数列$\{S_n\}$对于任意的$n\in I^+$恒有

（1） $S_n\leqslant S_{n+1}$，则称这个数列是递增的；

（2） $S_n\geqslant S_{n+1}$，则称这个数列是递减的。

递增数列与递减数列统称为单调数列。

不单调的数列称为摆动数列。

例11 数列$\left\{S_n=\dfrac{1}{n}\right\}$是递减的；

数列$\left\{S_n=-\dfrac{1}{n}\right\}$是递增的；

数列$\left\{S_n=\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$是摆动的。

在例11中的前两个单调数列，它们的任意相邻两项皆不相等。这样的任意相邻两项皆不相等的单调数列，称为狭义（或严格）单调的数列。与此相对应，如果相邻的项有时是相等的，则称为广义单调的数列。

定义 4 （有界数列）

设$\{S_n\}$是一个数列。如果存在$M\in R^1$，使得对于任意的$n\in I^+$，恒有

$$|S_n|\leqslant M,$$

则称数列$\{S_n\}$是有界的；数M称为这个数列的界数。

在前面的例子中，例1、2、3、4、6、7、9、10、11，都是有界数列。

有界数列的界数不是唯一的，而是无穷多个。如例11中的三个数列，数1就是它们的一个界数；进而，大于1的任何数也都是它们的界数。

有时，要把数列有界的概念，细分为有上界（或称为上

方有界）与有下界（或称为下方有界）。

定义 4′ （数列有上界、有下界）

设$\{S_n\}$是一个数列。如果存在$M_1\in R^1$，使得对于一切$n\in I^+$，恒有

$$S_n\leqslant M_1,$$

则称这个数列$\{S_n\}$有上界，数M_1就是它的一个上界。

如果存在$M_2\in R^1$，使得对于一切$n\in I^+$，恒有

$$S_n\geqslant M_2,$$

则称这个数列$\{S_n\}$有下界；数M_2就是它的一个下界。

很明显，既有上界又有下界的数列必有界。反之，有界数列必有上界与下界。

我们还要用到无界数列的概念。它实际上就是有界数列概念（定义 4 ）的否定形式。根据逻辑学的要求，在叙述一个概念的否定形式时，必须用肯定的语句，而不用否定的语句。因此，我们又有下面的定义。

定义 4″ （数列无界的定义）

如果对于任意的$M\in R^1$，都相应存在$n_M\in I^+$，使得

$$|S_{n_M}|>M,$$

则称数列$\{S_n\}$是无界的。

仿此，还可以分别给出数列无上界与无下界的定义（见复习题一第 4 题）。

前面例5与例8中的数列都是无界数列；它们都是有下界、无上界的数列。

数列有界、无界的几何解释：按定义 4，数列$\{S_n\}$有界是指：存在$M>0$，使得数列$\{S_n\}$所有的项S_n（所对应的在数轴上的点），都在以原点为中心的闭区间$[-M, M]$之

中（见图1—1）。

注意：数轴上的同一个点，有可能表示数列的很多项，如例3、4、5、9等。

按定义4″，数列$\{S_n\}$无界是指：对于任意的数$M>0$，在闭区间$[-M, M]$之外，必有数列$\{S_n\}$的项。事实上，在这个闭区间之外必有这数列的无穷多项；进一步说，在这个闭区间之外必有无穷多个表示这数列的项的点（见图1—2）

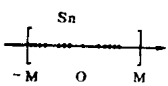

图1—1

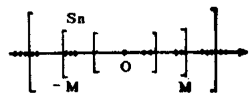

图1—2

三、收敛数列的概念

收敛数列是本章的主要研究对象

定义5　（数列收敛的定义）

设有数列$\{S_n\}$及常数A，如果对于任意给定的正数ε，都相应存在自然数N，使得对于满足不等式

$$n>N$$

的一切自然数n，恒有不等式　　$|S_n-A|<\varepsilon.$

$$|S_n-A|<\varepsilon$$

成立，则称数列$\{S_n\}$有极限，常数A就是这个数列的极限。记为

$$\lim S_n=A \quad 或 \quad S_n\to A。$$

有极限的数列称为收敛数列；数列以A为极限，也称这数列收敛于A。

如第一段里，例 1 的数列以数 1 为极限；例 2、6、10、11的数列都是收敛于零的；例 7 的数列收敛于$\sqrt{2}$；例 9 中的常数数列收敛于这常数C本身。

定义 5 中的ε是给定的、任意小的正数。正因为ε可以任意小，这才表达了数列的项S_n与常数A可以任意接近。

定义 5 中的N是依赖于ε的、充分大的正数。N的作用，是用不等式$n>N$限制数列的项的编号n要大到什么程度。本书限定N也是个自然数；这样，N本身就也是数列的项的一个编号（也可以不限定N是自然数，这样有时更方便些。这时N就不是数列的项的一个编号了）。

