北京阶梯素质教育研究所
中小学学科奥林匹克编辑部 组编

中学金牌奥赛精典题

一题多解

高中数学

京华出版社

中学金牌奥赛精典题一题多解

（高中数学）

主　编　项昭义　屠新民　陈　斌

编　委　尹建堂　王建设　叶正道
陈友文　袁有霞　张恩宏
刘德存　李素寅　武文潢

编　者　项昭义　屠新民　陈　斌
尹建堂　王建设　叶正道
陈友文　袁有霞　张恩宏
刘德存　李素寅　武文潢
李锦萍　栗加顺　丁连义

京 华 出 版 社

责任编辑:徐秀琴　王　建
封面设计:周春林　默　石

图书在版编目(CIP)数据

中学金牌奥赛精典题一题多解.高中数学/北京阶梯素质教育研究所编.

－北京:京华出版社,2004.3

ISBN　7－80600－848－9

Ⅰ.中…　Ⅱ.北…　Ⅲ.数学课－高中－解题　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 121196 号

著　　者	北京阶梯素质教育研究所
出版发行	京华出版社
	(北京市朝阳区安华西里 1 区 13 号楼 2 层　100011)
印　　刷	北京国防印刷厂印刷
开　　本	大 32 开
字　　数	200 千字
印　　张	9.625
印　　数	1－5000
出版日期	2004 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7－80600－848－9/G·480
定　　价	11.00 元

京华版图书,若有质量问题,请与本社联系

前　言

中小学学科奥林匹克编辑部在精心研究了近几年国内外这项活动及大量该类优秀图书的基础上，邀请了全国各地一些潜心耕耘于这块园地的优秀园丁，编纂出版了一系列有关数学、语文、英语、物理、化学、生物、信息七大学科，教材辅导、同步训练及近年学科竞赛试卷汇编等类共计100多个品种的学科奥林匹克系列读物。可谓倾尽全力，鞠躬尽瘁。

中小学时期是学生打知识基础的阶段。在这个阶段，学生应该完成从要我学到我要学的转变。然而，目前中小学学生(尤其是大中城市的学生)普遍存在的问题是缺乏学习的主动积极性。没有动力源，一切都无从谈起。为了转变这一现象，我们认为：一要给中小学学生提供丰富有趣的适合他(她)们喜闻乐读的出版物，二要由老师、家长督促、帮助学生养成良好的学习习惯。小学、初中阶段没有形成好的学习习惯，到了高中就很难了。

中小学学科奥林匹克系列读物不仅可以使聪明好学的好学生在自己学有余力、学有潜力的学科不断地攀登知识的高峰，尽早尽多地获得解题的技能技巧，还可以使某些一时还没有开窍或一时对某一学科不感兴趣的学生不知不觉地对该学科产生浓厚的学习兴趣，以致后来居上，一发而不可收。因为这些孩子并不“笨”，相反，这些学生中的某些人是更有潜力的，问题是内因和外因没有结合好。

学生有了学习的积极性、主动性之后，还应该有意识地培养自己“会学”知识的能力。我们认为，学会知识固然重要，但是会学的能力更为重要，因为人的一生更多的时间是在工作岗位上。我们的读物不仅重视让学生从本系列读物中学到更多的知识，更重视教会学生如何去获得知识。

中小学学科奥林匹克是该学科课内知识内容的补充、延伸，是“灵活”与“美”的提高，念好学科奥林匹克，对课堂基础知识的学习和掌握将有莫大帮助。

我们的目的是想让阅读使用本系列读物的中小学学生能对课堂教学产生兴趣，开发智力，在原有的基础上使学习能力有较大幅度提高。如果学生的家长、老师能对学生的学习放心、满意，我们的目的就达到了。

这一系列读物自出版以来，独树一帜，深受广大教师、家长、学生的喜爱；这一系列读物原由奥林匹克出版社出版发行，现又请国内多名奥林匹克教练员做了认真的修订并新增部分学科图书，现由京华出版社再版发行供各地中、小学生使用，并请提出宝贵意见。

中小学学科奥林匹克编辑部

作者的话

这套书是在该学科基本题目基础上延伸发展出来的，它有两大特点。

一是典型题：数学练习题多如烟海，烟海之中不免使许多学生无所适从，我们从上千道数学竞赛试题中精选提炼出具有典型性的试题，按知识点分类成册。这样做的目的是给学生提供极富典型性的练习题，启发引导学生去举一返三、触类旁通、更好地掌握中小学数学的各项内容，跳出茫茫题海，以实现从应试教育向素质教育的转变。

