居余马 林翠琴 编著

线性代数学习指南

清华大学出版社

线性代数
学习指南

居余马 林翠琴 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是与居余马等编著的《线性代数(第 2 版)》配套的辅导教材,也可为学习其他教材的读者提供有益的指导。全书以章为单位进行指导。在每章中,首先,明确基本要求,指明了学习的目标和努力的方向,再给出内容提要,提纲挈领地概括了本章的基本内容。然后,逐节进行指导,通过对基本概念、定理和方法的深入分析,通过对一些基本、典型题目的讲解和演练,引导读者深入地学习和领会每节的基本内容。最后,对部分难题和补充题给出了题解,以帮助有余力的读者进一步提高分析问题和解决问题的能力。书后还附有历年硕士研究生入学试卷中线性代数题目的解答,以利于读者及时地检查自己的掌握程度。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指南/居余马,林翠琴编著.—北京:清华大学出版社,2003

ISBN 7-302-06507-1

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①居… ②林… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教学参考资料

Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 023988 号

出 版 者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)

http://www.tup.com.cn

责任编辑:刘颖

印 刷 者:北京顺义振华印刷厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:850×1168 1/32 **印张**:10.75 **字数**:259 千字

版 次:2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-06507-1/O·292

印 数:0001~5000

定 价:14.00 元

序　言

本书是为居余马等编著的《线性代数(第 2 版)》教材(清华大学出版社出版)配套的辅导教材.它也可为学习其他教材的读者提供有益的指导.本书还对历年硕士研究生入学考试中线性代数试题给了题解,这将有助于准备考研的读者在学习阶段更好和更灵活地掌握线性代数的基本内容.

本书的书名《线性代数学习指南》表明了本书主要着眼于指导学生如何学好线性代数课程,为此本书的内容作了以下安排.

首先明确指出每章的"基本要求",并给出"内容提要".课程的"基本要求"是读者学习的目标和努力的方向.每学习一个概念及有关的理论和计算,都要按"基本要求"来掌握它们;每学完一章,读者应该以"基本要求"为镜子,对照和检查是否掌握了"基本要求",对"基本要求"要能说出个一、二、三,绝不能含糊不清.每章的"内容提要"提纲挈领地概括了该章的基本内容,它是每一章的"纲".读者每学完一章,都应该把"内容提要"所涉及的基本概念、基本理论、基本计算以及分析和解决问题的基本方法,深深地印在脑海之中,闭着眼睛都能熟练地陈述"内容提要"所述的方方面面,这样你在思考各种问题和解题时,就有可能"纲举目张",顺利地抵达彼岸.

然后,逐节指导如何学习每章每节,这是本书的重点所在.这里一般是从两个方面来引导读者深入地学习和领会每节的基本内容,掌握分析解决问题的方法,提高解题的能力.第一个方面是对每节涉及的基本概念及有关的理论和计算的方法,进行深入的分

析，力求准确地理解概念，掌握有关定理的条件和结论，掌握计算的基本方法．另一个方面是通过列举一些基本的、典型的和有一定灵活性的计算题、概念题和证明题，帮助读者在理论的指导下提高分析和解决各类问题的能力．对于各种类型的计算题要熟练掌握它的基本计算方法．有些题可以一题多解；对于概念题要能准确地判别各种说法的真伪，澄清一些似是而非的模糊观念；对于证明题要善于应用基本概念和基本的定理加以证明，要思路清晰，对各种类型的证明题要概括出一些有效的证明方法（如直接证法，反证法，数学归纳法等）．

在每章的最后，对部分疑难习题与补充题给出了题解．这些题多数是证明题和比较综合、比较难的计算题，题解一般都提出了解题的思路，以及要用到哪些基本概念和定理．读者对于这些题，应该在认真思考以后仍不会进行证明或计算时，再看题解，这样对比自己的思考过程，才能深刻领会解题的关键所在，从而切实提高证明和计算的能力．

本书最后，对历年硕士研究生入学考试中线性代数试题（按本书章的顺序汇编）给了题解．这不仅可供考研的学生作为备考的参考，而且更有意义的是，读者学完每一章都检查一下自己能否解这些题，从中可以发现自己还有哪些基本内容掌握得不够，需要进一步深入和提高，这有助于读者更好地学好线性代数课程内容．

由于编著者水平和经验所限，不妥之处在所难免，恳请读者们批评指正．

编者

2003 年 2 月于清华园

目 录

第1章

行　列　式

1.1　基本要求与内容提要

1　基本要求

(1) 理解行列式的定义,熟悉每一个元素的余子式和代数余子式的含义.