$S_n \to A$的几何解释：

我们知道

$|S_n - A| < \varepsilon \Longleftrightarrow A - \varepsilon < S_n < A + \varepsilon \Longleftrightarrow S_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

于是，按照定义 5，$S_n \to A$是指：对于点A的任何ε邻域，都相应地存在$N \in I^+$，使得数列$\{S_n\}$的第N项以后的项

$$S_{N+1},\ S_{N+2},\ \cdots,\ S_{N+P},\ \cdots,$$

都在点A的ε邻域$(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$之内。

注意：这里并没有说这数列的前N项S_1，S_2，…，S_N一定在$(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$之外。

反言之，$S_n \to A$是指：在点A的任何ε邻域之外，至多有数列$\{S_n\}$的有限多项（“至多”是指S_1，S_2，…，S_N的全部。但可能只有其中的一部分在这邻域之外；也可能没有在这邻域之外的项）。

根据这个几何解释，不难理解以下结论是成立的：一个数列是否收敛，以及收敛时以什么数为极限，与这个数列的

有限项无关（参看复习题一第8题），也与这个数列各项之间的排列顺序无关（参看复习题一第7题）。

象是由定义4得到定义4″那样，现在，由定义5可以得到下面的

定义5′ （数列$\{S_n\}$不收敛于A的定义）

如果存在正数ε_0，使得对于任意自然数N，都存在自然数$n_0>N$，使得

$$|S_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0,$$

则称数列$\{S_n\}$不收敛于A.

因为，$|S_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0 \Longleftrightarrow S_{n_0}\notin(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$，所以，由定义5′得到数列$\{S_n\}$不以数$A$为极限的如下几何解释：点$A$存在一个充分小的$\varepsilon_0$邻域$(A-\varepsilon_0, A+\varepsilon_0)$，使得在这个数列的任意一项$a_N$之后，仍有在这邻域之外的项$a_{n_0}$。进而，在$a_{n_0}$（看作又一个$a_N$！）之后，还有在$(A-\varepsilon_0, A+\varepsilon_0)$之外的项。由此推知：在$(A-\varepsilon_0, A+\varepsilon_0)$之外必有这个数列的无穷多项（见复习题一第9题）。

§1·2 关于收敛数列的定理

本节及下两节共提出了12个定理，它们的证明都留作习题。

定理1 （极限的唯一性）

收敛数列的极限是唯一的。

定理2 （有界性）

收敛数列必是有界数列。

定理3 （保号性）

设$S_n \to A \neq 0$，$0 < C < |A|$。则存在$N \in I^+$，使得对于满足不等式$n > N$的一切$n \in I^+$，恒有

$$S_n \cdot A > 0 \text{ 且 } |S_n| > C.$$

推论1 设$S_n \to A \neq 0$。

（1）如果$A > 0$，则存在N，使得当$n > N$时，$S_n > 0$。

（2）如果$A < 0$，则存在N，使得当$n > N$时，$S_n < 0$。

推论2 设$S_n \to A$。

（1）如果存在N，使得$n > N$时恒有$S_n \geqslant 0$，则$A \geqslant 0$。

（2）如果存在N，使得$n > N$时恒有$S_n \leqslant 0$，则$A \leqslant 0$。

定理4 （四则运算）

设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$都是收敛的，C是常数，则数列

$$\{a_n + b_n\}、\{a_n - b_n\}、\{C \cdot a_n\}、\{a_n \cdot b_n\}$$

也都是收敛的。如果再附以条件

$$b_n \neq 0\ (n = 1, 2, \cdots),\ \lim b_n \neq 0,$$

则数列

$$\left\{\frac{1}{b_n}\right\} 、 \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$$

也都是收敛的，并且

（1）$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$；

（2）$\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$；

（3）$\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$；

（4）$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$；

（5）$\lim \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{\lim b_n}$；

（6）$\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$。

定理5 （不等性）

若$a_n \to a$，$b_n \to b$，并且$a < b$，则存在$N \in I^+$，使得$n > N$时恒有

$$a_n < b_n.$$

推论 若$a_n \to a$，$b_n \to b$，并且存在$N \in I^+$，使得$n > N$时恒有$a_n \leqslant b_n$，则

$$a \leqslant b.$$

§1·3 数列的收敛定理

本节的五个定理，以及下一节的定理11，都是关于数列收敛的条件，都可以称为数列的收敛定理。

定理6 （两边夹定理）

如果三个数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$满足不等式

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n, \quad n = 1, 2, \cdots;$$

并且

$$\lim a_n = \lim b_n = A,$$

则数列$\{c_n\}$必收敛，并且

$$\lim c_n = A.$$

定理7 （子列收敛准则）

$S_n \to A$的充分必要条件是数列$\{S_n\}$的一切子列皆收敛于A。

本定理用于判定数列发散较为方便。

定理8 （有界数列存在收敛子列）

如果数列$\{S_n\}$有界，则它必有收敛的子列。

定义6 （数列的柯西（Cauchy）条件）