二是一题多解：要想学好数学，首要的是要掌握数学解题的基本方法；数学解题的基本方法是相通的，小学数学解题的某些基本方法，初中数学也要用到，高中数学也要用到，后面更高层次的数学学习也要用到。数学典型题的一题多解是最能体现数学解题基本方法的。所谓一题多解，就是用不同的思维分析方法，多角度多途径地解答问题。因此，这一类练习题的解法极富技巧性、趣味性，有数学兴趣的学生可从中提高自己的数学素养，并得到美的享受；没有数学兴趣的学生可从中逐渐培养自己的数学兴趣。认真研读体味本书提供的各种解题技巧和方法，就会居高临下，对课堂数学教学产生极强的指导作用。

书中的失误和不足，敬请同行和读者斧正（信寄：河南省郑州市河南省实验中学，邮编 450002）。

目　　录

第一部分

1.集合、映射与函数

1-1-1 集合 A、B 的并集 $A\cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$,当 $A\neq B$ 时,(A,B)与(B,A)视为不同的对,则这样的(A,B)对的个数有
(　　)

(A)8

(B)9

(C)26

(D)27

(1993 年全国高中数学联赛试题)

【解法一】 若 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$,则满足题意的 B 有:$B=\varnothing;\{a_1\};\{a_2\};\{a_3\};\{a_1,a_2\};\{a_1,a_3\};\{a_2,a_3\};\{a_1,a_2,a_3\}$,即这时的配对个数有:

$$C_3^3\cdot(C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3)=8$$

仿此,若 $A=\{a_1,a_2\}$(或$\{a_1,a_3\}$,若$\{a_2,a_3\}$),满足题意的 B 的个数,即配对个数有:

$$C_3^2\cdot(C_2^0+C_2^1+C_2^2)=12.$$

于是,全部配对个数有:

$$C_3^3\cdot(C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3)+C_3^2\cdot(C_2^0+C_2^1+C_2^2)+C_3^1\cdot(C_1^0+C_1^1)+C_3^0\cdot(C_0^0)=27.$$

故应选(D).

【解法二】 $A=B$ 且 $A\cup B=P$ 的情形只有 1 个配对:$A=$

摄尔西乌斯(瑞典)

P 且 $B=P$.而 $A\neq B$ 的配对个数必是偶数.$\therefore$ 全部配对个数为奇数.

又粗略计数后知,配对个数不少于 16.

可选(D).

【评注】 (1)本题涉及的知识点:并集,组合,计数,奇偶性.

(2)两种解法反映的是一种数学思想:配对思想.解法一是分类讨论;解法二是估算法.

1-1-2 若 $M=\{(x,y)\mid |\mathrm{tg}\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$,则 $M\cap N$ 的元素个数是 ( )

(A)4

(B)5

(C)8

(D)9

(1993 年全国高中数学联赛试题)

【解法一】 由非负数的和为零的条件,得

$$\begin{cases}\mathrm{tg}\pi y=0\\ \sin\pi x=0\end{cases}$$

$$解得\begin{cases}x=k(k\in Z)\\ y=h(h\in Z)\end{cases}$$

即集合 M 为坐标平面上整点的全体.

又由 $x^2+y^2\leqslant 2=(\sqrt{2})^2$

得集合 N 为以原点为中心$\sqrt{2}$为半径的闭圆内点所组成的点集.

画图表明,闭圆内部共有 9 个整点.

故应选(D).

【解法二】 (说明:本大题的解 2 为适应于选择题的不太严谨的解法).

可以看出,$M\cap N$ 即交集是关于两坐标轴对称的点集,且原点属于此交集,$\therefore$(A)、(C)不合.

分别统计坐标轴上，第 1 象限内，$M\cap N$ 中的点的个数，再利用对称性得　$M\cap N$ 的元素个数为　$1+1\times4+1\times4=9$.

故选(D).

【评注】 (1)本题涉及的知识点：最简单的三角方程，圆域；非负数和为零的条件，交集，坐标平面上图形的对称性.

(2)解法二为验证法.

(3)本题可归属于题型：一个集合为离散点，另一个集合为闭或开区域，求其交集的点数.

1-1-3　已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$($a$、$b$ 为实数)且 $f(\lg\log_3 10)=5$，则 $f(\lg\lg3)$的值是　(　　)

(A) -5

(B) -3

(C)3

(D)随 a、b 取不同值而取不同值

(1993 年全国高中数学联赛试题)

【解法一】 $f(x)-4=a\sin x+b\sqrt[3]{x}$是奇函数的和，为奇函数，

$\therefore\quad f(-x)-4=-[f(x)-4]$,

即　$f(-x)=-f(x)+8$.