(2) 理解行列式的性质,并能熟练利用性质展开数字行列式和文字行列式.

(3) 熟悉一些特殊行列式(如对角行列式,副对角行列式,上(下)三角行列式,范德蒙(Vandermonde)行列式等)的展开结果.

(4) 理解克拉默(Cramer)法则,会利用它求解一类线性方程组.

2　内容提要

(1) n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_1^n$ 的定义为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n},$$

其中,$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$是元素 a_{1j} 的代数余子式,M_{1j}是元素 a_{1j} 的余子式(它是 D 中去掉第1行与第 j 列全部元素构成的 $n-1$ 阶行列式).

D 的展开式是 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$ 的 n 次齐次多项

式，共有 $n!$ 项，每项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积．

二阶、三阶行列式可按沙路法展开．

(2) 行列式的性质(对行与列皆成立)．

① 行列式的行与列(按原顺序)互换，其值不变．

② 行列式对任一行(或列)展开，其值相等(定义是对第 1 行展开)．

③ 线性性质：其一是行列式某行(或列)元素都乘 k，则等于行列式的值也乘 k；其二是如果行列式某行(或列)元素皆为两数之和(如第 i 行为 $a_{i1}+b_{i1},a_{i2}+b_{i2},\cdots,a_{in}+b_{in}$)，则其行列式等于两个行列式之和(其第 i 行分别为 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 与 $b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}$)．

④ 行列式中如有两行(或列)完全相同，则其值等于零；进而有两行(或列)成比例，其值也等于零．

⑤ 把行列式某行(或列)元素都乘非零常数 k 加到另一行(或列)对应元素之上，行列式的值不变．

⑥ 反对称性质：行列式两行(或列)对换，其值反号．

⑦ 行列式某行(或列)元素乘另一行(或列)对应元素的代数余子式之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j).$$

(3) 行列式的计算(或称展开)．

展开行列式的基本方法有三个：其一是直接按定义展开；其二是利用性质，将行列式化为上(下)三角行列式；其三是利用性质将某行(或列)元素化为只剩一个非零元，然后对该行(或列)展开，将 n 阶行列式展开化为 $n-1$ 阶行列式的展开，此为降阶展开法．

(4) 一些特殊行列式的展开结果．

① 上(下)三角行列式与对角行列式的值都等于其主对角元的乘积 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$．

② $$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & * \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & * & * \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} * & \cdots & * & a_1 \\ * & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

③ 范德蒙行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

④ $$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|,$$

其中：$|\boldsymbol{A}|$与$|\boldsymbol{B}|$分别为 m 阶和 n 阶行列式；$\boldsymbol{0}$ 所在位置的元素全为零；$*$ 所在位置元素为任意元素．

（5）克拉默法则

若线性方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的系数行列式 $D=|a_{ij}|_1^n \neq 0$，则方程组有惟一解．即

$$x_j = \frac{D_j}{D} \qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

其中 D_j 是用常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 替换 D 中第 j 列的 n 个元素所成的行列式．

1.2 行列式的计算(展开)

例 1 计算$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix}$.

解 对于这个三阶数字行列式,如果利用性质将其化为上三角行列式,或将某行(或列)元素化为只剩一个非零元再展开,都有较大的工作量,还不如直接用沙路法或行列式的定义(对第 1 行展开)来计算.

① $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -18-30+32+36+60-8 = 128-56 = 72.$$

② $$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ &= 3(-6+20)-2(4-16)+3(-10+12) \\ &= 42+24+6=72.\end{aligned}$$

对于三阶数字行列式一般都用这两种方法展开.

例 2 已知$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=0$,求 λ.

解 这里三阶行列式的展开式是 λ 的三次多项式,所以本题是三次方程的求根问题. 如果用沙路法展开,自然易得 λ 的三次多项式,但一般来讲三次多项式的因式分解是比较麻烦的. 如果利用行列式的性质展开这种行列式,有时会出现它的一种因式分解.