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad f(\lg\lg3)&=f(-\lg\log_3 10)\\
&=-f(\lg\log_3 10)+8\\
&=3.
\end{aligned}
$$

故应选(C).

【解法二】 取 $a=0$，为使 $f(\lg\log_3 10)=5$，

得　$b=\dfrac{5-4}{\sqrt[3]{\lg\log_3 10}}$,

则　$f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{\lg\log_3 10}}+4$.

$$\therefore \quad f(\lg\lg 3)=\sqrt[3]{\frac{\lg\lg 3}{\lg\log_3 10}}+4$$

$$=-1+4$$

$$=3.$$

故可排除(A)、(B).

仿此取 $b=0$,仍得 $f(\lg\lg 3)=3$,可选(C).

【评注】 (1)本题涉及的知识点:奇函数,对数性质,对数换底公式,求函数的值.

(2)上述两种解法均佳,解题的关键是发现 $\lg\lg 3=-\lg\log_3 10$ 和 $f(x)-4$ 为奇函数.

(3)本题可归属于题型.

$f(x)-k$(k 为常数)为奇或偶函数,已知 $f(t)=m$,求 $f(-t)$的值.其中 $-t$ 与 t 只差一个符号的关系是隐秘着的.

1-1-4 设 x,y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$,$S=x^2+y^2$,则 $\frac{1}{S_{\max}}+\frac{1}{S_{\min}}=?$

(1993 年全国高中数学联赛试题)

【解法一】 设 $y=mx$,

可以得到 $x^2=\dfrac{5}{4m^2-5m+4}$,

$$y^2=\frac{5m^2}{4m^2-5m+4}.$$

$$\therefore x^2+y^2=\frac{5m^2+5}{4m^2-5m+4}$$

$$=\frac{5}{4}+\frac{5m}{4(4m^2-5m+4)}$$

$$=\frac{5}{4}\left(1+\frac{5}{4m+\frac{4}{m}-5}\right)$$


哥白尼(波兰)

由 $m+\frac{1}{m}\geqslant 2$ 或 $m+\frac{1}{m}\leqslant -2$ 以及函数的单调性可知 $\left(m+\frac{1}{m}\right)_{\min}=2$ 或 $\left(m+\frac{1}{m}\right)_{\max}=-2$.

$$\therefore\quad S_{\max}=(x^2+y^2)_{\max}$$

$$=\frac{5}{4}\left(1+\frac{5}{4\times 2-5}\right)$$

$$=\frac{10}{3},$$

$$S_{\min}=(x^2+y^2)_{\min}$$

$$=\frac{5}{4}\left(1+\frac{5}{4\times(-2)-5}\right)$$

$$=\frac{10}{13},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{S_{\max}}+\frac{1}{S_{\min}}=\frac{3}{10}+\frac{13}{10}$$

$$=\frac{8}{5}.$$

【分析二】 由 $S=x^2+y^2$,所以容易联想到 $\rho^2=x^2+y^2$,可尝试用极坐标法来求解.

【解法二】 设 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta\ (\theta\in R)$

代入 $4x^2-5xy+4y^2=5$ 得到

$$4\rho^2\cos^2\theta-5\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta+4\rho^2\sin^2\theta=5,$$

$$\therefore\quad \rho^2(4-5\sin\theta\cos\theta)=5,$$

$$\therefore\quad \rho^2=\frac{10}{8-5\sin 2\theta},$$

$$\therefore\quad S=x^2+y^2=\rho^2=\frac{10}{8-5\sin 2\theta},$$

$\therefore$ $\sin 2\theta=-1$ 时,$S_{\min}=\frac{10}{13}$,

$\sin 2\theta = 1$ 时，$S_{\max} = \dfrac{10}{3}$，

$$\therefore \quad \frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}} = \frac{13}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{5}.$$

【分析三】 由解法一设 $y = mx$ 可联想到：也可以这样设 $y = x + m$，同样可以把二元转化为一元来解．

【解法三】 设 $y = x + m$，则代入已知关系式得

$3x^2 + 3mx + 4m^2 = 5$，

而 $S = 2x^2 + 2mx + m^2$

从二式消去 x，得 $5m^2 = 10 - 3S$，

即 $S = \dfrac{10}{3} - \dfrac{5}{3}m^2$，因 $m^2 \geqslant 0$，

故 $S \leqslant \dfrac{10}{3}$，$S_{\max} = \dfrac{10}{3}$．

为求 $S_{\min}$，则应考虑方程 $3x^2 + 3mx + 4m^2 - 5 = 0$ 中，m 的取值应满足 $9m^2 - 12(4m - 5) \geqslant 0$ 才能使 x 为实数，故得 $m^2 \leqslant \dfrac{20}{13}$，代入 $S = \dfrac{10}{3} - \dfrac{5}{3}m^2$，有：

$$S \geqslant \frac{10}{3} - \frac{5}{3} \cdot \frac{20}{13} = \frac{10}{13}，即\ S_{\min} = \frac{10}{13}.$$

于是 $\dfrac{1}{S_{\max}} + \dfrac{1}{S_{\min}} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{13}{10} = \dfrac{8}{5}$．

【分析四】 由解法三设 $y = x + m$，进一步联想，我们还可作双换元变换，设 $x = u + v$，$y = u - v$．同样可以获得答案．

【解法四】 作变换 $x = u + v$，$y = u - v$，由已知等式，得

$4(u+v)^2 - 5(u+v)(u-v) + 4(u-v)^2 = 5$，即

$$\frac{u^2}{5/3} + \frac{v^2}{5/13} = 1,$$

由椭圆的范围知 $0 \leqslant u^2 \leqslant \dfrac{5}{3}$，从而

$S=(u+v)^2+(u-v)^2=2(u^2+v^2)=2\left(u^2+\frac{5-3u^2}{13}\right)=\frac{20}{13}u^2+\frac{10}{13}$,

显见,当 $u^2=0$ 时,$S_{\min}=\frac{10}{13}$,

当 $u^2=\frac{5}{3}$时,$S_{\max}=\frac{10}{3}$.

故$\frac{1}{S_{\max}}+\frac{1}{S_{\min}}=\frac{3}{10}+\frac{13}{10}=\frac{8}{5}$.

【评注】 四种解法各尽其妙.解法一、三、四都属于变量代换法,但稍有不同:解法一和三属于单变量代换;解法四属于双变量代换.解法二属于极坐标法,思路清晰流畅,过程简单,运算简便.顺便说明,解法二也可叫做三角代换,可见数学平行各科(例如三角学和平面解析几何)之间的知识有深刻的内在联系.一题多解的功能就在于揭示这种内在联系,培养发散性思维能力.

1-1-5 设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$论证是否存在一个函数 $f:N\to N$ 使得$f(1)=2$,$f(f(n))=f(n)+n$对一切 $n\in N$ 成立,$f(n)<f(n+1)$对一切 $n\in N$ 成立.

(1993 年第 34 届国际中学生数学奥林匹克竞赛试题)

【解法一】 存在,首先有一条链

$1\to2\to3\to5\to8\to13\to21\to\cdots$ ①

链上每一个数 n 的后继是$f(n)$,f 满足

$f(f(n))=f(n)+n$ ②

即每个数是它前面两个数的和.这种链称为 f 链.

对于①中的数 $m>n$,由①递增易知有

$f(m)-f(n)\geqslant m-n$ ③

我们证明自然数集 N 可以分拆为若干条f 链,并且对任意

第一部分

自然数 $m>n$，③成立（从而 $f(n+1)>f(n)$，并且每两条链无公共元素）. 方法是用归纳法构造链（参见单墫教授著：《数学竞赛研究教程》江苏教育出版社）

设已有若干条 f 链，满足③. 而 $k+1$ 是第一个不在已有链中出现的数. 定义

$$f(k+1)=f(k)+1 \qquad ④$$

这链中其余的数由②逐一确定.

对于 $m>n$，如果 m、n 同属新链，③显然成立. 设 m、n 中恰有一个属于新链.

若 m 属于新链，在 $m=k+1$ 时，

$f(m)-f(n)=f(k)+1-f(n)\geqslant k-n+1=m-n$.

设对于 m，(3)成立，则

$f(f(m))-f(n)=f(m)+m-f(n)\geqslant m-n+m\geqslant f(m)-n$（由②易知 $2m\geqslant f(m)$）.

即对新链上一切 m，③成立.

若 n 属于新链，在 $n=k+1$ 时，

$f(m)-f(n)=f(m)-f(k)-1\geqslant m-k-1=m-n$.