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \xlongequal{①+③} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & \lambda+3 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{[3]+[1]\times(-1)} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+4 & -3 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \text{(对第 1 行展开)}$$

$$=(\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda+4 & -3 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+3)[(\lambda+4)(\lambda-1)-6]$$

$$=(\lambda+3)(\lambda^2+3\lambda-10)=(\lambda+3)(\lambda+5)(\lambda-2)=0,$$

所以 $\lambda=-3,-5,2$ 是这个 λ 的三次方程的 3 个根.

其中①+③表示第 1 行加第 3 行;$[3]+[1]\times(-1)$表示第 1 列乘(-1)加到第 3 列上.

例 3 计算 $D=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 15 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$.

解 对于三阶以上的数字行列式,一般都是利用性质将其化为上三角行列式求其值. 化为上三角行列式的步骤是规范化的. 首先利用第 1 行第 1 列的非零元将第 1 列其他元素全化为零,然后利用第 2 行第 2 列的非零元将第 2 列以下元素全化为零,如此等等,直到化为上三角行列式. 如果化的过程中出现全零行,则行列式的值等于零.

这里第 1 行第 1 列的元素为 2,如果利用它将第 1 列其余元素全化为零,中间就会出现很多分数,继续化下去就比较麻烦. 所以这里先把第 1 行乘-1 加到第 3 行,再把第 1 行与第 3 行对换,就使第 1 行第 1 列元素为 1,这样再将第 1 列其余元素化为零就比较简便,即

$$D \xlongequal[\text{①}\leftrightarrow\text{③}]{\text{③}+\text{①}\times(-1)} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{④}+\text{①}\times(-4)]{\substack{\text{②}+\text{①}\times 3 \\ \text{③}+\text{①}\times(-2)}}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 10 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{②}\leftrightarrow\text{③}]{\text{④}+\text{③}\times(-1)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{④}+\text{③}\times(-2)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -58 \end{vmatrix}$$

$$=1\times 7\times 4\times(-58)=-1624.$$

其中:①↔③表示第1行与第3行对换,此时行列式反号.

例4 计算 $D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

解 此题按例3的方法将其化为上三角行列式也可求其值,但仔细观察会发现各行元素之和均为2,此时把各列都加到第1列,第1列元素全为2,而且第2列中也有3个元素为1.这样将其化为上三角行列式就比较简便,即

$$D \xlongequal{[1]+[2]+[3]+[4]} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\text{③}+\text{①}\times(-1) \\ \text{④}+\text{①}\times(-1)}]{\text{②}+\text{①}\times(-1)}$$

$$\begin{vmatrix}2&1&1&1\\0&-2&2&-3\\0&0&-2&-3\\0&0&4&-2\end{vmatrix} \xlongequal{④+③\times2} \begin{vmatrix}2&1&1&1\\0&-2&2&-3\\0&0&-2&-3\\0&0&0&-8\end{vmatrix}$$

$=2\times(-2)^2\times(-8)=-64.$

例 5 已知 $\begin{vmatrix}1+x&2&3\\2&1+x&2\\3&3&1+x\end{vmatrix}=0$,求 x.

解 这里三阶行列式各列元素之和均为 $x+6$,此时把各行加到第 1 行,第 1 行元素全为 $x+6$,然后把第 1 列乘 -1 加到第 2,3 列,就把行列式化为下三角行列式,即

$$\begin{vmatrix}1+x&2&3\\2&1+x&2\\3&3&1+x\end{vmatrix}=(x+6)\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1+x&2\\3&3&1+x\end{vmatrix}$$

$$=(x+6)\begin{vmatrix}1&0&0\\2&x-1&0\\3&0&x-2\end{vmatrix}=(x+6)(x-1)(x-2)=0,$$

所以 $x=1,2,-6$ 就是题中的 x 的三次方程的 3 个根.

这个行列式当然还可用其他方法展开,但这里的方法最简便.

例 4,例 5 是行列式中值得注意的一种类型.展开行列式时首先要观察一下各行(或列)元素之和是否相等,如果相等,按例 4,例 5 的方法展开比较简便.