设对于 n，③成立. 在 $m>n$ 时，m 不为原有链的链首. 记 $m=f(s)$，则在 $m>f(n)$ 时，

$$\begin{aligned} f(m)-f(f(n)) &= s+m-(f(n)+n) \\ &= m-f(n)+(s-n). \end{aligned}$$

而在 $s\leqslant n$，$f(n)-f(s)\geqslant n-s\geqslant 0$，与 $m>f(n)$ 矛盾，所以 $s>n$，$f(m)-f(f(n))\geqslant m-f(n)$. 即对新链上一切 n，③成立.

因而添入一条新链后，③仍成立.

这样继续添加，直到所有自然数均在链中出现，所得函数 $f:N\to N$ 即为所求.

【解法二】 令 $f(n)=[\beta(n+1)]+n$，其中 $\beta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$[x]$

表示 x 的整数部分.

显然 $f(n)$ 严格递增,并且 $f(1)=2$.

又由于 $\beta(\beta+1)=1$,所以

$$f(f(n))=f(n)+[\beta(f(n)+1)]$$
$$=f(n)+\{\beta[\beta(n+1)]+\beta(n+1)\}$$
$$=f(n)+\{\beta^2(n+1)-\beta[\beta(n+1)]+\beta(n+1)\}$$

($\{x\}=x-[x]$ 为 x 的分数部分)

$$=f(n)+\{n+1-\beta[\beta(n+1)]\}$$
$$=f(n)+n.$$

因此 $[\beta(n+1)]+n$ 就是满足要求的函数.

1-1-6 若函数 $y=\log_3(x^2+ax-a)$ 的值域为 R,则实数 a 的取值范围是______.

(1994 年第 5 届"希望杯"全国数学邀请赛题)

【解法一】 根据函数值域定义,对于任意实数 y,关于 x 的方程 $\log_3(x^2+ax-a)$,

即 $x^2+ax-a-3^y=0$ 恒有解,

因此,$\Delta=a^2+4(a+3^y)$

$$=a^2+4a+4\cdot 3^y\geqslant 0 \quad ①$$

恒成立.

$\because$ $4\cdot 3^y>0$, $\therefore$ ①式成立的充要条件是 $a^2+4a\geqslant 0$,

解得 $a\leqslant -4$ 或 $a\geqslant 0$.

【解法二】 根据对数函数和二次函数的性质,$f(x)=\log_3(x^2+ax-a)$ 的值域为 R 的充要条件是

$$u(x)=x^2+ax-a\,(x\in R)$$

的最小值不大于 0,即 $-a-\dfrac{a^2}{4}\leqslant 0$,解得 $a\leqslant -4$ 或 $a\geqslant 0$.

【评注】 解法一运用转化思想把对数函数转化为指数形式(关于 x 的二次方程)获得解答;解法二运用对数函数和二次函

数的性质获得思路，两法均较简便.

1-1-7 设集合 $A=\left\{\frac{n}{2}\mid n\in Z\right\}$，$B=\{n\mid n\in Z\}$，$C=\left\{n+\frac{1}{2}\mid n\in Z\right\}$，$D=\left\{\frac{n}{3}+\frac{1}{6}\mid n\in Z\right\}$，则在下列关系中，成立的是 ( )

(A) $A\subset B\subset C\subset D$

(B) $A\cap B=\varnothing$，$C\cap D=\varnothing$

(C) $A=B\cup C$，$C\subset D$

(D) $A\cup C=B$，$C\cap D=\varnothing$

（1995 年第 6 届"希望杯"全国数学邀请赛题）

【解法一】 $\because A=\left\{\frac{n}{2}\mid n\in Z\right\}$，$B=\{n\mid n\in Z\}$，$C=\left\{n+\frac{1}{2}\mid n\in Z\right\}$，$D=\left\{\frac{n}{3}+\frac{1}{6}\mid n\in Z\right\}$

$\therefore A=B\cup C$，$C\subset D$. 故应选(C).

【解法二】 如果把 A,B,C,D 与角的集合相对应，令

$A'=\left\{\frac{n\pi}{2}\,\middle|\,n\in Z\right\}$，

$B'=\{n\pi\mid n\in Z\}$，

$C'=\left\{n\pi+\frac{\pi}{2}\,\middle|\,n\in Z\right\}$，

$D'=\left\{\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\,\middle|\,n\in Z\right\}$

结论仍然不变，显然 A' 为终边在坐标轴上的角的集合，B' 为终边在 x 轴上的角的集合，C' 为终边在 y 轴上的角的集合，D' 为终边在 y 轴上及在直线 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上的角的集合，故应选(C).

【评注】 解法一为直接法，解法二运用转化思想把已知的