例 6 计算 $D=\begin{vmatrix}x_1&a&a&a\\a&x_2&a&a\\a&a&x_3&a\\a&a&a&x_4\end{vmatrix}\quad(a\neq x_i,i=1,2,3,4).$

解 此题仍可将 D 化为上三角行列式,先将第 1 行乘 -1 加到其余各行,得

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a-x_1 & x_2-a & 0 & 0 \\ a-x_1 & 0 & x_3-a & 0 \\ a-x_1 & 0 & 0 & x_4-a \end{vmatrix}.$$

再将第 j 列乘 $-\dfrac{a-x_1}{x_j-a}$ $(j=2,3,4)$后加到第 1 列，得

$$D=\begin{vmatrix} x_1-a\sum\limits_{j=2}^{4}\dfrac{a-x_1}{x_j-a} & a & a & a \\ 0 & x_2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4-a \end{vmatrix}$$

$$=\left[x_1+a(x_1-a)\sum_{j=2}^{4}\frac{1}{x_j-a}\right](x_2-a)(x_3-a)(x_4-a)$$

$$=a\left[\frac{x_1}{a(x_1-a)}+\sum_{j=2}^{4}\frac{1}{x_j-a}\right](x_1-a)(x_2-a)(x_3-a)\cdot$$
$$(x_1-a)$$

$$=a\left(\frac{1}{a}+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{x_j-a}\right)\prod_{j=1}^{4}(x_j-a),$$

其中连乘积 $\prod\limits_{j=1}^{4}(x_j-a)=(x_1-a)(x_2-a)(x_3-a)(x_4-a)$.

例 7 计算 $D=\begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+y & a \\ a & a & a & a+y \end{vmatrix}$，其中 $axy\neq 0$.

解 法 1：利用性质将其化为上三角行列式，先将第 1 行乘 -1 加到其余各行，得

$$D=\begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ -x & x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & y \end{vmatrix}.$$

再将第 2 列加到第 1 列,第 3,4 列均乘$\dfrac{x}{y}$加到第 1 列,得

$$D=\begin{vmatrix} a+x+a+2a\dfrac{x}{y} & a & a & a \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{vmatrix}$$

$$=\left(2a+x+2a\frac{x}{y}\right)xy^2=2axy^2+x^2y^2+2ax^2y.$$

法 2:将 D 中 a 均表示为 $a+0$,于是 D 中每个元素都是两数之和,这样的行列式按线性性质可将其表示为 $2^1=16$ 个行列式之和,但其中有 11 个行列式等于 0(它们两列或三列或四列相同),另 5 个行列式也很好计算. 即

$$\begin{vmatrix} a+x & a+0 & a+0 & a+0 \\ a+0 & a+x & a+0 & a+0 \\ a+0 & a+0 & a+y & a+0 \\ a+0 & a+0 & a+y & a+y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & x & 0 & 0 \\ a & 0 & y & 0 \\ a & 0 & 0 & y \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} x & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & y & 0 \\ 0 & a & 0 & y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 & a & 0 \\ 0 & x & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & y \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & a \\ 0 & x & 0 & a \\ 0 & 0 & y & a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{vmatrix}$$

$=axy^2+axy^2+ax^2y+ax^2y+x^2y^2=2axy^2+2ax^2y+x^2y^2.$

其中等号右端第 2,3 个行列式分别对第 1,4 列展开即得 axy^2 和 ax^2y.

例 8 计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ a_3 & 0 & 0 & b_3 \\ x & a_4 & b_4 & y \end{vmatrix}$.

解 此题可通过行、列对换化为

$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ （其中$|\boldsymbol{A}|$,$|\boldsymbol{B}|$均为二阶行列式）.

先将第 2 列与第 1 列对换，再将第 3 列与第 2 列对换，得

$$D=(-1)(-1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 & x & y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{②\leftrightarrow④}-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & x & y \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=(a_1b_4-a_4b_1)(a_2b_3-a_3b_2).$$

例 9 计算 $D_5=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & x+1 & (x+1)^2 & (x+1)^3 & (x+1)^4 \\ 1 & x+2 & (x+2)^2 & (x+2)^3 & (x+2)^4 \\ 1 & x+3 & (x+3)^2 & (x+3)^3 & (x+3)^4 \\ 1 & x+4 & (x+4)^2 & (x+4)^3 & (x+4)^4 \end{vmatrix}$.

解 由于行列式的行与列按顺序互换，其值不变，所以这也是